Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 308—321

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.983

Нелинейные операторные уравнения с функциональным возмущением аргумента *

А. В. Труфанов (`atrufanov@mail.ru`)
Иркутский Государственный Университет

Аннотация. В статье рассмотрено нелинейное операторное уравнение с функциональным возмущением аргумента (ФВА). Указаны условия существования единственного аналитического решения. В нерегулярном случае, предлагается строить пучок решений в классе функций, представимых в виде логарифмо-степенных рядов. Показано, что число свободных параметров пучка решений зависит от свойств жордановой структуры операторных коэффициентов уравнения.

Ключевые слова: функциональное возмущение аргумента, жордановы наборы

Введение

Исследуются нелинейные операторные уравнений вида

$$A(t)x(t) - B(t)x(\alpha(t)) = R(x(t), x(\alpha(t)), t), \tag{0.1}$$

где $A(t), B(t)$ - линейные ограниченные оператор-функции в некоторой окрестности нуля, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, аналитические в окрестности нуля, оператор $A(0)$ непрерывно обратим, функция $\alpha(t)$ аналитическая в точке $t = 0$, $\alpha(0) = 0$, $|\alpha'(0)| < q < 1$.

При построении решения уравнения (0.1) возникает ряд задач по аналитическому решению линейных операторных уравнений с полиномиальной правой частью вида

$$Ax(z) - kBx(z + a) = P^m(z), \tag{0.2}$$

где A, B - линейные ограниченные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, числовой аргумент $z \in \mathtt{R}$,

* Работа выполнена при финансовой поддержке ИГУ (грант №111-02-000/7-05).

число $a \in \mathtt{R}$, правая часть

$$P^m(z) = \sum_{i=0}^{m} P_i^m z^i$$

определенный полином аргумента z степени m, коэффициенты $P_i^m \in E_2$ $i = \overline{1,m}$, искомое решение $x(z) \in E_1$.

В параграфах 1,2 приведено изучение уравнения (0.2). Уравнение (0.2) рассматривается, как в случае непрерывной обратимости оператора $A - kB$, так и в случае наличия у оператора $A - kB$ фредгольмовой особой точки и полного B-жорданового набора присоединенных элементов.

В параграфе 3 данной работы полученные результаты используются для построения решения нелинейных операторных уравнений (0.1) с нелинейным ФВА.

1. Регулярный случай, оператор $A - kB$ непрерывно обратим

Рассматривается задача (0.2). В случае непрерывной обратимости оператора $A - kB$, естественным шагом является построение решения $x(z)$ в виде полинома аргумента z степени m.

Лемма 1. *Пусть оператор $A - kB$ непрерывно обратим, тогда уравнение (0.2) имеет единственное решение вида*

$$x(z) = \sum_{i=0}^{m} x_i z^i. \tag{1.1}$$

Доказательство. Подставим решение (1.1) в уравнение (0.2) и путем несложных преобразований получим следующую последовательность

$$(A - kB)x_j = kB \sum_{i=j+1}^{m} \frac{i!}{j!(i-j)!} a^{i-j} x_i + P_j^m,\ j = 0, \dots, m. \tag{1.2}$$

В силу предположения обратимости оператора $A - kB$, все уравнения системы (1.2) разрешаются единственным образом. Для определения коэффициентов решения $x_m, \dots, x_1, x_0$ достаточно разрешать уравнения системы (1.2) последовательно, начиная с уравнения

$$(A - kB)x_m = P_m^m.$$

Таким образом, все коэффициенты решения $x_m, \dots, x_1, x_0$ определяются единственным образом. $\square$

2. Нерегулярный случай, оператор $A - kB$ фредгольмов

Пусть в уравнении (0.2) оператор $C \stackrel{\triangle}{=} A - kB$ фредгольмов.

Рассмотрение этого случая разобьем на три подслучая:
– оператор C не имеет B-присоединенных элементов,
– размерность пространств $dimN(C) = dimN(C^*) = 1$ и оператор C имеет B-жорданову цепочку длины p,
– оператор C имеет полный B-жорданов набор.

2.1. Оператор C не имеет B-присоединенных элементов

Пусть размерность $dimN(C) = dimN(C^*) = n$, элементы $\varphi_i, i = \overline{1,n}$ образуют базис пространства $N(C)$, элементы $\psi_j, j = \overline{1,n}$ образуют базис пространства $N(C^*)$, и

$$\mathbf{det}(< B\varphi_i, \psi_j >) \neq 0,\ i,j = \overline{1,n}. \tag{2.1}$$

Лемма 2. *Пусть $dimN(A - kB) = dimN((A - kB)^*) = n$, и оператор $A - kB$ не имеет B-присоединенных элементов, тогда уравнение (0.2) имеет решение вида*

$$x(z) = \sum_{i=0}^{m+1} x_i z^i, \tag{2.2}$$

зависящее от n произвольных постоянных, где коэффициенты x_{m+1}, $\ldots, x_1$ определяются единственным образом.

