Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 141—148

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.983.51

Обобщённые решения вырожденной задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения четвёртого порядка

А. В. Красник (krasnik_andrey@mail.ru)
Институт математики, экономики и информатики ИГУ, Иркутск

Аннотация. В работе рассмотрена задача Коши для линейного дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка специального вида с необратимым оператором при старшей производной по времени в банаховых пространствах. Построено обобщённое решение, доказана единственность полученного решения в широком классе обобщённых функций.

Ключевые слова: вырожденная задача Коши, обобщённые решения, банаховы пространства

Введение

Рассматривается задача Коши вида

$$Bu^{(4)}(t) = A_1u^{(2)}(t) + A_0u(t) + f(t), \tag{0.1}$$

$$u^{(i)}(0) = u_i, \quad i = \overline{0,3}, \tag{0.2}$$

где $u(t)$ — искомая функция со значениями в E_1, B, A_1 и A_0 — линейные замкнутые операторы из E_1 в E_2 с плотными в E_1 областями определения, $u_i \in E_1$, $f(t)$ — заданная функция со значениями в E_2, E_1 и E_2 — банаховы пространства. При этом B фредгольмов, $\dim \mathcal{N}(B) = 1$, $\overline{\mathcal{R}(B)} = \mathcal{R}(B)$, $\overline{\mathcal{D}(B)} = \overline{\mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_0)} = E_1$, $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_0)$.

Сформулируем задачу Коши (0.1)-(0.2) в пространстве обобщённых функций. Если функция $u(t)$ является классическим решением задачи (0.1)-(0.2), то функция $\tilde{u}(t) = u(t)\theta(t)$ удовлетворяет в обобщённом смысле уравнению:

$$B\tilde{u}^{(4)}(t) - A_1\tilde{u}^{(2)}(t) - A_0\tilde{u}(t) = f(t)\theta(t)+$$

$$+Bu_0\delta^{(3)}(t)+Bu_1\delta^{(2)}(t)+(Bu_2-A_1u_0)\delta^{(1)}(t)+(Bu_3-A_1u_1)\delta(t), \quad (0.3)$$

здесь $\delta(t)$ — функция Дирака, $\theta(t)$ — функция Хевисайда [5]. Задачу о построении решения уравнения (0.3) в классе распределений будем называть обобщённой задачей Коши для (0.1)-(0.2).

В работе рассмотрены два подхода к построению обобщённых решений: первый — получение решения с помощью конструкции фундаментальной оператор-функции [2] дифференциального оператора, стоящего в левой части уравнения (0.3), второй — непосредственное восстановление решения как суммы регулярной и сингулярной обобщённых функций [1].

1. Вспомогательные утверждения

Пусть оператор B фредгольмов и имеет одномерное ядро, т.е. $\dim\mathcal{N}(B)=\dim\mathcal{N}^*(B)=1$. Обозначим базисные элементы ядер через $\varphi\in\mathcal{N}(B),\ \psi\in\mathcal{N}^*(B)$.

Определение 1. Будем говорить, что элемент $\varphi\in\mathcal{N}(B)$ имеем обобщённую A_1, A_0-жорданову цепочку длины p, если существует упорядоченная система элементов $\left\{\varphi^{(1)}=\varphi,\ \varphi^{(2)},\ldots,\ \varphi^{(p)}\right\}\subset E_1$, удовлетворяющих следующим соотношениям

$$B\varphi^{(i)}=A_1\varphi^{(i-1)}+A_0\varphi^{(i-2)},\ i=\overline{2,\,p},$$

здесь $\varphi^{(0)}=0$. Причем выполняется условие обрыва цепочки

$$\left\langle A_1\varphi^{(p)}+A_0\varphi^{(p-1)},\,\psi\right\rangle\neq 0,$$

далее будем считать это значение равным единице.

Из определения 1 и альтернативы Фредгольма [3] следует выполнение следующих равенств

$$\left\langle A_1\varphi^{(i)}+A_0\varphi^{(i-1)},\,\psi\right\rangle=0,\ i=\overline{1,\,p-1}.$$

Аналогично вводится понятие обобщённой A_1^*, A_0^*-жордановой цепочки элемента ψ, длина которой также будет равна p.

