Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 291—302

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.956

Обобщенное решение смешанной задачи для полулинейной гиперболической системы с суммируемыми по Лебегу входными данными *

В. А. Терлецкий (terletsky@math.isu.ru)
Иркутский государственный университет, г. Иркутск

Аннотация. Рассматривается гиперболическая система полулинейных (линейный дифференциальный оператор, нелинейная правая часть) дифференциальных уравнений со смешанными условиями достаточно общего вида. Предлагается сравнительно простой способ построения обобщенного решения.

Ключевые слова: обобщенное решение, гиперболическая система, интегральный эквивалент, характеристики

Введение

Актуальность проблемы построения обобщенного решения для гиперболических систем дифференциальных уравнения во многом и, пожалуй, в первую очередь объясняется их многочисленными приложениями в газо- и гидродинамике, в описании процессов тепломассопереноса, горения, химических реакций и т.п. В прикладных задачах запаса классических решений, т.е. непрерывных и непрерывно-дифференцируемых, недостаточно ввиду, как правило, разрывности начальных и граничных условий, а также значений дифференциального оператора в области независимых переменных. Подчеркнем, что в задачах оптимального управления, в которых процесс описывается гипреболическими системами, решение, как правило, может рассматриваться лишь в обобщенном смысле, т.к. в этих задачах оно не является не только гладким, но и просто непрерывным. Ориентируясь в первую очередь на изучение задач оптимального управления, имеет смысл в основу построения

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 05-01-00187, 06-01-81016.

обобщенного решения среди других многочисленных подходов положить интегральный эквивалент гиперболической системы. Именно такой прием позволяет получить наиболее сильное обобщенное решение, обладающее поточечными оценками роста относительно вариаций как в начально-граничных условиях, так и в правой части гиперболической системы.

Однако, схема вывода обобщенного решения, идущая от интегрального эквивалента, обладает существенным недостатком. Обоснование сжимающего свойства интегрального оператора и, следовательно, сходимости последовательных приближений к обобщенному решению, требует громоздких выкладок. Более того, ее не удается применить к нестрого гиперболическим системам и очень проблематично использовать для многомерного варианта гиперболических систем.

В настоящей статье предлагается простой способ решения указанной проблемы. Показывается, что обобщенное решение, основанное на интегральном эквиваленте дифференциальной системы , легко строится для случая существенно ограниченных входных данных. При этом не используется предположение о строгой гиперболичности дифференциальной системы, допустим любой уровень сложности смешанных условий. Схема доказательства вполне применима для многомерных гиперболических систем. Показано, каким образом можно использовать данный прием для построения обобщенного решения в случае лишь суммируемых по Лебегу входных данных.

1. Постановка смешанной задачи

В прямоугольнике $\Pi = S \times T$, $S = (s_0, s_1)$, $T = (t_0, t_1)$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений с частными производными

$$x_t + A(s,t)x_s = f(x,s,t), \tag{1.1}$$

в которой $x = x(s,t)$ – искомое n-мерное вещественное решение, $A = A(s,t)$ – заданная матричная функция размера $n \times n$; $f = f(x,s,t)$ – заданная n-мерная векторная функция.

Систему (1.1) будем считать гиперболической. Для этого, как известно, ([1], с. 23), следует предположить, что все собственные значения $\lambda_i = \lambda_i(s,t)$, $i = 1,2,...,n$ матрицы A являются вещественными в Π функциями с одинаковой алгебраической и геометрической кратностью. Последнее равносильно ([2], с.58) существованию в каждой точке $(s,t) \in \Pi$ базиса в пространстве R^n из левых $\mathcal{L} = (l^{(1)}, l^{(2)}, ..., l^{(n)})$ и правых $\mathcal{P} = (p^{(1)}, p^{(2)}, ..., p^{(n)})$ собственных векторов матрицы A со свойствами $\mathcal{L}^\top A = \Lambda \mathcal{L}^\top$, $A\mathcal{P} = \mathcal{P}\Lambda$, $\mathcal{L}^\top \mathcal{P} = E$. Здесь $^\top$ – знак транспонирования, $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, $E = \mathrm{diag}\{1,1,...,1\}$.

Дополнительно предположим, что все элементы матриц $\Lambda, \mathcal{L}$ и $\mathcal{P}$ являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями в замыкании $\bar{\Pi}$ области Π.

