**Серия «Математика»**
Том 1 (2007), № 1, С. 205—211

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
*Иркутского государственного университета*

УДК 517.983.51

# Классические решения вырожденного дифференциально-операторного уравнения третьего порядка в банаховых пространствах

С. С. Орлов (orlov_sergey@inbox.ru)
*Институт математики, экономики и информатики ИГУ, Иркутск*

**Аннотация.** В статье доказана теорема о достаточных условиях существования и единственности классического решения задачи Коши для вырожденного дифференциально-операторного уравнения третьего порядка в банаховых пространствах. А также получены явные формулы для восстановления этого решения.

**Ключевые слова:** фредгольмов оператор, обобщенный жорданов набор, банахово пространство

## Введение

Рассматривается дифференциально-операторное уравнение следующего вида

$$B\dddot{x}(t) = A_2\ddot{x}(t) + A_1\dot{x}(t) + A_0x(t) + f(t), \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1,\ \ddot{x}(0) = x_2, \tag{2}$$

где $B,\ A_2,\ A_1,\ A_0$ — замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, действующие из $E_1$ в $E_2$, $E_1,\ E_2$ — банаховы пространства, причем

$$\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A_2) \cap \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_0),$$

$$\overline{\mathcal{D}(B)} = \overline{\mathcal{D}(A_2) \cap \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_0)} = E_1, \overline{\mathcal{R}(B)} = \mathcal{R}(B),$$

$x(t),\ f(t)$ — неизвестная и заданная функции неотрицательного вещественного аргумента $t$ со значениями в $E_1$ и $E_2$ соответственно.

Особый интерес представляет случай необратимого оператора $B$, т. к. в такой постановке задача Коши (1)-(2) не всегда имеет классическое решение, под которым понимается функция $x(t)$ класса $\mathcal{C}^3([0,+\infty),E_1)$, обращающая в тождество уравнение (1) и удовлетворяющая начальным условиям (2). Имеется множество подходов к исследованию проблемы разрешимости сингулярных (вырожденных) дифференциально-операторных уравнений как в конечномерных, так и в бесконечномерных пространствах. В данной работе применительно к задаче Коши (1)-(2) были использованы идеи работ Н.А. Сидорова по теории разрешимости сингулярных дифференциально-операторных уравнений в банаховых пространствах [1].

## 1. Некоторые вспомогательные сведения

Пусть оператор $B$ фредгольмов и выполнено следующее условие

А) ядро оператора $B$ $m$-мерно, т. е. $\dim\mathcal{N}(B)=m$, в этом случае $\dim\mathcal{N}(B^*)=m$, здесь $B^*$ — сопряженный оператор.

Введем следующие обозначения: $\{\varphi_i,\ i=\overline{1,m}\}$ — базис в $\mathcal{N}(B)$, $\{\psi_i,\ i=\overline{1,m}\}$ — базис в $\mathcal{N}(B^*)$, $\{\gamma_i,\ i=\overline{1,m}\}$, $\{z_i,\ i=\overline{1,m}\}$ — соответствующие биортогональные системы элементов из $E_1^*$ и $E_2$, т.е. имеют место соотношения

$$\langle\varphi_i,\,\gamma_j\rangle=\delta_{ij},\ \langle z_i,\,\psi_j\rangle=\delta_{ij},\ i,j=\overline{1,m}.$$

Приведем следующие понятия, используемые далее в работе.

*Оператором Шмидта* для фредгольмова оператора $B$ называется следующий оператор

$$\Gamma=\tilde{B}^{-1}=\left(B+\sum_{i=1}^{m}\langle\bullet,\,\gamma_i\rangle\,z_i\right)^{-1}, \tag{3}$$

который в силу леммы Шмидта [2] существует и ограничен.