Доказательство. Подставим решение (2.2) в уравнение (0.2). Полученное равенство продифференцируем $m+1$ раз по z, полагая на каждом шаге $z = 0$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} Cx_{m+1} = 0 \\ Cx_m = kB(m+1)ax_{m+1} + P_m^m \\ \vdots \\ Cx_j = kB(\sum\limits_{s=j+1}^{m+1} \frac{s!}{(j)!(s-j)!} a^{s-j} x_s) + P_j^m, j = 2,3,\ldots,m-1 \\ \vdots \\ Cx_1 = kB(\sum\limits_{s=2}^{m+1} \frac{s!}{1!(s-1)!} a^{s-1} x_s) + P_1^m \\ Cx_0 = kB(\sum\limits_{s=1}^{m+1} \frac{s!}{0!s!} a^s x_s) + P_0^m \end{cases} \tag{2.3}$$

С учетом обозначения $\gamma_{i\,j} = k\frac{m+1-j!}{(m+1-i)!(i-j)!}a^{i-j}$, $i = \overline{1,m+1}$, $j = \overline{0,i-1}$ система уравнений (2.3) примет вид

$$\begin{cases} Cx_{m+1} = 0 \\ Cx_m = B(\gamma_{1\,0} x_{m+1}) + P^m_m \\ Cx_{m-1} = B(\gamma_{2\,0} x_{m+1} + \gamma_{2\,1} x_m) + P^m_{m-1} \\ \vdots \\ Cx_j = B(\gamma_{(m+1-j)\,0} x_{m+1} + \ldots + \gamma_{(m+1-j)\,(m-j)} x_{j+1}) + P^m_j \\ \vdots \\ Cx_1 = B(\gamma_{m\,0} x_{m+1} + \ldots + \gamma_{m\,m-1} x_2) + P^m_1 \\ Cx_0 = B(\gamma_{m+1\,0} x_{m+1} + \ldots + \gamma_{m+1\,m} x_1) + P^m_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Из первого уравнения системы (2.4) получим

$$x_{m+1} = c^1_1 \varphi_1 + \ldots + c^1_n \varphi_n.$$

Из второго уравнения системы (2.4) получим

$$x_m = c^2_1 \varphi_1 + \ldots + c^2_n \varphi_n + \gamma_{1\,0} \Gamma B \sum_{i=1}^{n} c^1_i \varphi_i + \Gamma P^m_m,$$

где Γ — оператор Шмидта[1] для оператора C.
Условие разрешимости второго уравнения имеет вид

$$\gamma_{1\,0} < B\varphi_1, \psi_j > c^1_1 + \ldots + < B\varphi_n, \psi_j > c^1_n = - < P^m_m, \psi_j >,\ j = 1, \ldots, n.$$

В силу условия (2.1) константы $c^1_1, \ldots, c^1_n$ определяются единственным образом.
Из третьего уравнения системы (2.4) получим

$$x_{m-1} = c^3_1 \varphi_1 + \ldots + c^3_n \varphi_n + (\Gamma B)\Big(\gamma_{2\,0} \sum_{i=1}^{n} c^1_i \varphi_i + \gamma_{2\,1} \sum_{i=1}^{n} c^2_i \varphi_i + \\ + \gamma_{2\,1}\gamma_{1\,0} \sum_{i=1}^{n} c^1_i \varphi_i + \gamma_{2\,1} \Gamma P^m_m\Big) + \Gamma P^m_{m-1}.$$

Условие разрешимости второго уравнения имеет вид

$$\gamma_{2\,1}\Big(< B\varphi_1, \psi_j > c^2_1 + \ldots + < B\varphi_n, \psi_j > c^2_n \Big) = \\ = - < B\Big(\gamma_{2\,0} \sum_{i=1}^{n} c^1_i \varphi_i + \gamma_{2\,1}\gamma_{1\,0} (\Gamma B) \sum_{i=1}^{n} c^1_i \varphi_i + \gamma_{2\,1}\gamma_{1\,0} \Gamma P^m_m + P^m_{m-1}\Big), \psi_j >, \\ j = 1, \ldots, n.$$

В силу условия (2.1) константы $c^2_1, \ldots, c^2_n$ определяются единственным образом.