Перейдем к постановке смешанных условий для системы (1.1). С этой целью определим на границе $\partial\Pi = \bar{\Pi} \setminus \Pi$ прямоугольника Π функции $z_i = z_i(s,t)$, положив

$$z_i(s,t) = v_0(s,t) + \lambda_i(s,t)v(s,t),\ (s,t) \in \partial\Pi,\ i = 1,2,\ldots,n,$$

где $v_0 = v_0(s,t)$, $v = v(s,t)$ – компоненты вектора единичной внешней нормали к границе $\partial\Pi$. За исключением угловых точек прямоугольника Π они определяются однозначно: $v_0 = (-1)^{j+1},\ v = 0,\ s \in S, t = t_j; v_0 = 0; v = (-1)^{j+1},\ s = s_j,\ t \in T,\ j = 0,1$. По функциям z_i построим двузначные функции $z_i^{\pm}$, положив

$$z_i^{\pm}(s,t) = \operatorname{sign}\, z_i(s,t)[\operatorname{sign}\, z_i(s,t) \pm 1]/2,\ i = 1,2,\ldots,n,\ (s,t) \in \partial\Pi.$$

Сконструируем диагональные матрицы $Z^- = \operatorname{diag}\{z_1^-, z_2^-, \ldots, z_n^-\}$, $Z^+ = \operatorname{diag}\,\{z_1^+, z_2^+, \ldots, z_n^+\}$, $Z^{\pm} = Z^- + Z^+$. Тогда [3,4] для системы (1.1) будут корректными смешанные условия

$$Z^-(s,t)[\mathcal{L}^\top(s,t)x(s,t) - q(Z^+\mathcal{L}^\top x, \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(Z^{\pm}\mathcal{L}^\top x, \tau)d\tau, s.t)] = 0,\ (s,t) \in \partial\Pi, \tag{1.2}$$

в которых вектор-функция $q = q(x,y,s,t)$ задана в области $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \times \partial\Pi$.

Поясним смысл смешанных условий (1.2). Во-первых, отметим, что матрица Z^- всюду на верхней границе прямоугольника Π, т.е. при $t = t_1$, равна нулю и, напротив, на нижней границе $t = t_0$ совпадает с единичной. Это означает, что решение x свободно от каких-либо условий на верхней границе Π, но полностью закреплено связью $x = \mathcal{P}q$ на нижней границе. На боковых границах $s = s_0$ и $s = s_1$ прямоугольника Π картина более разнообразна. Здесь в точке (s,t) скалярное произведение $< l^{(i)}, x >$ должно совпадать с значением функции q_i, если $\lambda_i(s,t) > 0$, и ничем не регламентируется в случае $\lambda_i(s,t) \le 0,\ i = 1,2,\ldots,n$.

Во-вторых, подчеркнем, что первые два аргумента вектор-функции q не существенны на нижней границе области Π. Действительно, здесь влияние первого аргумента нейтрализуется тождеством $Z^+(s,t_0) = 0$, а второго – равенством $t = t_0$. На боковых же границах они могут моделировать разнообразные функциональные и динамические связи для решения x. Первый аргумент $Z^+\mathcal{L}^\top x$ формируется линейными комбинациями $< l^{(i)}, x >$, соответствующими отрицательным собственным значениям λ_i, а второй аргумент позволяет подчинять линейные комбинации решения x обыкновенным дифференциальным уравнениям, правая часть которых заведомо не зависит от координат образа $\mathcal{L}^\top x$, отвечающих нулевым собственным значениям.

Укажем предположения на входные данные f, q при которых будет строится обобщенное решение x задачи (1.1),(1.2).

Вектор-функции f, q и φ удовлетворяют условию Липшица по переменным x, y при фиксированных значениях независимых переменных s, t. А именно, выполняются неравенства

$$\begin{gathered} ||f(x+\Delta x, s, t) - f(x, s, t)|| \le L||\Delta x||,\ (s,t) \in \Pi, \\ ||q(x+\Delta x, y+\Delta y, t) - q(x, y, t)|| \le L(||\Delta x|| + ||\Delta y||), \\ ||\varphi(x+\Delta x, t) - \varphi(x, t)|| \le L||\Delta x||,\ t \in T, \end{gathered} \tag{1.4}$$

для произвольных $x, \Delta x \in \mathrm{R}^n,\ y, \Delta y \in \mathrm{R}^m$ с константой $L > 0$.

