Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 236—244

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.946

Исследование нелинейного нелокального параболического уравнения, моделирующего диффузию плазмы поперек магнитного поля

Г. А. Рудых (`rudykh@icc.ru`)
ИДСТУ СО РАН, г. Иркутск

Аннотация. Изучается простейшая транспортная математическая модель баланса плотностей плазмы и нейтральных частиц в установке типа токамак, сводящаяся к начально-краевой задаче для параболического уравнения второго порядка с неявным вырождением, содержащего нелокальные (интегральные) операторы. Задача о стабилизации нестационарных решений к соответствующим стационарным сведена к исследованию разрешимости нелинейной интегродифференциальной краевой задачи.Получены достаточные условия на параметры изучаемой краевой задачи, обеспечивающие существование и единственность классического стационарного решения, для которого конструктивно построена область притяжения.

Ключевые слова: краевая задача, нелокальные операторы, верхнее и нижнее решения, область притяжения, диффузия плазмы.

Введение

Многие задачи математического моделирования в физике плазмы, например, изучение диффузии ограниченной плазмы поперек магнитного поля и ее равновесных конфигураций в установке типа токамак, приводят к необходимости исследования нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих нелокальные (интегральные) операторы [1, 2].

Диффузия плазмы через магнитное поле изучалась в работах [3, 4] и описывается, в общем случае, нелинейными вырождающимися параболическими уравнениями второго порядка [5] вида

$$u_t = \triangle g(u) + f(\lambda, u), \quad (t, x) \in \Re^+ \times \Omega, \tag{1}$$

$$u = 0, \ \ (t,x) \in \Re^+ \times \partial\Omega, \ \ u = u_0, \ \ (t,x) \in \{0\} \times \Omega,$$

где $\Re^+ = (0,\infty); \Omega \subset \Re^n$ — открытое ограниченное подмножество с границей $\partial\Omega$ класса $C^{2+\alpha}$; $\alpha \in (0,1)$; $g : \bar{\Re}^+ \to \bar{\Re}^+$ — непрерывная возрастающая функция; $\bar{\Re}^+ = [0,\infty)$; $g(0) = 0$; g^{-1} непрерывна по Гёльдеру; g или g^{-1} локально непрерывна по Липшицу; $f : \Re \times \bar{\Re}^+ \to \Re$ — непрерывная функция; $f(\lambda,\cdot)$ локально непрерывна по Липшицу; $f(\lambda,0) = 0$ для $\lambda \in \Re$; $u_0 \in L^\infty_+(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega) : u(x) \geq 0$ для почти всех $x \in \Omega\}$.

Определение 1. Под решением задачи (1) на $[0,T], T > 0$, понимается функция $u \in C([0,T]; L_1(\Omega)) \bigcap L^\infty(Q_T)$, $Q_T = \Omega \times (0,T]$ такая, что

$$\int\limits_\Omega u(t)\varphi(t)dx - \iint\limits_{Q_t} (u\varphi_t + g(u)\triangle\varphi)dxdt =$$

$$= \int\limits_\Omega u_0\varphi(0)dx + \iint\limits_{Q_t} f(\lambda,u)\varphi dxdt, \tag{2}$$

для всех $\varphi \in C^2(\bar{Q}_t)$, $\varphi \geq 0$, $\varphi = 0$ на $\sum_T = \partial\Omega \times (0,T]$, $t \in [0,T]$.

Под решением задачи (1) на $\bar{\Re}^+$ понимается решение последней на $[0,T]$ для любого $T > 0$. Верхнее (нижнее) решение начально-краевой задачи (1) определяется аналогично посредством замены в (2) знака равенства на знак неравенства $\geq$ $(\leq)$. Под решением стационарной задачи

$$-\triangle g(u) = f(\lambda,u), \ \ x \in \Omega, \ \ u = 0, \ \ x \in \partial\Omega, \tag{3}$$

понимается функция $u \in L^\infty(\Omega)$ такая, что

$$-\int\limits_\Omega g(u)\triangle\varphi dx = \int\limits_\Omega f(\lambda,u)\varphi dx, \ \ \lambda \in \Re,$$