Поскольку в уравнении для определения коэффициента x_j участвуют только коэффициенты $x_{j+1}, \ldots, x_{m+1}$, определенные на предыдущих шагах, то продолжая рассуждения можно выписать все оставшиеся коэффициенты решения. Условия разрешимости оставшихся уравнений системы (2.4) единственным образом определят константы $c_1^3, \ldots, c_n^3$, $\ldots, c_1^{m+1}, \ldots, c_n^{m+1}$, соответственно. Таким образом, коэффициент x_0 решения $x(z)$ будет зависеть от n свободных постоянных $c_1^{m+2}, \ldots, c_n^{m+2}$, а коэффициенты $x_1, \ldots, x_{m+1}$ решения определятся единственным образом. □

2.2. Оператор C имеет B-жорданову цепочку длины p

Пусть размерность $dimN(C) = dimN(C^*) = 1$, и оператор C имеет B-жорданову цепочку $\{\varphi^{(i)}\}_{i=1}^p$ длины p, т.е. выполняются равенства

$$C\varphi^{(1)} = 0; \quad C\varphi^{(i)} = B\varphi^{(i-1)},\ i = 2, \ldots, p \tag{2.5}$$

и

$$< B\varphi^{(i)}, \psi >= 0,\ i = 1, \ldots, p-1; \quad < B\varphi^{(p)}, \psi >\neq 0, \tag{2.6}$$

где функционал ψ такой, что $C^*\psi = 0$. Выберем, без ограничения общности, ψ так, чтобы $< B\varphi^{(p)}, \psi >= 1$.

Лемма 3. *Пусть $dimN(A - kB) = dimN((A - kB)^*) = 1$, и оператор $A - kB$ имеет B-жорданову цепочку длины p, тогда уравнение (0.2) имеет решение вида*

$$x(z) = \sum_{i=0}^{m+p} x_i z^i, \tag{2.7}$$

зависящее от p произвольных постоянных, где коэффициенты $x_{m+p}, \ldots, x_p$ определяются единственным образом.

Доказательство. Подставим решение (2.7) в уравнение (0.2). Полученное равенство продифференцируем $m + p$ раз по z, полагая на каждом шаге $z = 0$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} Cx_{m+p} = 0 \\ Cx_{m+p-1} = kB(m+p)ax_{m+p} \\ \vdots \\ Cx_{m+1} = kB(\sum\limits_{s=m+2}^{m+p} \frac{s!}{(m+1)!(s-(m+1))!} a^{s-(m+1)} x_s) \\ Cx_m = kB(\sum\limits_{s=m+1}^{m+p} \frac{s!}{(m)!(s-(m))!} a^{s-(m)} x_s) + P_m^m \\ \vdots \\ Cx_1 = kB(\sum\limits_{s=2}^{m+p} \frac{s!}{1!(s-1)!} a^{s-1} x_s) + P_1^m \\ Cx_0 = kB(\sum\limits_{s=1}^{m+p} \frac{s!}{0!s!} a^s x_s) + P_0^m \end{cases} \tag{2.8}$$

С учетом обозначения $\gamma_{i\,j} = k\frac{m+p-j!}{(m+p-i)!(i-j)!}a^{i-j}$, $i = \overline{1, m+p}$, $j = \overline{0, i-1}$ система уравнений (2.7) примет вид

$$\begin{cases} Cx_{m+p} = 0 \\ Cx_{m+p-1} = B(\gamma_{1\,0}x_{m+p}) \\ Cx_{m+p-2} = B(\gamma_{2\,0}x_{m+p} + \gamma_{2\,1}x_{m+p-1}) \\ \vdots \\ Cx_{m+1} = B(\gamma_{p-1\,0}x_{m+p} + \ldots + \gamma_{p-1\,p-2}x_{m+2}) \\ Cx_m = B(\gamma_{p\,0}x_{m+p} + \ldots + \gamma_{p\,p-1}x_{m+1}) + P_m^m \\ \vdots \\ Cx_1 = B(\gamma_{m+p-1\,0}x_{m+p} + \ldots + \gamma_{m+p-1\,m+p-2}x_2) + P_1^m \\ Cx_0 = B(\gamma_{m+p\,0}x_{m+p} + \ldots + \gamma_{m+p\,m+p-1}x_1) + P_0^m. \end{cases} \tag{2.9}$$