При фиксированных значениях $x \in \mathrm{R}^n,\ y \in \mathrm{R}^m$ вектор-функции f, q, и φ суммируемы по Лебегу с некоторой степенью $\mathrm{p} \ge 1$:

$$f(x, \cdot, \cdot) \in L^n_{\mathrm{p}}(\Pi),\ q(x, y, \cdot, \cdot) \in L^n_{\mathrm{p}}(\partial\Pi),\ \varphi(x, \cdot) \in L^m_{\mathrm{p}}(T).$$

2. Интегральный эквивалент

Введем в рассмотрение инварианты Римана $r = r(s,t),\ r(s,t) \in \mathrm{R}^n$, воспользовавшись линейным невырожденным преобразованием

$$r(s,t) = \mathcal{L}^\top(s,t)x(s,t),\ x(s,t) = \mathcal{P}(s,t)r(s,t). \tag{2.1}$$

Если x – классическое (непрерывное и непрерывно-дифференцируемое в $\bar{\Pi}$) решение системы (1.1), то r удовлетворяет [3,4] инвариантной системе

$$r_t + \Lambda r_s = g(r, s, t), \tag{2.2}$$

в которой $g(r,s,t) = \mathcal{L}^\top(f(\mathcal{P}r, s, t) - (\mathcal{P}_t + A\mathcal{P}_s)r)$.

Преимуществом инвариантной системы (2.2) по сравнению с исходной системой является простота ее дифференциального оператора. В каждое уравнение системы (2.2) ввиду диагональности матрицы Λ входят производные только одного инварианта $r_i,\ i = 1, 2, ..., n$. Это обстоятельство позволяет рассматривать выражение $r_{i_t} + \lambda_i r_{i_s}$ как полную производную функции $r_i(s^{(i)}(\xi, \tau; t), t)$ по переменной t при условии, что функция $s^{(i)}(\xi, \tau; t)$ является интегральной кривой обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{ds}{dt} = \lambda_i(s,t),\ i = 1, 2, ..., n \tag{2.3}$$

со свойством $s^{(i)}(\xi, \tau; t) = \xi$ при $\tau = t$.

Уравнения (2.3) принято называть характеристическими уравнениями системы (1.1), а интегральные кривые $s^{(i)}(\xi,\tau;t)$ – характеристиками.

Пусть $(\check{s}^{(i)},\check{t}^{(i)}) = (\check{s}^{(i)}(s,t),\check{t}^{(i)}(s,t)) \in \partial\Pi$ – начальная точка i-ой характеристики, выпущенной из точки $(s,t) \in \Pi$ в обратном времени так, что $\check{t}^{(i)}(s,t) < t$. Тогда результатом интегрирования каждого дифференциального уравнения инвариантной системы (2.2) вдоль соответствующей характеристики будет система интегральных уравнений типа Вольтерра

$$r_i(s,t) = r_i(\check{s}^{(i)},\check{t}^{(i)}) + \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} g_i(r, s^{(i)}(s,t,\tau),\tau)d\tau,\ i=1,2,...,n,\ (s,t)\in\bar{\Pi}. \tag{2.4}$$

Здесь первое слагаемое определяется по правилу

$$r_i(\check{s}^{(i)},\check{t}^{(i)}) = \begin{cases} q_i(0,0,\check{s}^{(i)},t_0),\ \check{t}^{(i)}(s,t)=t_0,\\ q_i(Z^{+}\mathcal{L}^{\top}x, \int\limits_{t_0}^{\check{t}^{(i)}} \varphi(Z^{\pm}\mathcal{L}^{\top}x(\check{s}^{(i)},\tau),\tau)d\tau, \check{s}^{(i)},\check{t}^{(i)}),\ \check{t}^{(i)}(s,t)>t_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

В свою очередь, гладкие решения интегральной системы (2.4),(2.5) удовлетворяют [3,4] инвариантной системе (2.2).