Введём в рассмотрение элементы $z=A_1\varphi^{(p)}+A_0\varphi^{(p-1)}\in E_2$ и $\gamma=A_1^*\psi^{(p)}+A_0^*\psi^{(p-1)}\in E_1^*$, для которых выполняются равенства: $\langle z,\,\psi\rangle=1,\ \langle\varphi,\,\gamma\rangle=1$.

Оператор

$$\tilde{B}=B+\langle\bullet\,,\,\gamma\rangle\,z,$$

по обобщённой лемме Шмидта [3] непрерывно обратим. Обратный к нему принято называть оператором Шмидта и обозначать Γ. Справедливы соотношения [3] $B\Gamma=I_2-Q,\ \Gamma B=I_1-P$, где $P=\langle\bullet\,,\,\gamma\rangle\,\varphi,\ Q=\langle\bullet\,,\,\psi\rangle\,z$ — проекторы, I_i — тождественный оператор в E_i.

Оператор Шмидта позволяет вычислять элементы цепочки по формуле:

$$\varphi^{(i)} = \Gamma\left(A_1\varphi^{(i-1)} + A_0\varphi^{(i-2)}\right),\ i = \overline{2,\ p}.$$

Пусть выполнены условия:

I) *элемент* $\varphi \in \mathcal{N}(B)$ *имеет обобщённую* A_1, A_0*-жорданову цепочку длины p, тогда элемент* $\psi \in \mathcal{N}^*(B)$ *имеет также обобщённую* A_1^*, A_0^**-жорданову цепочку длины p [4];*

II) *операторы* A_1 *и* A_0 *псевдокоммутируют, т.е.* $A_1\Gamma A_0 = A_0\Gamma A_1$ *и операторное квадратное уравнение*

$$\Lambda^2 - A_1\Gamma\Lambda - A_0\Gamma = 0$$

имеет два различных коммутирующих решения Λ_1, $\Lambda_0 \in \mathcal{L}(E_2)$, *таких, что оператор* $G = (\Lambda_1 - \Lambda_0)^{-1}$ *существует и ограничен.*

При выполнении условия II) операторы Λ_1 и Λ_0 коммутируют с $A_1\Gamma$ и $A_0\Gamma$ и справедливы соотношения, аналогичные теореме Виета: $\Lambda_1+\Lambda_0 = A_1\Gamma$, $-\Lambda_1\Lambda_0 = A_0\Gamma$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия I), II), тогда справедливы следующие соотношения*

$$A_1\varphi^{(i)}+A_0\varphi^{(i-1)} = \left[\left({\Lambda_1}^i - {\Lambda_0}^i\right)GA_1 + \left({\Lambda_1}^{i-1} - {\Lambda_0}^{i-1}\right)GA_0\right]\varphi,\ \ i = \overline{1,\ p}.$$

Доказательство этой леммы проводится методом математической индукции с использованием аналога теоремы Виета.

Далее понадобится следующая пара оператор-функций

$$\cosh\sqrt{\Lambda}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{2k}\Lambda^k}{2k!},\qquad \sinh\frac{\sqrt{\Lambda}t}{\sqrt{\Lambda}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{2k+1}\Lambda^k}{(2k+1)!},\quad \Lambda \in \mathcal{L}(E_2).$$

Ряды, задающие эти функции, в силу ограниченности оператора Λ, являются равномерно сходящимися по операторной норме на любом компакте $[0,\ T]$.

2. Фундаментальная оператор-функция

Перепишем уравнение (0.3) в свёрточном виде [5]

$$\mathcal{L}_4(\delta(t)) * \tilde{u}(t) \equiv \left(B\delta^{(4)}(t) - A_1\delta^{(2)}(t) - A_0\delta(t)\right) * \tilde{u}(t) = h(t), \qquad (2.1)$$

где

$$h(t) = f(t)\theta(t) + Bu_0\delta^{(3)}(t) + Bu_1\delta^{(2)}(t) + \\ + (Bu_2 - A_1u_0)\delta^{(1)}(t) + (Bu_3 - A_1u_1)\delta(t).$$

Определение 2. Фундаментальной оператор-функцией $\epsilon(t)$ дифференциального оператора $\mathcal{L}_4(\delta(t))$ будем называть оператор-функцию, удовлетворяющую следующим соотношениям

$$\mathcal{L}_4(\delta(t)) * \epsilon(t) * \hat{y}(t) = \hat{y}(t),\ \forall \hat{y}(t) \in \mathcal{K}'_+(E_2),$$

$$\epsilon(t) * \mathcal{L}_4(\delta(t)) * \check{y}(t) = \check{y}(t),\ \forall \check{y}(t) \in \mathcal{K}'_+(E_1),$$

здесь $\mathcal{K}'_+(E_i)$, — пространство обобщённых функций с ограниченным слева носителем [2, 5].