Будем разрешать уравнения системы (2.9) последовательно, начиная с уравнения

$$Cx_{m+p} = 0.$$

С учетом равенств (2.5), выпишем решение системы (2.9)

$$\begin{aligned} &x_{m+p} = c_1\varphi^{(1)} \\ &x_{m+p-1} = c_2\varphi^{(1)} + \underbrace{(\gamma_{1\,0}c_1)}_{\sigma_{m+p-1\,2}}\varphi^{(2)} \\ &x_{m+p-2} = c_3\varphi^{(1)} + \underbrace{(\gamma_{2\,0}c_1 + \gamma_{2\,1}c_2)}_{\sigma_{m+p-2\,2}}\varphi^{(2)} + \underbrace{(\gamma_{2\,1}\gamma_{1\,0}c_1)}_{\sigma_{m+p-2\,3}}\varphi^{(3)} \\ &x_{m+p-3} = c_4\varphi^{(1)} + \underbrace{(\gamma_{3\,0}c_1 + \gamma_{3\,1}c_2 + \gamma_{3\,2}c_3)}_{\sigma_{m+p-2\,2}}\varphi^{(2)} \\ &+ \underbrace{((\gamma_{3\,1}\gamma_{1\,0} + \gamma_{3\,2}\gamma_{2\,0})c_1 + \gamma_{3\,2}\gamma_{2\,1}c_2)}_{\sigma_{m+p-3\,3}}\varphi^{(3)} + \underbrace{(\gamma_{3\,2}\gamma_{2\,1}\gamma_{1\,0}c_1)}_{\sigma_{m+p-3\,4}}\varphi^{(4)} \\ &\vdots \\ &x_{m+1} = c_p\varphi^{(1)} + \sigma_{m+1\,2}\varphi^{(2)} + \ldots + \sigma_{m+1\,p}\varphi^{(p)} \\ &x_m = c_{p+1}\varphi^{(1)} + \sigma_{m\,2}\varphi^{(2)} + \ldots + \sigma_{m\,p}\varphi^{(p)} + \sigma_{m\,p+1}\Gamma B\varphi^{(p)+\Gamma P_m^m}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\sigma_{i\,j}$ - определенные линейные комбинации констант $c_1, \ldots, c_{(m+p-i)+(2-j)}$, $i = m+p-1, \ldots, 0$, $j = 2, 3, \ldots, (m+p+1-i)$, Γ - оператор Шмидта [1].

Заметим, что диагональные коэффициенты $\sigma_{i\,j}$, $i + j = m + p + 1$ определяются формулой

$$\sigma_{i\,j} = c_1 \prod_{s=1}^{j-1} \gamma_{s\,s-1} = c_1 \frac{(ak)^{m+p-i}(m+p)!}{i!}, \quad i + j = m + p + 1. \tag{2.11}$$

Условия разрешимости первых p уравнений системы (2.9) выпоняются при любом выборе констант $c_1, \ldots, c_p$ в силу равенств (2.6). Условие разрешимости $(p+1)$-го уравнения системы (2.9) имеет вид

$$< B(\gamma_{p\,0}x_{m+p} + \ldots + \gamma_{p\,p-1}x_{m+1}) + P_m^m, \psi >= 0. \tag{2.12}$$

С учетом равенств (2.6) условие (2.12) можно записать в виде

$$< \gamma_{p+1\,p}\sigma_{m+1\,p}B\phi^{(p)}, \psi >= - < P_m^m, \psi >,$$

$$< c_1\gamma_{p+1\,p}\gamma_{p\,p-1}\ldots\gamma_{1\,0}B\phi^{(p)}, \psi >= - < P_m^m, \psi >,$$

$$c_1\frac{(ak)^p(m+p)!}{m!} < B\phi^{(p)}, \psi >= - < P_m^m, \psi > .$$

Для разрешимости $(p+1)$-го уравнения системы (2.9) необходимо зафиксировать константу c_1 значением

$$c_1 = -\frac{m! < P_m^m, \psi >}{(ak)^p(m+p)!}. \tag{2.13}$$

Продолжая рассуждения можно выписать оставшиеся коэффициенты решения. Каждое из условий разрешимости последних m уравнений наложит условие на константы $c_2, \ldots, c_{m+1}$ соответственно. При этом решение будет зависеть от p произвольных постоянных $c_{m+2}, \ldots, c_{m+p+1}$. Так как коэффициенты $x_{m+p}, \ldots, x_p$ зависят только от констант $c_1, \ldots,$ c_{m+1}, то они будут определены единственным образом.

□

2.3. Оператор C имеет полный B-жорданов набор.