Решение интегральной системы (2.4), (2.5) можно объявить обобщенным решением инвариантной системы (2.2) с соответствующими смешанными условиями, а обобщенным решением исходной задачи (1.1), (1.2) считать связанную с ним преобразованием (2.1) вектор-функцию x. Именно такая схема построения обобщенного решения использовалась в [3]. Однако, ничто не мешает рассматривать инвариантную систему (2.2) и вытекающую из нее интегральную систему (2.4), (2.5) как промежуточные результаты и пройти через них транзитом от задачи (1.1),(1.2) к ее интегральному варианту, имеющему вид

$$x(s,t) = \sum_{i=1}^{n} p^{(i)}(s,t)[r_i(\check{s}^{(i)}(s,t),\check{t}^{(i)}(s,t)) + \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)} g_i(\mathcal{L}^{\top}x, s^{(i)}(s,t;\tau),\tau)d\tau]. \tag{2.6}$$

Эквивалентность интегральной системы (2.5),(2.6) смешанной задаче (1.1)-(1.3) на гладких решениях и отсутствие в ней производных от решения x позволяет дать

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) назовем вектор-функцию x, удовлетворяющую почти всюду в Π интегральной системе (2.6) и почти всюду на $\partial\Pi$ равенствам (2.5).

Идея доказательства существования и единственности обобщенного решения заключается в установлении сжимаемости отображения, стоящего в правой части равенства (2.6). Обозначим его оператором $X = X(q, \varphi, f; x)$. Тогда обобщенное решение есть неподвижная точка отображения X.

Существование и единственность такой точки x обоснуем методом последовательных приближений. Для этого построим последовательность функций $\{x^{(k)}\}, k = 0, 1, ...$, положив

$$x^{(k+1)} = X(q, \varphi, f; x^{(k)}), \tag{2.7}$$

начиная с $x^{(0)} = 0$. Понятно, что для сходимости последовательных приближений достаточно доказать сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \delta^{(k)}$, если положить

$$\delta^{(k+1)}(s,t) = \begin{cases} ||x^{(k+1)}(s,t) - x^{(k)}(s,t)||, \ (s,t) \in \Pi, \\ ||Z_j^{\pm}(s,t)(x^{(k+1)}(s,t) - x^{(k)}(s,t))||, \ (s,t) \in \partial\Pi. \end{cases}$$

Отправной точкой здесь служит неравенство

$$\begin{gathered} \delta^{(k+1)}(s,t) \leq K \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} \delta^{(k)}(s^{(i)}(s,t;\tau),\tau) d\tau + \right. \\ + \int\limits_{t_0}^{\check{t}^{(i)}(s,t)} [\sum_{j=1}^{n} Z_j^{+}(\check{s}^{(i)}, \check{t}^{(i)}) \delta^{(k)}(s^{(j)}(\check{s}^{(i)}(s,t), \check{t}^{(i)}(s,t);\tau),\tau) + \\ \left. + \delta^{(k)}(\check{s}^{(i)}(s,t);\tau)] d\tau \right\}, \end{gathered} \tag{2.8}$$

являющееся следствием условий Липшица (1.4) с константой $K > 0$, зависящей только от константы L и матрицы A. Отметим, что неравенство (2.8) справедливо лишь для "малых" интервалов T, т.к. предполагает наличие не более, чем одного "отражения" характеристик от боковых границ. Для этого достаточно считать, что

$$t_1 - t_0 \leq (\max_{i=1,2,...,n} \max_{(s,t)\in\bar{\Pi}} |\lambda_i(s,t)|)^{-1}(s_1 - s_0).$$

Однако, такое ограничение не обременительно. Его всегда можно выполнить, разбив интервал T на "малые" интервалы. Понятно, что построение обобщенного решения на каждом последующем интервале проводится в точности так же, как и на самом первом.

3. Построение обобщенного решения строго гипреболической системы

Упростим рассматриваемую задачу, предположив, что система (1.1) является строго гиперболической ([5], с.13), или гиперболической в узком смысле ([1], с.26, [6], с.77). Тогда существует число $d > 0$, при котором справедливы неравенства

$$|\lambda_i(s,t) - \lambda_j(s,t)| \geq d > 0, \ i \neq j, \ i,j = 1,2,\dots,n, \ (s,t) \in \bar{\Pi}. \tag{3.1}$$

В принципе, сделанного предположения достаточно для получения всех результатов данного параграфа. Но, стремясь максимально просто и выпукло изложить сжимающее свойство отображения X и тем самым обосновать сходимость метода последовательных приближений (2.7), дополнительно упростим и смешанные условия (1.2). Будем считать вектор-функцию q зависящей только от переменных $(s,t) \in \partial\Pi$. Фактически это означает, что смешанное условие (1.2) превращается в обычное условие Коши для соответствующего инварианта Римана, которое задано в начальной точке характеристики, находящейся на боковой границе области Π. Тогда неравенство (2.8) примет более простой вид

$$\delta^{(k+1)}(s,t) \leq K \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} \delta^{(k)}(s^{(i)}(s,t;\tau),\tau)d\tau, \ k = 0,1,\dots, \ (s,t) \in \bar{\Pi}. \tag{3.2}$$