*Обобщенным $A_2,\ A_1,\ A_0$-жордановым набором* оператора $B$ будем называть множество элементов $\left\{\varphi_i^{(k)},\ k=\overline{1,p_i},\ i=\overline{1,m}\right\}$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$B\varphi_i^{(2)}=A_2\varphi_i^{(1)},\ B\varphi_i^{(3)}=A_2\varphi_i^{(2)}+A_1\varphi_i^{(1)},$$
$$B\varphi_i^{(k)}=A_2\varphi_i^{(k-1)}+A_1\varphi_i^{(k-2)}+A_0\varphi_i^{(k-3)},\ k=\overline{4,p_i},\ i=\overline{1,m}. \tag{4}$$

В силу альтернативы Фредгольма [2] уравнения (4) будут разрешимы относительно $\varphi_i^{(k)}$, если для них выполняются условия разрешимости, имеющие вид

$$\left\langle A_2\varphi_i^{(1)},\,\psi_j\right\rangle=0,\ \left\langle A_2\varphi_i^{(2)}+A_0\varphi_i^{(1)},\,\psi_j\right\rangle=0,$$

$$\left\langle A_2\varphi_i^{(k-1)} + A_1\varphi_i^{(k-2)} + A_0\varphi_i^{(k-3)},\, \psi_j \right\rangle = 0, \tag{5}$$
$$k = \overline{4, p_i},\ i, j = \overline{1, m}.$$

В этом случае элементы $\varphi_i^{(k)}$ можно восстановить по формулам

$$\varphi_i^{(2)} = \Gamma A_2\varphi_i^{(1)},\ \varphi_i^{(3)} = \Gamma(A_2\varphi_i^{(2)} + A_1\varphi_i^{(1)}),$$
$$\varphi_i^{(k)} = \Gamma(A_2\varphi_i^{(k-1)} + A_1\varphi_i^{(k-2)} + A_0\varphi_i^{(k-3)}),\ k = \overline{4, p_i},\ i = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Далее без ограничения общности будем считать, что $p_1 \le p_2 \le p_3 \le \dots \le p_m$.

Обобщенный $A_2,\ A_1,\ A_0$-жорданов набор оператора $B$ называется *полным*, если

$$\det \left\langle A_2\varphi_i^{(p_i)} + A_1\varphi_i^{(p_i-1)} + A_0\varphi_i^{(p_i-2)},\, \psi_j \right\rangle \ne 0,\ i, j = \overline{1, m}.$$

В случае полного обобщенного $A_2,\ A_1,\ A_0$-жорданова набора без ограничения общности для всех $i, j = \overline{1, m}$ можно предполагать выполненными следующие равенства

$$\left\langle A_2\varphi_i^{(k)} + A_1\varphi_i^{(k-1)} + A_0\varphi_i^{(k-2)},\, \psi_j \right\rangle = 0,\ k < p_i, \tag{7}$$

$$\left\langle A_2\varphi_i^{(p_i)} + A_1\varphi_i^{(p_i-1)} + A_0\varphi_i^{(p_i-2)},\, \psi_j \right\rangle = \delta_{ij}. \tag{8}$$

Полный обобщенный $A_2,\ A_1,\ A_0$-жорданов набор оператора $B$ называется *биканоническим* [3], если выполняются соотношения

$$\left\langle A_2\varphi_i^{(k)} + A_1\varphi_i^{(k-1)} + A_0\varphi_i^{(k-2)},\, \psi_j \right\rangle = 0,\ k > p_i,\ i, j = \overline{1, m}, \tag{9}$$

где

$$\varphi_i^{(k)} = \Gamma(A_2\varphi_i^{(k-1)} + A_1\varphi_i^{(k-2)} + A_0\varphi_i^{(k-3)}),\ k > p_i,\ i = \overline{1, m}$$

называются формально присоединенными элементами.

Далее везде в работе будем предполагать выполненным условие

B) оператор $B$ имеет биканонический полный обобщенный $A_2,\ A_1,\ A_0$-жорданов набор.