Пусть в уравнении (0.2) оператор $C \stackrel{\triangle}{=} A - kB$ фредгольмов, $dimN(C) = dimN(C^*) = n$, и оператор C имеет полный B-жорданов набор $\{\varphi_i^{(j)}\}, i = 1, \ldots, n\,, j = 1, \ldots, p_i$ т.е. выполняются равенства

$$C\varphi_i^{(1)} = 0; \quad C\varphi_i^{(j)} = B\varphi_i^{(j-1)},\ i = 1, \ldots, n\,, j = 2, \ldots, p_i \tag{2.14}$$

и

$$\mathbf{det}\| < B\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j > \|_{i,j=1}^{n\,n} \neq 0, \tag{2.15}$$

где функционалы $\psi_j,\ j = 1, \ldots, n$ образуют базис пространства нулей оператора C^*. Выберем, без ограничения общности, функционалы $\psi_j,\ j = 1, \ldots, n$ так, чтобы

$$< B\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j >= \delta_{i\,j},\ i, j = 1, \ldots, n,$$

где $\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}$ - символ Кронекера.

Лемма 4. *Пусть оператор $A - kB$ фредгольмов и выполняются равенства (2.14),(2.15), тогда уравнение (0.2) имеет решение вида*

$$x(z) = \sum_{i=0}^{m+p} x_i z^i, \tag{2.16}$$

где $p = max\{p_i\},\ i = 1, \ldots, n$, зависящее от $k = p_1 + \ldots + p_i$ произвольных постоянных.

Доказательство. Общий ход доказательства утверждения леммы 4 аналогичен ходу доказательства утверждения леммы 3. □

3. Нелинейные операторные уравнения с ФВА.

Рассмотрим уравнение

$$A(t)x(t) - B(t)x(\alpha(t)) = R(x(t), x(\alpha(t)), t), \tag{3.1}$$

где $A(t), B(t)$ - линейные ограниченные оператор-функции в некоторой окрестности нуля, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 аналитические в окрестности нуля, функция $\alpha(t)$ аналитическая в точке $t = 0$ и

$$\alpha(0) = 0, \quad |\alpha'(0)| < q < 1. \tag{3.2}$$

Пусть оператор A(0) непрерывно обратим,

$$A(0) \neq 0,\ B(0) \neq 0. \tag{3.3}$$

В силу условий (3.2) и аналитичности функции $\alpha(t)$ всегда можно выбрать окрестность нуля $|t| \leq \rho_1$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\alpha(t)| < q|t|. \tag{3.4}$$

Зафиксируем число $0 < q_1 < 1$ и выберем окрестность нуля $|t| \leq \rho_2$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\|A(t) - A(0)\| \leq \frac{q_1}{\|A(0)^{-1}\|}. \tag{3.5}$$

В силу аналитичности оператор-функции $A(t)$ в смысле Фреше, это всегда можно сделать. Тогда в этой окрестности нуля существует оператор $A(t)^{-1}$ и выполняется следующая оценка его нормы

$$\|A(t)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q_1}\|A(0)^{-1}\|. \tag{3.6}$$

Действительно, запишем оператор $A(t)$ в виде

$$A(t) = A(0) + A(t) - A(0) = A(0)\left[I + A(0)^{-1}(A(t) - A(0))\right].$$

Будем строить оператор $A(t)^{-1}$ в виде

$$A(t)^{-1} = \left[I + A(0)^{-1}(A(t) - A(0))\right]^{-1} A(0)^{-1}.$$

В силу неравенства (3.5) и утверждения теоремы об операторе $(I - C)^{-1}$[1] оператор $\left[I + A(0)^{-1}(A(t) - A(0))\right]^{-1}$ существует и его норму можно оценить неравенством

$$\| \left[I + A(0)^{-1}(A(t) - A(0))\right]^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - q_1}.$$

Так неравенство (3.6) справедливо в окрестности $|t| \leq \rho_2$.

Пусть норма $\|B(0)\| < h$, тогда, в силу аналитичности оператор-функции $B(t)$, существует окрестность нуля $|t| \leq \rho_3$ в которой выполняется оценка

$$\|B(t)\| < h. \tag{3.7}$$

Пусть нелинейное отображение $R(x(t), x(\alpha(t)), t) : E_1 \times E_1 \times [-T, T] \to E_2$ является аналитическим по всем своим аргументам в окрестности точки $(0, 0, 0)$, пусть

$$R(x(0), x(0), 0) = 0, \tag{3.8}$$

и

$$\frac{\partial R(x(t), x(\alpha(t)), t)}{\partial x(t)}|_{(0,0,0)} = \frac{\partial R(x(t), x(\alpha(t)), t)}{\partial x(\alpha(t))}|_{(0,0,0)} = 0.$$

Тогда отображение $R(x(t), x(\alpha(t)), t)$ можно представить в виде

$$R(x(t), x(\alpha(t)), t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k \sum_{i+j\geq 0}^{\infty} R_{ijk} x(t)^i x(\alpha(t))^j. \tag{3.9}$$

Нашей задачей является построение решения уравнения (0.1) в заданной окрестности нуля $|t| \leq \rho$, где $\rho = min(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$.