для любой функции $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$, $\varphi \geq 0$ в Ω, $\varphi = 0$ на $\partial\Omega$. Аналогично, как и для (1), определяются верхнее и нижнее решения краевой задачи (3). Так как g^{-1} непрерывна по Гёльдеру, то любое решение задачи (3) является классическим в том смысле, что $v = g(u) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ — классическое решение краевой задачи

$$-\triangle v = h(\lambda,v), \ \ x \in \Omega, \ \ v = 0, \ \ x \in \partial\Omega, \tag{4}$$

где $h : \Re \times \bar{\Re}^+ \to \Re$; $h(\lambda,v) = f(\lambda, g^{-1}(v)) = f(\lambda,\cdot) \circ g^{-1}(v)$.

Вопросы существования, единственности, сравнения и стабилизации неотрицательных решений задачи (1) изучались в работах [5, 6]. В частности, в [6] установлено, что начально-краевая задача (1) имеет единственное для $t \in [0,T]$ решение $u(u_0,t)$, причем $u(u_0,t) \geq 0$ для $t \in [0,T]$. Кроме того, доказан следующий результат

Теорема А. *Пусть $u_1 \in L^\infty_+(\Omega)(u_2 \in L^\infty_+(\Omega))$ — нижнее (верхнее) решение стационарной задачи (3), $0 \le u_1 \le u_2$. Тогда соответствующее решение $u(u_1,t)$ $(u(u_2,t))$ нестационарной задачи (1) является неубывающей (невозрастающей) функцией t почти всюду в Ω, имеет место цепочка неравенств*

$$u_1 \le u(u_1,t) \le u(u_2,t) \le u_2, \;\; t \in \bar{\Re}^+,$$

и $u(u_1,t)$, $u(u_2,t)$ сходятся при $t \to +\infty$ (в $C(\bar{\Omega})$, если $dim\Omega = 1$, или в $L^p(\Omega)$, $p \ge 1$, если $dim\Omega \ge 2$) монотонно соответственно к пределам u_*, u^*, которые являются минимальным, максимальным стационарными решениями задачи (3) на множестве $K = \{u \in L^\infty_+(\Omega) : 0 \le u_1 \le u \le u_2\}$.

Итак, асимптотическое поведение решений задачи (1) определяется множеством ее стационарных решений и сводится к изучению его структуры. В случае, когда удается доказать единственность стационарного решения, тогда верхнее и нижнее решения задают область притяжения в пространстве начальных данных. Однако, в настоящее время, как известно [7, 8], не существует достаточно общих критериев единственности неотрицательных решений задач вида (4). Единственность можно гарантировать, если отображение $f(\lambda,\cdot)\circ g^{-1}(v)$ монотонно.

Наконец, отметим, что основными методами исследования уравнений вида (4) являются [9–12]: метод обыкновенных дифференциальных уравнений, вариационные методы, метод верхних и нижних решений, метод априорных оценок и, так называемый, метод теорем типа Лиувилля.

В этой работе исследуется разрешимость нелинейного операторного уравнения

$$Lu = F(x,u,z), \;\; u \in D(L), \tag{5}$$

с граничными условиями общего вида, входящими в оператор L, где L — непрерывно обратимый дифференциальный оператор; $F : \Omega \times \Re^1 \times \Re^1 \to \Re$ – непрерывная функция своих аргументов; $\Omega \subset \Re^1$; $z = Tu$; T — непрерывный нелинейный оператор (возможно, что T – интегральный оператор типа Вольтерра или Фредгольма), действующий из $C(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega})$; $F(x,\cdot,z)$ локально непрерывна по Липшицу и $F(x,u,T(\cdot))$ — монотонный оператор.

В качестве L можно рассматривать, например, либо равномерно эллиптический, либо обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка. Однако, предложенный подход применим и к параболическим операторам. При этих предположениях доказывается существование классического решения задачи (5). Помимо этого, получены достаточные условия, обеспечивающие единственность ее решения.

При получении этих результатов используется модификация классических методов теории монотонных операторов в частично упорядоченных пространствах [7] для случая парных неподвижных точек [8] в сочетании с техникой верхних и нижних решений [6, 9].