## 2. Построение классического решения

Ранее в работах [4], [5] строились классические решения задачи Коши (1)-(2) в конечномерных пространствах в предположении одномерности нуль-пространства оператора (матрицы) $B$. В настоящей работе эти результаты обобщаются на случай бесконечномерных пространств и многомерных ядер.

Пусть выполнено следующее условие:

C) операторы $A_2\Gamma$ , $A_1\Gamma$ , $A_0\Gamma$ коммутируют, т. е. выполняются следующие равенства

$$A_n\Gamma\ A_k\Gamma\ = A_k\Gamma\ A_n\Gamma\ , n \neq k,\ n, k = \overline{0,2},$$

и операторное уравнение

$$\Lambda^3 + A_2\Gamma\Lambda^2 + A_1\Gamma\Lambda + A_0\Gamma = 0$$

имеет три различных решения $\Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3 \in \mathcal{L}(E_2)$, коммутирующих между собой, причем операторы вида $(\Lambda_i - \Lambda_j),\ i \neq j,\ i, j = \overline{1,3}$ непрерывно обратимы.

Введем функции:

$$F(\tau) = V^{-1}((\Lambda_3 - \Lambda_2)\exp\Lambda_1\tau - (\Lambda_3 - \Lambda_1)\exp\Lambda_2\tau + (\Lambda_2 - \Lambda_1)\exp\Lambda_3\tau), \tag{10}$$

где $V = (\Lambda_3 - \Lambda_2)(\Lambda_3 - \Lambda_1)(\Lambda_2 - \Lambda_1)$,

$$g(t) = f(t) + A_2x_2 + A_1(x_2t + x_1) + A_0(\frac{x_2t^2}{2} + x_1t + x_0),$$

$$K_{ij}(\tau) = \left\langle F''(\tau)A_2\varphi_i + F'(\tau)A_1\varphi_i + F(\tau)A_0\varphi_i,\ \psi_j\right\rangle,\ i, j = \overline{1, m},$$

$$b_j(t) = -\int\limits_0^t \langle F(t-s)g(s),\ \psi_j\rangle\, ds,\ j = \overline{1, m}.$$

Далее имеет место следующая

**Лемма 1.** *Если выполнены условия A), B), C), то для* $i, j = \overline{1, m}$ *справедливо представление*

$$K_{ij}(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau^{p_i-1}}{(p_i-1)!}, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{11}$$

Справедливость формулы (11) устанавливается простым разложением в ряд Тейлора функций $K_{ij}(\tau)$ в окрестности точки $\tau = 0$. При этом используется условие C) и формулы (6), (7), (8), (9), (10).

Введем условия:

D) $b_j^{(q+2)}(0) = 0,\ q = \overline{1, p_i},\ i, j = \overline{1, m}$,

E) $\langle f(t),\ \psi_j\rangle \in \mathcal{C}^{(p_j)}(t \geq 0),\ j = \overline{1, m}$.

**Теорема 1.** *Если выполнены условия A), B), C), D), E), то задача Коши (1)-(2) имеет единственное классическое решение*

$$x(t) = x_0 + x_1t + \frac{x_2t^2}{2} + \sum_{i=1}^m b_i(t)\varphi_i + \Gamma\int\limits_0^t F(t-s)g(s)ds +$$

$$+\Gamma\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^t (F_{tt}^{''}(t-s)A_2\varphi_i + F_t^{'}(t-s)A_1\varphi_i + F(t-s)A_0\varphi_i)b_i(s)ds,$$

*где* $\Gamma$ *— оператор Шмидта см. (3), функция* $F(\tau)$ *задается формулой (10).*

*Доказательство.* Следуя идеологии работы [1], решение задачи Коши (1)-(2) будем искать в виде

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \frac{x_2 t^2}{2} + \Gamma V(t) + \sum_{i=1}^{m}\xi_i(t)\varphi_i, \tag{12}$$