Лемма 5. *Зафиксируем число $0 < q_2 < 1$ и выберем число Q так, чтобы выполнялось неравенство*

$$\frac{q^Q h\|A(0)^{-1}\|}{1 - q_1} \leq q_2. \tag{3.10}$$

Пусть существует функция $x^*_Q(t)$ такая, что выполняется оценка

$$\|A(t)x^*_Q(t) - B(t)x^*_Q(t) - R(x^*_Q(t), x^*_Q(\alpha(t)), t)\| = o(t^Q), \quad t \to 0, \tag{3.11}$$

тогда существут числа $\rho > 0,\ r > 0$ такие, что в окрестности $|t| < \rho$ уравнение (0.1) имеет решение вида

$$x(t) = x_Q^*(t) + t^Q V(t), \tag{3.12}$$

где функция $V(t) \to 0$, при $t \to 0$ и выполняется оценка

$$\|V\| \overset{def}{=} \max_{|t|\le\rho} \|V(t)\|_{E_1} \le r. \tag{3.13}$$

Доказательство. Подставив решение (3.12) в уравнение (0.1) получим равенство

$$\begin{gathered} A(t)x_Q^*(t) + t^Q A(t)V(t) - B(t)x_Q^*(\alpha(t)) - \alpha(t)^Q B(t)V(\alpha(t)) = \\ = R(x_Q^*(t) + t^Q V(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V(\alpha(t)), t). \end{gathered} \tag{3.14}$$

Поскольку в окрестности $|t| \le \rho$ существует ограниченный обратный оператор $A(t)^{-1}$, то запишем равенство (3.14) в виде

$$V(t) = \Phi(V(t), t), \tag{3.15}$$

где

$$\begin{gathered} \Phi(V(t), t) = \tfrac{\alpha(t)^Q}{t^Q} A(t)^{-1} B(t) V(\alpha(t)) - \tfrac{A(t)^{-1}}{t^Q}\big(A(t)x_Q^*(t) - \\ -B(t)x_Q^*(\alpha(t)) - R(x_Q^*(t) + t^Q V(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V(\alpha(t)), t)\big). \end{gathered} \tag{3.16}$$

Покажем, что отображение $\Phi(V(t), t)$ является сжимающим. Действительно,

$$\begin{gathered} \|\Phi(V_2(t), t) - \Phi(V_1(t), t)\| = \tfrac{|\alpha(t)|^Q}{|t|^Q} \|A(t)^{-1}B(t)\| \|V_2(\alpha(t)) - V_1(\alpha(t))\| - \\ - \tfrac{\|A(t)^{-1}\|}{|t|^Q} \|R(x_Q^*(t) + t^Q V_2(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V_2(\alpha(t)), t) - \\ - R(x_Q^*(t) + t^Q V_1(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V_1(\alpha(t)), t)\|. \end{gathered} \tag{3.17}$$

В силу условий (3.2) и выбора окрестности нуля $|t| < \rho$ выполняется неравенство

$$\mathop{max}_{|t|\le\rho} \|V_2(\alpha(t)) - V_1(\alpha(t))\| \le \mathop{max}_{|t|\le\rho} \|V_2(t) - V_1(t)\| = \|V_2 - V_1\|. \tag{3.18}$$

В силу условий (3.4),(3.6),(3.7) и выбора окрестности нуля $|t| \le \rho$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\alpha(t)}{t}\right|^Q \|A(t)^{-1}B(t)\| \le \frac{q^Q h \|A(0)^{-1}\|}{1 - q_1} \le q_2 < 1, \quad |t| \le \rho. \tag{3.19}$$

В силу нелинейности правой части R и её гладкости по своим аргументам можно получить оценку

$$\begin{gathered} \tfrac{\|A(t)^{-1}\|}{|t|^Q} \|R(x_Q^*(t) + t^Q V_2(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V_2(\alpha(t)), t) - \\ - R(x_Q^*(t) + t^Q V_1(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V_1(\alpha(t)), t)\| = \\ \le \|\tilde{R}(V_1(t), V_1(\alpha(t)), V_2(t), V_2(\alpha(t)), t)\| \cdot \|V_2 - V_1\|, \end{gathered} \tag{3.20}$$

где

$$\|\tilde{R}(V_1(t), V_1(\alpha(t)), V_2(t), V_2(\alpha(t)), t)\| = o(1), \quad t \to 0. \tag{3.21}$$