Если существует фундаментальная оператор-функция $\epsilon(t)$ оператора $\mathcal{L}_4(\delta(t))$, то единственное решение обобщённой задачи Коши (2.1) в классе $\mathcal{K}'_+(E_1)$ будет определяться в виде свёртки $\epsilon(t)$ с правой частью уравнения (2.1).

Лемма 2. *Пусть выполнено условие II), тогда оператор* $I_2\delta^{(4)}(t) - A_1\Gamma\delta^{(2)}(t) - A_0\Gamma\delta(t)$ *имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\tilde{\epsilon}(t) = \left(\sinh\frac{\sqrt{\Lambda_1}\,t}{\sqrt{\Lambda_1}} - \sinh\frac{\sqrt{\Lambda_0}\,t}{\sqrt{\Lambda_0}}\right) G\theta(t). \tag{2.2}$$

Доказательство этой леммы проводится непосредственной проверкой определения.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия I) и II), тогда справедливы соотношения*

$$Q\left(\Lambda_1^2\sinh\frac{\sqrt{\Lambda_1}\,t}{\sqrt{\Lambda_1}} - \Lambda_0^2\sinh\frac{\sqrt{\Lambda_0}\,t}{\sqrt{\Lambda_0}}\right)^{(l)} GQ\,|_{t=0} = \left\{\begin{array}{ll} O_2, & l=\overline{0,2p-2}, \\ Q, & l=2p-1. \end{array}\right. ,$$

где O_2 — нулевой оператор в E_2.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия I) и II), тогда дифференциальный оператор $\mathcal{L}_4(\delta(t))$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\begin{aligned}\epsilon(t) = {} & \Gamma\delta(t) * \tilde{\epsilon}(t) * \\ & * (I_2\delta(t) + R(t)\theta(t)) * \left((I_2 - Q)\,\delta(t) - \sum_{i=1}^{p}\left\langle \bullet, \psi^{(i)}\right\rangle z\,\delta^{(2p-2i)}(t)\right),\end{aligned}$$

где $R(t)$ — резольвента ядра

$$K(t) = -Q\left(\Lambda_1^{p+2}\sinh\frac{\sqrt{\Lambda_1}\,t}{\sqrt{\Lambda_1}} - \Lambda_0^{p+2}\sinh\frac{\sqrt{\Lambda_0}\,t}{\sqrt{\Lambda_0}}\right) G.$$

Основные этапы доказательства теоремы 1 аналогичны приведённым в главе 6 монографии [7] для других типов вырожденных интегро-дифференциальных операторов и в своей "технической" реализации учитывает специфику рассматриваемого нами дифференциального оператора $\mathcal{L}_4(\delta(t))$.

3. Построение обобщённого решения

Из теоремы 1 следует, что обобщённое решение задачи Коши (0.3) восстанавливается по формуле $\tilde{u}(t) = \epsilon(t) * h(t)$, структура которой подсказывает, что искать решение задачи (0.3) можно в виде

$$\tilde{u}(t) = v(t)\theta(t) + \sum_{i=0}^{2p-5} \omega_i \delta^{(i)}(t). \tag{3.1}$$