1. Теорема существования решения краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу (5), где L — непрерывно обратимый дифференциальный оператор. Как отмечалось выше, в качестве L можно взять равномерно эллиптический оператор, определенный на ограниченной выпуклой области $\Omega \subset \Re^n$, граница которой $\partial\Omega$ принадлежит классу $C^{2+\alpha}$ для некоторого $\alpha \in (0,1)$, то есть

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \tag{6}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) \leq \nu,$$

для всех $x \in \Omega$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Re^n$; $\mu, \nu \in \Re^+$ — константы эллиптичности; $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$; $c(x) \geq 0$. Краевая задача (5), (6) является базовой при математическом моделировании равновесных конфигураций ограниченной плазмы в установках типа токамак [13, 14].

В этом разделе изучается разрешимость двухточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального оператора

$$Lu \equiv -(a(x)u')' + b(x)u = F(x,u,z), \ x \in (0,1), \tag{7}$$

с граничными условиями

$$L_i u \equiv \alpha_i u(i) + (-1)^{i+1}\beta_i u'(i) = \gamma_i, \tag{8}$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \Re$; $i = 0,1; a(x) \geq 0; \quad b(x) \geq 0$. Пусть F — непрерывная функция, $z = Tu$ – непрерывный, возможно, нелинейный оператор, действующий из $C[0,1]$ в $C[0,1]$, где $C[0,1]$ — пространство вещественнозначных непрерывных функций с sup-нормой. Ниже предполагается, что T — монотонный оператор, то есть для любых $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1]$ таких, что $0 \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$, имеем $T\varphi \leq T\psi$, если T — возрастающий оператор, либо $T\varphi \geq T\psi$, если T — убывающий оператор. Для определенности будем считать, что T — убывающий оператор.

Пусть заданы функции $v_0(x), w_0(x) \in C[0,1]$ такие, что $0 \leq v_0(x) \leq w_0(x)$. Посредством $[v_0, w_0]$ будем обозначать множество $\{u(x) \in C[0,1] : v_0(x) \leq u(x) \leq w_0(x)\}$ и называть его порядковым интервалом [15].

Предположим, что функция $F(x,u,z)$ для всех $u \in [v_0, w_0]$, $z \in [Tw_0, Tv_0]$, $x \in (0,1)$ обладает следующими свойствами: **(1)** F

не убывает по z; **(2)** $F(x,u,z)$ непрерывно дифференцируема по u на $[v_0, w_0]$; **(3)** для любого $\tau \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$\tau F(x,u,T(\tau u)) < F(x,\tau u, Tu).$$

Отметим, что в силу условия **(2)** существует $M(v_0, w_0) \geq 0$, такое, что $\frac{\partial}{\partial u} F \geq -M$, $F + Mu \geq 0$. Причем, если F убывает по u, то M можно положить равной нулю.

Определение 2. Решением задачи (7), (8) назовем функцию $u(x) \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1]$, удовлетворяющую уравнению (7) и граничным условиям (8).

Пусть оператор L непрерывно обратим, тогда этим же свойством, в силу неотрицательности M, обладает оператор $L+M$. Далее, предположим, что помимо **(1)**, **(2)**, **(3)** выполнено условие: **(4)** оператор $(L+M)^{-1}$ является u_0 – положительным [7], то есть найдется такой ненулевой элемент $u_0 \in C[0,1]$, $u_0 > 0$, что для любого ненулевого элемента $u \in C[0,1]$, $u > 0$ можно указать числа $\alpha(u) > 0$, $\beta(u) > 0$, при которых выполняется цепочка неравенств

$$\alpha(u) u_0 \leq (L+M)^{-1} u \leq \beta(u) u_0.$$

Определение 3. Функции $v_0, w_0 \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1]$, удовлетворяющие соотношениям

$$Lv_0 \leq F(x, v_0, Tw_0), \ \ L_i v_0 = 0 \ (Lw_0 \geq F(x, w_0, Tv_0), \ \ L_i w_0 \geq 0),$$

назовем нижним (верхним) квазирешением задачи (7), (8), где $i = 0, 1$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* **(1)**. *Тогда краевая задача (7), (8) имеет, по крайней мере, одно решение* $u(x) \in [v_0, w_0]$.