Применив здесь однократное рекуррентное усиление, будем иметь при $k = 1,2,\dots, \ (s,t) \in \bar{\Pi}$ неравенства

$$\delta^{(k+1)}(s,t) \leq K^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} (\int\limits_{\check{t}^{(i)}(\xi,\tau)}^{\tau} \delta^{(k-1)}(s^{(j)}(\xi,\tau;\alpha),\alpha)d\alpha)|_{\xi = s^{(i)}(s,t;\tau)} d\tau. \tag{3.3}$$

Последующие подстановки оценки (3.2) в неравенство (3.3), по-видимому, лишены смысла, т.к. приводят лишь к наращиванию кратности интегралов в нем. Однако, преодолеть эту трудность позволяет свойство (3.1).

Заменим переменную τ на новую переменную ζ, положив при $i \neq j, \ i,j = 1,2,\dots,n$

$$\zeta = s^{(j)}(s^{(i)}(s,t;\tau),\tau;\alpha). \tag{3.4}$$

Тогда

$$d\zeta = [s_\tau^{(j)}(\xi,\tau;\alpha) + s_\xi^{(j)}(\xi,\tau;\alpha)s_\tau^{(i)}(s,t;\tau)]|_{\xi = s^i(s,t;\alpha)} d\tau.$$

Воспользуемся здесь тождеством [3, с.10]

$$s_\tau^{(j)}(\xi,\tau;\alpha) + \lambda_j(\xi,\tau)s_\xi^{(j)}(\xi,\tau;\alpha) \equiv 0, \ j = 1,2,\dots,k, \ (\xi,\tau) \in \bar{\Pi}, \ \alpha \in T$$

и уравнением (2.3) для характеристики $\xi = s^{(i)}(s,t;\tau)$. Получим равенство

$$d\tau = [(\lambda_i(\xi,\tau) - \lambda_j(\xi,\tau))s_\xi^{(j)}(\xi,\tau;\alpha)]^{-1}d\zeta. \tag{3.5}$$

Оно показывает, что для непрерывности и гладкости замены переменных(3.4) свойство (3.1) является необходимым условием. Второе такое необходимое условие, а именно, отделимость от нуля частной производной $s_\xi^{(j)}(\xi,\tau;\alpha)$ при заданных предположениях на собственные значения λ_j матрицы A системы (1.1) выполняется всегда. В [3] показано, что существует константа $b > 0$, обеспечивающая при всех $j = 1, 2, \ldots, n$ и всех $(\xi,\tau) \in \bar{\Pi}$, $(s^{(j)}(\xi,\tau;\alpha),\alpha) \in \bar{\Pi}$ неравенства

$$s_\xi^{(j)}(\xi,\tau;\alpha) \geq b. \tag{3.6}$$

Нетрудно видеть, что новая переменная ζ при фиксированном значении α изменяется на интервале

$$co\{s^{(i)}(s,t;\tau), s^{(j)}(s,t;\tau)\} \cap S.$$

Далее для определенности будем считать, что

$$\lambda_i > \lambda_j \text{ и } (s^{(i)}(s,t;\tau), s^{(j)}(s,t;\tau)) \subset S$$

при всех $\tau \in (t_0, t)$. Тогда в силу (3.4)-(3.6) при всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq j$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} \Big(\int\limits_{\check{t}^{(i)}(\xi,\tau)}^{\tau} \delta^{(k-1)}(s^{(j)}(\xi,\tau;\alpha),\alpha)d\alpha\ \Big)\Big|_{\xi=s^{(i)}(s,t;\tau)} d\tau = \\
&= \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} \int\limits_{s^{(i)}(s,t;\alpha)}^{s^{(j)}(s,t;\alpha)} \frac{\delta^{(k-1)}(\xi,\alpha)d\zeta d\alpha}{(\lambda_i(\xi,\tau)-\lambda_j(\xi,\tau))s_\xi^{(j)}(\xi,\tau;\alpha)} \leq \\
&\leq \frac{1}{ab} \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} \int\limits_{s^{(i)}(s,t;\alpha)}^{s^{(j)}(s,t;\alpha)} \delta^{(k-1)}(\zeta,\alpha)d\zeta d\alpha.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Любой треугольник $G_{ij}(s,t)$, служащий областью интегрирования в правой части неравенств (3.7), всегда входит в область $G(s,t)$ определенности решения x в точке (s,t), которая строится, как известно [1], по правилу

$$G(s,t) = \{(\xi,\tau) \in \Pi : \ s_{\min}(s,t;\tau) \leq \xi \leq s_{\max}(s,t;\tau), \ \tau \in T\}.$$