Выбрав окрестность нуля $|t| \le \rho_4$ обеспечим выполнение неравенства

$$\|\tilde{R}(V_1(t), V_1(\alpha(t)), V_2(t), V_2(\alpha(t)), t)\| < \frac{1-q_2}{2}. \tag{3.22}$$

Тогда, при $|t| \le min(\rho, \rho_4)$, с учетом (3.18), (3.19), (3.20), (3.22) получим

$$\|\Phi(V_2(t), t) - \Phi(V_1(t), t)\| \le \Big(\frac{1+q_2}{2}\Big)\|V_2 - V_1\|. \tag{3.23}$$

Покажем, что отображение $\Phi(V(t), t)$ не выводит нас из шара $\|V\| \le r$. Воспользуемся неравенством треугольника

$$\|\Phi(V(t), t)\| \le \|\Phi(V(t), t) - \Phi(0, t)\| + \|\Phi(0, t)\|. \tag{3.24}$$

В силу условия леммы (3.11), отображение $\Phi(0, t) \to 0$ при $t \to 0$. Выберем число $\rho_5 > 0$ так, чтобы при $|t| < \rho_5$ выполнялось неравенство

$$\|\Phi(0, t)\| \le (1 - \frac{1+q_2}{2})r.$$

Следовательно,

$$\|\Phi(V(t), t)\| \le \frac{1+q_2}{2} \max_{|t|<min(\rho,\rho_4)} \|V(t)\| + (1 - \frac{1+q_2}{2}) \max_{|t|<\rho_5} \|V(t)\|. \tag{3.25}$$

Положим $\rho = min(\rho, \rho_4, \rho_5)$, тогда

$$\|\Phi(V(t), t)\| \le \max_{|t|<\rho} \|V(t)\| = r. \tag{3.26}$$

Таким образом, отображение $\Phi(V(t), t)$ является сжимающим в шаре $\|V\| \le r$, при $|t| < \rho$ и функция $V(t)$ может быть построена последовательными приближениями вида

$$\begin{aligned} &V_n(t) = \Phi(V_{n-1}(t), t), n = 1, 2, \ldots, \\ &V_0(t) = 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

□

Определение 1. Функцию $x_Q^*(t)$ будем называть асимптотикой порядка Q решения $x(t)$ уравнения (0.1), если выполняется оценка

$$\|x(t) - x_Q^*(t)\| = o(t^Q), \quad t \to 0.$$

Асимптотику $x_Q^*(t)$ будем строить в виде

$$x_Q^*(t) = \sum_{s=1}^{Q} x_s(ln|t|)t^s. \tag{3.28}$$

Поскольку выполняются условия (3.2), то при малом t справедливы равенства

$$\begin{aligned} &\alpha(t) = \alpha'(0)t + (\alpha(t) - \alpha'(0)t), \\ &ln|\alpha(t)| = ln|\alpha'(0)| + ln|t| + ln(1 + \tfrac{\alpha(t)-\alpha'(0)t}{\alpha'(0)t}) = \\ &\quad = ln|\alpha'(0)| + ln|t| + \beta_1 t + \beta_2 t + \ldots, \end{aligned} \tag{3.29}$$

где числа β_i являются коэффицинтами разложения

$$\beta(t) \stackrel{\triangle}{=} ln(1 + \frac{\alpha(t) - \alpha'(0)t}{\alpha'(0)t})$$

в ряд Маклорена.

Подставим представление асимптотики (3.28) в уравнение (0.1), учтем равенства (3.29) и получим

$$\begin{aligned} &A(0) \sum_{s=1}^{Q} x_s(ln|t|)t^s + (A(t) - A(0)) \sum_{s=1}^{Q} x_s(ln|t|)t^s - \\ &-B(0) \sum_{s=1}^{Q} x_s(ln|\alpha'(0)| + ln|t| + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots) \\ &(\alpha'(0)t + (\alpha(t) - \alpha'(0)t))^s - -(B(t) - B(0)) \sum_{s=1}^{Q} x_s(ln|\alpha(t)|)\alpha(t)^s = \\ &= R(\sum_{s=1}^{Q} x_s(ln|t|)t^s, \sum_{s=1}^{Q} x_s(ln|\alpha(t)|)\alpha(t)^s, t). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Уравнения для определения коэффициентов $x_i(ln|t|)$ асимптотики $x_Q^*(t)$ можно выделить или при помощи метода неопределенных коэффициентов, или по следующей формуле