где функции $V(t),\ \xi_i(t),\ i=\overline{1,m}$ удовлетворяют следующим условиям

$$V(0) = \dot V(0) = \ddot V(0) = 0,\ \langle V(t),\,\psi_j\rangle = 0,\ j=\overline{1,m}, \tag{13}$$

$$\xi_i(0) = \dot\xi_i(0) = \ddot\xi_i(0) = 0,\ i=\overline{1,m}. \tag{14}$$

Подставляя (12) в (1) с учетом (13) и условия C) получаем

$$V(t) = \int\limits_0^t F(t-s)g(s)ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^t (F_{tt}^{''}(t-s)A_2\varphi_i + F_t^{'}(t-s)A_1\varphi_i + F(t-s)A_0\varphi_i)\xi_i(s)ds,$$

где $\xi_i(t)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^t K_{ij}(t-s)\xi_i(s)ds = b_j(t),\ j=\overline{1,m}, \tag{15}$$

которая в силу леммы 1 фактически расщепляется на $m$ независимых уравнений, решая каждое из которых методом последовательного дифференцирования в силу условия D) находим его единственное аналитическое решение $\xi_i(t) = b_i^{(p_i)}(t)$, где $i=\overline{1,m}$. □

**Замечание 1.** Условие E) «слабой» дифференцируемости функции $f(t)$ требуется для однозначной разрешимости системы интегральных уравнений Вольтерра (15). При этом учитывается свойство, заключающееся в том, что $b(0) = \dot b(0) = \ddot b(0) = 0$.

**Замечание 2.** Условие биканоничности полного обобщенного жорданова набора можно снять. Это приведет к «техническому» утяжелению предложенного метода, но никак не скажется на сути результата.

**Замечание 3.** Применение к поставленной задаче теории обобщенных функций Соболева-Шварца позволяет снять условие D) теоремы 1 и построить решение задачи Коши (1)-(2) в классе $\mathcal{K}^{'}(\mathcal{R}_{+}, E_1)$ — обобщенных функций с ограниченным слева носителем [6]. Для восстановления такого решения могут быть использованы две технологии. Первая состоит в представлении решения в виде суммы регулярной и сингулярной составляющих, последняя имеет точечный носитель и является линейной комбинацией $\delta$-функции Дирака и ее производных [7]. Другой подход, развитый М. В. Фалалеевым, связан с понятием фундаментальной оператор-функции сингулярного дифференциального оператора [8]. Здесь решение восстанавливается как свертка фундаментальной оператор-функции с правой частью уравнения (свободной функцией). С помощью этой конструкции доказывается единственность решения в классе $\mathcal{K}^{'}(\mathcal{R}_{+}, E_1)$.

## Список литературы


1. *Сидоров Н.А., Романова О.А.* О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 9. С. 1516-1526.
2. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
3. *Русак Ю.Б.* Обобщённая жорданова структура в теории ветвления: дис. ... канд. физ. мат. наук: Ташкент: АН УССР, 1979.
4. *Орлов С.С.* Непрерывные и обобщенные решения одного класса систем линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с вырождением // Интеллектуальные и материальные ресурсы Сибири: Материалы регион. науч.-практ. конф., Иркутск: Изд.-во БГУЭП, 2007. С. 33-40.
5. *Орлов С.С.* Задача Коши для полной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с постоянными коэффициентами//Материалы ежегодной научно-теоретической конференции молодых ученых. Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 2006. С. 121-123.
6. *Сидоров Н.А., Фалалеев М.В.* Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 726-728.
7. *Владимиров В.С.* Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
8. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsin A. and Falaleev M.* Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.

**S. S. Orlov**

**The classical solutions of a singular differential-operator equation of the third order in Banach spaces**

**Abstract.** The theorem on sufficient conditions of unique existence of Cauchy problem classical solution for degenerate differential-operator equation of the third order in Banach spaces was proved in this paper. And also the explicit formulas of this solution were obtained.