Здесь кривые $\xi = s_{\min}(s,t;\tau)$ и $\xi = s_{\max}(s,t;\tau)$ являются интегральными кривыми дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \begin{cases} \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \lambda_i(\xi,\tau), \ \xi \in S, \\ 0, \ \xi = s_0, \ \xi = s_1, \end{cases}$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \begin{cases} \min\limits_{i=1,2,\ldots,n} \lambda_i(\xi,\tau),\ \xi \in S, \\ 0,\ \xi = s_0,\ \xi = s_1 \end{cases}$$

соответственно.

Вследствие указанного свойства области G и неотрицательности подынтегральной функции справедливы неравенства

$$\int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} \int\limits_{s^{(i)}(s,t;\alpha)}^{s^{(j)}(s,t;\alpha)} \delta^{(k-1)}(\xi,\alpha)d\xi d\alpha \le \iint\limits_{G(s,t)} \delta^{(k-1)}(\xi,\tau)d\xi d\tau \tag{3.8}$$

при всех $i \neq j,\ i,j = 1,2,\ldots,n$. Неравенства (3.8) устанавливают единообразную оценку для всех двойных интегралов из неравенства (3.3) при $i \neq j,\ i,j = 1,2,\ldots,n$.

Обратимся теперь к случаю $i = j$. Тогда в силу очевидного свойства $s^{(i)}(s^{(i)}(s,t;\tau),\tau;\alpha) = s^{(i)}(s,t;\alpha)$ двойной интеграл превращается в повторный по интервалу $(\check{t}^{(i)}(s,t),t)$. Нетрудно показать, что для любого номера $j = 1,2,\ldots$ выполняется тождество

$$\begin{gathered} \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{\tau} (t-\alpha)^{j-1}\delta^{(k-j)}(s^{(i)}(s,t;\alpha),\alpha)d\alpha d\tau \le \\ \le \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} \frac{(t-\alpha)^j}{j}\delta^{(k-j)}(s^{(i)}(s,t;\alpha),\alpha)d\alpha. \end{gathered} \tag{3.9}$$

На основании формул (3.7)-(3.9) неравенство (3.3) при $k = 1$ может быть преобразовано к виду

$$\begin{gathered} \delta^{(2)}(s,t) \le K^2[\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} \delta^{(0)}(s^{(i)}(s,t;\tau),\tau)d\tau + \\ + \frac{n(n-1)}{ab} \iint\limits_{G(s,t)} \delta^{(0)}(\xi,\tau)d\xi d\tau]. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Описанная схема позволяет "подниматься" по номерам $k = 2,3,\ldots$ в неравенстве (3.2), опираясь на тождество (3.9) и оценку (3.10). На произвольном шаге k будем иметь

$$\begin{gathered} \delta^{(k)}(s,t) \le K^k[\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(0)}(s^{(i)}(s,t;\tau),\tau)d\tau + \\ + \frac{(k-1)(t-t_0)^{k-2}}{(k-2)!ab} \iint\limits_{G(s,t)} \delta^{(0)}(\xi,\tau)d\xi d\tau]. \end{gathered} \tag{3.11}$$

В свою очередь, приращение δ^0 удовлетворяет оценке

$$\begin{gathered} \delta^{(0)}(s,t) = ||x^{(1)}(s,t)|| \le K_1 \sum_{i=1}^{n} [||q(0,0,\check{s}^{(i)}(s,t),\check{t}^{(i)}(s,t))|| + \\ + \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} ||f(0,s^{(i)}(s,t;\tau),\tau)||d\tau]. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Здесь константа $K_1 > 0$ зависит только от матрицы A системы (1.1).