$$\begin{aligned} &A(0)x_i(z) - \alpha'(0)^i B(0)x_i(ln|\alpha'(0)| + z) = \\ &= \tfrac{1}{i!}\tfrac{\partial^i}{\partial t^i}\Big((A(0) - A(t)) \sum_{s=1}^{i-1} x_s(z)t^s + \\ &+B(0) \sum_{s=1}^{i} x_s(ln|\alpha'(0)| + z + \beta(t))(\alpha(t))^s - \\ &\quad -B(0)\alpha'(0)^i t^i x_i(ln|\alpha'(0)| + z + \beta(t)) + \\ &+(B(t) - B(0)) \sum_{s=1}^{i-1} x_s(ln|\alpha'(0)| + z + \beta(t))\alpha(t)^s + \\ &+R(\sum_{s=1}^{i-1} x_s(z)t^s, \sum_{s=1}^{i-1} x_s(ln|\alpha'(0)| + z + \beta(t))\alpha(t)^s, t)\Big)\Big|_{t=0}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{3.31}$$

где $z = ln|t|$.
Заметим, что правая часть зависит от коэффициентов, определенных на предыдущих шагах $s = 0, 1, \ldots, i-1$, и имеет вид некоторого полинома аргумента $ln|t|$.
Проводя данную процедуру дифференцирования, мы выделяем те члены равенства (3.30), которые соответствуют членам порядка t^i, при разложении соответствующих функций, вектор-функций, и отображений в ряды Тейлора.

Для решения уравнения (3.31) мы можем применить утверждения лемм 1-4 из первого раздела и определить значение коэффициента $x_i(ln|t|)$.

Зафиксируем $0 < q_2 < 1$ и найдем такое число Q членов асимптотики, чтобы в окрестности $|t| < \rho$ выполнялось неравенство

$$|\frac{\alpha(t)}{t}|^Q \|A(t)^{-1}B(t)\| \leq \frac{q^Q h\|A(0)^{-1}\|}{1-q_1} < q_2 < 1,$$

тогда на основании утверждения леммы 5 исходное уравнение (0.1) имеет локальное решение вида

$$x(t) = x_Q^*(t) + t^Q V(t),$$

где функция $V(t) \to 0$ при $t \to 0$ и может быть построена последовательными приближениями вида (3.27).

Теорема 1. *Пусть оператор $A(0)$ непрерывно обратим, выполняются равенства $\alpha(0) = 0$, $|\alpha'(0)| < q < 1$, $R(x(0), x(0), 0) = 0$, входящие в (0.1) $\alpha(t)$, $A(t), B(t)$, $R(x(t), x(\alpha(t)), t)$ обладают достаточной гладкостью в некоторой окрестности нуля, и число $\lambda = 0$ является регулярной точкой или изолированной фредгольмовой точкой семейства операторов*

$$\tilde{C}(i) \stackrel{\triangle}{=} A(0) + (\lambda - \alpha'(0)^i)B(0),\ i = 1, 2, \ldots, \tag{3.32}$$

то уравнение (0.1) имеет решение вида

$$x(t) = x_Q^*(t) + t^Q v(t). \tag{3.33}$$

Если при всех $i = 1, 2, \ldots$ число $\lambda = 0$ является регулярной точкой оператора $\tilde{C}(i)$, то асимптотика решения $x_Q^*(t)$ имеет вид полинома аргумента t степени Q, построенное решение является единственным.
Если хотя бы при одном из чисел $j \in 1, 2, \ldots$ число $\lambda = 0$ является изолированной фредгольмовой точкой оператора $\tilde{C}(j)$, то решение уравнения (0.1) представляет собой пучок указанного числа параметров

и

$$x_Q^*(t) = \sum_{i=1}^{j-1} x_i t^i + \sum_{i=j}^{Q} x_i(ln|t|)t^i, \qquad (3.34)$$

где $x_i(ln|t|)$ *конечные полиномы аргумента* $ln|t|$.

Список литературы

1. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. — М:, 1986.
2. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решенийнелинейных уравнений. — М:Наука, 1969.
3. *Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н., Труфанов А.В.* Построение обобщенных решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // Вестник МАГУ Математика . — 2005., № 8. — С. 123–138.
4. *Сидоров Н.А., Труфанов А.В.* Структура решений линейных операторных уравнений с функциональным возмущением аргумента // Труды Средневолжского Математического общества. — 2006. — Т. 1, № 8. — С. 104–109.

A. V. Trufanov

Nonlinear operator equations with functionally modified argument

Abstract. Nonlinear operator equation with functionally modified argument is considered. It is shown under which conditions the only analytical solution exists. In irregular case we have a branch of solutions and any solution from the branch has a logariphmic-polinomial approximation. It is shown that the number of free parameters of a branch of solutions depends on equation coefficients Jordan structure.