2. Теорема единственности решения краевой задачи

Для доказательства единственности решения исследуемой краевой задачи (7), (8), введем в рассмотрение линейное уравнение

$$Lu + Mu = F(x, \eta, T\mu) + M\eta \equiv G(x, \eta, \mu), \tag{9}$$

где $\eta, \mu \in C[0,1]$. Далее определим отображение $A : C[0,1] \times C[0,1] \to C[0,1]$, которое ставит в соответствие каждой паре $(\eta, \mu) \in [v_0, w_0] \times [v_0, w_0]$ единственное решение

$$u = A(\eta, \mu); \ \ \eta, \mu \in C[0,1], \tag{10}$$

краевой задачи (9), (8).

Утверждение 1. *Пусть A — отображение, определяемое формулой (10). Пусть выполнены условия* **(2)**, **(4)**. *Тогда справедливы следующие свойства:* **(a)** $v_0 \leq A(v_0, w_0), w_0 \geq A(w_0, v_0)$; **(b)** $A(\eta, \mu)$ *не убывает по* η *и не возрастает по* μ; **(c)** A *является* u_0 *– положительным.*

Теорема 2. *Пусть для* $F : (0,1) \times \Re^2 \to \Re$ *выполнены условия* **(1)**, **(2)**, **(3)**, **(4)**. *Тогда краевая задача (7), (8) имеет единственное решение* $u(x) \in [v_0, w_0]$.

3. Математическая модель баланса плотностей плазмы в установке типа токамак и свойства ее стационарных решений

В общем случае математическая модель, описывающая эволюционный процесс в тороидальной плазме, обладающей аксиальной симметрией, представляет собой двумерную задачу. Однако благодаря существенному различию (на несколько порядков) характерных времен переноса вдоль и поперек магнитных поверхностей, ее удается достаточно хорошо описать в рамках одномерных моделей, получивших название транспортных [16]. Их основу составляет система диффузионных уравнений [17], выражающих баланс частиц и энергии плазмы на каждой магнитной поверхности. Причем снижение размерности изучаемой задачи достигается за счет усреднения исследуемых величин и потоков по магнитным поверхностям, отражающего высокую скорость продольного перемещения. Наконец, отметим, что диффузионные модели идеально приспособлены для изучения эволюции плазмы и полоидального магнитного поля в аксиально-симметричных тороидальных замкнутых конфигурациях типа токамак.

Рассмотрим простейшую транспортную модель баланса плотностей плазмы и нейтральных частиц в установке типа токамак

$$n_t = \frac{\alpha}{x}(xnn_x)_x + \gamma\rho n - n, \tag{11}$$

$$(x\rho_k)_x = (-1)^k x\rho_k n, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1, \ k = 0, 1, \tag{12}$$

с начальным $n(x,t)|_{t=0} = n_0(x) \geq 0$ и граничными условиями

$$xn_x|_{x=0} = n|_{x=1} = 0, \tag{13}$$

$$x(\rho_0 - \rho_1)|_{x=0} = 0, \quad \rho_0|_{x=1} = 1. \tag{14}$$

Здесь $n(x,t)$ — плотность плазмы; $\rho_0(x)$ и $\rho_1(x)$ — плотность летящих со стенок к оси и встречных, соответственно, инжектируемых нейтральных частиц; $\rho(x)$ – полная плотность нейтралов в плазме; x — радиус магнитной поверхности; $\alpha > 0$ — коэффициент диффузии плазмы поперек магнитного поля; $\gamma > 0$ — мощность инжекции. Известно [16], что инжекция в установку токамак (поперек магнитного поля) пучка нейтралов высокой энергии является одним из методов дополнительного нагрева плазмы.