Пусть вектор-функция x есть предел последовательности $\{x^k\}$, или, что то же $x(s,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(x^{(k+1)}(s,t) - x^{(k)}(s,t))$. Тогда, очевидно,

$$||x(s,t)|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{(k)}(s,t).$$

Оценив сумму ряда с помощью неравенств (3.11),(3.12), получим итоговую оценку для решения x в точках $\bar{\Pi}$ в виде

$$||x(s,t)|| \leq K_2(\sum_{i=1}^{n}[||q(0,0,\check{s}^{(i)}(s,t),\check{t}^{(i)}(s,t))|| + \int\limits_{\check{t}^{(i)}(s,t)}^{t} ||f(0,s^{(i)}(s,t;\tau),\tau)||d\tau] +$$
$$+ \int\limits_{\partial\Pi\cap\partial G(s,t)} ||q(0,0,\xi,\tau)||d\omega + \iint\limits_{G(s,t)} ||f(0,\xi,\tau)||d\xi d\tau). \tag{3.13}$$

Здесь константа $K_2 > 0$ зависит только от констант $K, K_1, n, a, b, t_1 - t_0$, а интеграл по участку границы $\partial\Pi \cap \partial G$ является интегралом первого рода, т.е. $d\omega = \sqrt{d\tau^2 + d\xi^2}$.

Нетрудно показать, что функция, стоящая в правой части неравенства (3.13) суммируема по Лебегу в области Π со степенью p и имеет суммируемые в S со степенью p следы при любом фиксированном $t \in T$. Поэтому обобщенное решение x существует и единственно в $L^n_{\mathrm{p}}(\Pi)$ и удовлетворяет оценке роста (3.13).

4. Построение обобщенного решения при существенно ограниченных входных данных

Как мы видели, результаты предыдущего параграфа существенно используют предположение (3.1) о строгой гиперболичности системы (1.1). Здесь мы откажемся от ограничения (3.1), заменив его на условие существенной ограниченности входных данных задачи (1.1),(1.2). А именно, будем считать, что для любых $x \in \mathrm{R}^n,\ y \in \mathrm{R}^m$

$$f(x,\cdot,\cdot) \in L^n_\infty(\Pi),\ q(x,y,\cdot,\cdot) \in L^n_\infty(\partial\Pi),\ \varphi(x,\cdot) \in L^m_\infty(T). \tag{4.1}$$

В этом случае все последовательные приближения $x^k,\ k = 1,2,\ldots$, построенные методом (2.7) будут также существенно ограниченными в Π, что позволяет ввести в рассмотрение функции

$$w^{(k)}(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in\bar{S}} \delta^{(k)}(s,t),$$

определенные на интервале T при всех $k = 0,1,\ldots$.

Из неравенства (2.8) следует, что

$$w^{(k+1)}(t) \le K_3 \int\limits_{t_0}^{t} w^{(k)}(\tau)d\tau, \tag{4.2}$$

где $K_3 = K(n^2/2 + 2)$.

Условия (4.1) и (4.2) обеспечивают существование и единственность обобщенного решения x, удовлетворяющего оценке

$$||x||_{L^n_\infty(\Pi)} \le K_4(||\varphi(0,\cdot)||_{L^m_\infty(T)} + ||q(0,0,\cdot,\cdot)||_{L^n_\infty(\partial\Pi)} + ||f(0,\cdot,\cdot)||_{L^n_\infty(\Pi)})$$

с некоторой константой K_4, зависящей только от K_1, K_3 и $(t_1 - t_0)$.

Таким образом, для существенно ограниченных входных данных задачи (1.1), (1.2) построение обобщенного решения выглядит намного проще, чем в случае входных данных лишь суммируемых по Лебегу с некоторой степенью р ≥ 1. Более того, здесь не требуется отделимости всюду в замкнутом прямоугольнике $\bar\Pi$ любых двух собственных значений λ_i и λ_j, $i \ne j$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, т.е. не используется условие (3.1).

5. Обоснование существования обобщенного решения в общем случае

Займемся построение обобщенного решения задачи (1.1),(1.2), считая выполненными только предположения первого параграфа.