Исследуемая нелинейная начально-краевая задача содержит одну пространственную переменную x и соответствует цилиндру с трансляционной и круговой симметриями. Причем трансляционная симметрия отражает аксиальную симметрию исходного тора, а круговая – процедуру усреднения в перпендикулярном сечении. Кроме того, предполагается, что на поверхности, с которой происходит инжекция, задан поток нейтралов, а плотность плазмы равна нулю.

Исключая из системы (11), (12), с учетом граничных условий (14), функцию ρ, приходим к уравнению

$$n_t = \frac{\alpha}{x}(xnn_x)_x + \left[\frac{2\gamma}{x}e^{-\int_0^1 n(s,t)ds}\mathrm{ch}\int_0^x n(s,t)ds - 1\right]n. \qquad (15)$$

Стационарный аналог уравнения (15)

$$-\frac{\alpha}{x}(xnn')' = \left[\frac{2\gamma}{x}e^{-\int_0^1 nds}\mathrm{ch}\int_0^x nds - 1\right]n, \qquad (16)$$

нагруженного граничными условиями (13), является предметом исследования настоящего раздела, где $n' = \frac{d}{dx}n(x)$.

Итак, рассмотрим краевую задачу (16), (13)

$$-(xu')' = \lambda(\xi Tu - x)u^{1/2} \equiv \lambda F(x,u,Tu), xu'|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \qquad (17)$$

где $u = n^2; \xi = 2\gamma; \lambda = 2/\alpha$;

$$Tu = \exp\Big(-\int_0^1 u^{1/2}ds\Big)\mathrm{ch}\Big(\int_0^x u^{1/2}ds\Big). \qquad (18)$$

С использованием теоремы 2 показана разрешимость исследуемой интегродифференциальной краевой задачи (17), (18).

Другими словами, построены нижнее и верхнее квазирешения $v_0, w_0 \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1]$ такие, что выполняются условия **(1)-(4)**.

При этом v_0, w_0 имеют вид

$$v_0 = \nu^2 J_0(\eta_0^{1/2}x),\ \nu \equiv const,\ w_0 = a^2 \equiv const, \qquad (19)$$

если выполняются соотношения

$$\nu \le \lambda(\xi e^{-a} - 1)/\eta_0,\ \xi\lambda \le a \le \ln\xi. \qquad (20)$$

Здесь η_0 – главное собственное значение краевой задачи Штурма-Лиувилля

$$Lz \equiv -(xz')' = \eta xz,\ \ 0 < x < 1,\ \ xz'|_{x=0} = z|_{x=1} = 0,$$

решение которой $z(x) = J_0(\eta_0^{1/2} x)$ хорошо известно [18], где $J_0(\eta_0^{1/2} x)$ — функция Бесселя; $\max J_0 = 1, J_0 > 0$ при $x \in [0, 1)$.

Теорема 3. *Пусть функции v_0, w_0, определяемые согласно (19), являются нижним и, соответственно, верхним квазирешениями, $0 \leq v_0 \leq w_0$. Пусть выполнены неравенства (20). Пусть $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \xi/(2 - \xi)$ и x_i – вещественный корень уравнения*

$$\exp x_i = \xi_i(1 - x_i), \quad i = 1, 2. \tag{21}$$

Пусть выполнено одно из условий: **(5)** *если $1 < \xi \leq 2/(1 - e^{-2})$, то $a \leq \min\{x_1, x_2/2\}$, (при $\xi > 2$, x_2 – наименьший из корней уравнения (21) для $i = 2$);* **(6)** *если $\xi > 2/(1 - e^{-2})$, то $a \leq x_1$. Тогда краевая задача (17), (18) обладает единственным решением $u(x) \in [v_0, w_0]$, монотонно убывающим по x. Пусть, помимо этого, $n(n_0(x), t)$ – решение задачи (15), (13) с начальным условием*

$$n(n_0(x), 0) = n_0(x), \ n_0(x) \in [\nu J_0^{1/2}(\eta_0^{1/2} x), a], \ n_0(x) \in L_+^\infty(0, 1).$$

Тогда $|x^{1/2}(n(n_0(x), t) - u^{1/2}(x))| \to 0$ равномерно по x при $t \to +\infty$.