Введем в рассмотрение последовательности вектор-функций $\{f^k\}$, $\{q^{(k)}\}$ и $\{\varphi^{(k)}\}$, $k = 1,2,\ldots$, определив их с помощью покоординатных срезок величины k соответствующих вектор-функций:

$$f_i^{(k)}(x,s,t) = \begin{cases} f_i(x,s,t), \ |f_i(x,s,t)| \le k, \\ k \ \mathrm{sign} f_i(x,s,t), \ |f_i(x,s,t)| > k, \ x \in \mathrm{R}^n, \ (s,t) \in \Pi; \end{cases}$$

$$q_i^{(k)}(x,y,s,t) = \begin{cases} q_i(x,y,s,t), \ |q_i(x,y,s,t)| \le k, \\ k \ \mathrm{sign} q_i(x,y,s,t), \ |q_i(x,y,s,t)| > k, \ x \in \mathrm{R}^n, y \in \mathrm{R}^m, \\ \qquad (s,t) \in \partial\Pi; \end{cases}$$

$$i = 1,2,\ldots,n;$$

$$\varphi_j^{(k)}(x,t) = \begin{cases} \varphi_j(x,t), \ |\varphi_j(x,t)| \le k, \\ k \ \mathrm{sign}\varphi_j(x,t), \ |\varphi_j(x,t)| > k, \ x \in \mathrm{R}^n, \ t \in T; \ j = 1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

Понятно, что при любом $k = 1,2,\ldots$ так построенные вектор-функции $f^{(k)}, q^{(k)}$ и $\varphi^{(k)}$ являются существенно ограниченными в области своего определения, т.е. удовлетворяют условию (4.1). Следовательно, для любого $k = 1,2,\ldots$ существует единственное обобщенное решение $x^{(k)} \in L^n_\infty(\Pi)$ задачи (1.1),(1.2) с входными данными $f^{(k)}, q^{(k)}, \varphi^{(k)}$.

Покажем, что последовательность $\{x^k\}$ является фундаментальной в $L^n_{\text{p}}(\Pi)$. Пусть символ $\Delta^{(k,l)}$ означает разность элементов соответствующей последовательности с номерами k и l. В частности, $\Delta^{(k,l)}x = x^{(k)} - x^{(l)}$, $\Delta^{(k,l)}f = f^{(k)} - f^{(l)}$ и т.п. По определению обобщенного решения имеем равенства $x^{(k)} = X(q^{(k)}, \varphi^{(k)}, f^{(k)}; x^{(k)})$, $x^{(l)} = X(q^{(l)}, \varphi^{(l)}, f^{(l)}; x^{(l)})$, в которых оператор X строится по правилу (2.6). Отсюда после несложных, но громоздких процедур можно получить оценку

$$||\Delta^{(k,l)}x(\cdot,t)||_{L^n_{\text{p}}(S)} \le K_5[(\int\limits_{t_0}^{t}(||\Delta^{(k,l)}x(\cdot,\tau)||_{L^n_{\text{p}}(S)}+$$
$$+\sum_{j=0}^{1}||Z^{\pm}(s_j,\tau)\Delta^{(k,l)}x(s_j,\tau)||)d\tau + ||\Delta^{(k,l)}f(x^{(k)},\cdot,\cdot)||_{L^n_{\text{p}}(\Pi)}+$$
$$+||\Delta^{(k,l)}\varphi(x^{(k)},\cdot)||_{L^m_{\text{p}}(T)} + ||\Delta^{(k,l)}q(x^{(k)},y^{(k)},\cdot,\cdot)||_{L^n_{\text{p}}(\partial\Pi)}]$$

с константой K_5 той же природы, что и предыдущие. Из данного неравенства и фундаментальности последовательностей $\{f^{(k)}\}, \{\varphi^{(k)}\}$ и $\{q^{(k)}\}$, следует фундаментальность последовательности $\{x^{(k)}\}$, а значит и наличие предельного элемента x этой последовательности, являющегося обобщенным решением задачи (1.1),(1.2).

Список литературы

1. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.А.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978. — 687 с.
2. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1982. —270 с.
3. *Терлецкий В.А.* Обобщенное решение гиперболических систем одномерных полулинейных дифференциальных уравнений // Серия: Оптимизация и управление . Вып. 11. — Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2004. — 48 с.
4. *Терлецкий В.А.* Обобщенное решение одномерных полулинейных гиперболических систем со смешанными условиями // Изв. Вузов. Математика. — 2004. — № 12. — С. 75-83.
5. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 608 с.
6. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: ФИЗМАТГИЗ, 1961. —303 с.

V. A. Terletsky

Generalized solution of a mixed problem for semi-linear hyperbolic system with Lebesgue summable input data

Abstract. A hyperbolic system of semilinear differential equations with boundary conditions of a very general type is considered and a rather simple way of constructing its generalized solution is proposed. Key-words: generalized solution, hyperbolic system, integral equivalent, characteristics.