Доказательство следует из теорем **A** и 2. Причем в теореме **A** считаем, что $x(u^2)_x \in L_+^\infty(0, 1)$. Монотонность стационарного решения $n(x)$, удовлетворяющего неравенству

$$\nu J_0(\eta_0^{1/2} x) \leq n(x) \leq a, \tag{22}$$

следует из оценки $0 < \xi \exp(-a) - 1 \leq \xi T u - x$, зависимости $u = n^2$ и принципа максимума, где Tu определяется формулой (18).

Итак, получены достаточные условия на параметры ξ, λ, при выполнении которых существует единственное стационарное решение $n(x)$ краевой задачи (16), (13), удовлетворяющее неравенству (22). Кроме того, в пространстве начальных данных конструктивно построена область притяжения стационарного решения.

Список литературы

1. *Carrilo J.A.* On non-local elliptic equation with decreasing nonlinearity arising in plasma physics and heat conduction // Nonliear analysys TMA. — 1998. — V. 32. — P. 97–115.
2. *Ferone A., Jalal M., Rakotoson J., Volpicelli R.* A topological approach for generalized nonlocal models for a confiner plasma in a tokamak // Comm. Appl. Anal. — 2001. — V. 5, № 1. —P. 159–181.
3. *Hyman J., Rosenau P.* Analysis of nonlinear parabolic equations modelling plasma diffusion across a magnetic field // Lectures in Applied Mathematics. — 1986. — V. 23. — P. 219–245.

4. *Rosenau P., Hyman J.* Plasma diffusion across a magnetic field // Phys. D. — 1986. — V. 20. — P. 444–446.
5. *Калашников А.С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. — 1987. — Т. 42, № 2. — С. 135–176.
6. *De Mottoni P., Schiaffino A., Tesei A.* Attractivity properties of nonnegative solutions for a class of nonlinear degenerate parabolic problems // Ann. Math. Pura Appl. — 1984. — V. 20, № 10. — P. 1001–1022.
7. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962. —394с.
8. *Guo D., Lakshmikantham V.* Nonlinear problems in abstract cones. — London: Academic Press, 1988. —275p.
9. *Похожаев С.И.* Об уравнениях вида $\triangle u = f(x, u, Du)$ // Матем. сборник. — 1980. — Т. 113, № 2. — С. 324–338.
10. *Похожаев С.И.* Об эллиптических задачах в R^n с суперкритическим показателем нелинейности // Матем. сборник. — 1991. — Т. 182, № 4. — С. 467–489.
11. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. — М.: Наука, 2001. —383с.
12. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Лиувиллевы теоремы для некоторых нелинейных нелокальных задач // Докл. РАН. — 2004. — Т. 399, № 6. — С. 732–736.
13. *Bandle C.* A priori estimates and the boundary value of solutions for a problem arising in plasma physics // Nonl. Anal. TMA. — 1983. — V. 7, № 4. — P. 439–451.
14. *Rakotoson J.* Un modéle non local en physique des plasmas: résolution par une méthode de degré topologique // Acta Appl. Math. — 1985. — V. 4, № 1. — P. 1–14.
15. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. — М.: Мир, 1983. —431с.
16. *Днестровский Ю.Н., Костамаров Д.П.* Математическое моделирование плазмы. — М.: Наука, 1982. —319с.
17. *Хоган Дж.Т.* Многокомпонентные модели переноса в токамаке // Вычислительные методы в физике. Управляемый термоядерный синтез. — М.: Мир, 1980. — С. 142–177.
18. *Владимиров В.С.* уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. —512с.

G. A. Rudykh

The investigation of a nonlinear unlocal parabolic equation simulating the diffusion of plasma across the magnetic field

Abstract. In this paper we investigate the simplest transport mathematical model of plasma density and neutral particles balance in the Tokamak device, which can be reduced to the initial-boundary problem for a parabolic equation of the second order with implicit degeneration containing unlocal (integral) operators. The problem of stabilization of nonstationary solutions to stationary solutions is reduced to the investigation of the solvability of a nonlinear integrodifferential boundary value problem. The sufficient conditions on parametrs of a boundary value problem which has the unique classic stationary solution with the defined range of attraction are obtained.