Подставим (3.1) в задачу (0.3) и отделим регулярную и сингулярную составляющие. В результате для определения регулярной составляющей получим задачу Коши, (аналогичную исходной задаче (0.1)-(0.2))

$$Bv^{(4)}(t) = A_1 v^{(2)}(t) + A_0 v(t) + f(t), \tag{3.2}$$

$$v^{(i)}(0) = v_i, \quad i = \overline{0,3}, \tag{3.3}$$

но заметим, что начальные данные в этой задаче пока не определены. Они определятся из уравнения на сингулярную составляющую:

$$B \sum_{i=0}^{2p-5} \omega_i \delta^{(i+4)}(t) - A_1 \sum_{i=0}^{2p-5} \omega_i \delta^{(i+2)}(t) - A_0 \sum_{i=0}^{2p-5} \omega_i \delta^{(i)}(t) +$$

$$+ Bv_0\delta^{(3)}(t) + Bv_1\delta^{(2)}(t) + (Bv_2 - A_1 v_0)\delta^{(1)}(t) + (Bv_3 - A_1 v_1)\delta(t) = \tag{3.4}$$

$$= Bu_0\delta^{(3)}(t) + Bu_1\delta^{(2)}(t) + (Bu_2 - A_1 u_0)\delta^{(1)}(t) + (Bu_3 - A_1 u_1)\delta(t).$$

Лемма 4. *Пусть выполнено условие I), тогда элементы пространства E_1 вида*

$$\omega_{2k+1} = \sum_{i=k+3}^{p} c_i \varphi^{(p-i-2)}, \quad \omega_{2k} = \sum_{i=k+3}^{p} d_i \varphi^{(p-i-2)}, \quad k = \overline{0,\, p-3}$$

$$v_0 = \sum_{i=2}^{p} c_i \varphi^{(i-1)} + u_0, \quad v_1 = \sum_{i=1}^{p} d_i \varphi^{(i-1)} + u_1 \quad v_2 = \sum_{i=1}^{p} c_i \varphi^{(i)} + u_2,$$

$$v_3 = \sum_{i=1}^{p} d_i \varphi^{(i)} + u_3,$$

удовлетворяют уравнению (3.4), здесь c_i, d_i — произвольные постоянные.

Доказывается лемма 4 непосредственной подстановкой элементов ω_i, $i=\overline{0,\,2p-5}$, $v_j,\ j=\overline{0,\,3}$ в уравнение (3.4).

Заметим, что последние четыре вектора в лемме 4 дают начальные условия (3.3) и зависят от $2p$ произвольных постоянных.

Введём в рассмотрение скалярную функцию

$$\hat{F}(t) = -\left\langle \tilde{\epsilon}(t) * (g(t)+\tilde{g}(t))\theta(t),\, \psi\right\rangle = F(t)+\tilde{F}(t), \tag{3.5}$$

где функции $g(t)$ и $\tilde{g}(t)$ имеют вид

$$g(t)=f(t)+A_1\left(u_2+tu_3\right)+A_0\left(u_0+tu_1+\frac{t^2}{2!}u_2+\frac{t^3}{3!}u_3\right),$$

$$\tilde{g}(t)=A_1\sum_{i=1}^{p}\left(c_i+td_i\right)\varphi^{(i)}+A_0\sum_{i=1}^{p}\left(c_i+td_i\right)\varphi^{(i-1)}+A_0\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{t^2c_i}{2!}+\frac{t^3d_i}{3!}\right)\varphi^{(i)}.$$

В формуле (3.5) функция $\tilde{F}(t)$ зависит от $2p$ произвольных постоянных.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия I), II) и $f(t)$ достаточно гладкая, тогда обобщённое решение задачи Коши (0.3) восстанавливается в виде (3.1).*

Доказательство. Выше было показано, что задача (0.3) эквивалентна задаче Коши (3.2)-(3.3) и уравнению (3.4), решение которого по лемме 4 зависит от $2p$ произвольных постоянных.

Решение задачи (3.2)-(3.3) будем искать в виде [6]

$$v(t) = \Gamma w(t) + \xi(t)\varphi + v_0 + tv_1 + \frac{t^2}{2!}v_2 + \frac{t^3}{3!}v_3, \tag{3.6}$$

$$\langle w(t),\, \psi\rangle = 0. \tag{3.7}$$

где $w(t)\in\mathcal{C}^4[0,\,+\infty)$ — функция со значениями в E_2, $\xi(t)\in\mathcal{C}^4[0,\,+\infty)$ — скалярная функция, причём $\xi^{(i)}(0)=0,\ w^{(i)}(0)=0,\ i=\overline{0,\,3}$. Подставим вид (3.6) в уравнение (3.2). Получим:

$$w^{(4)}(t) = A_1\Gamma w^{(2)}(t) + A_0\Gamma w(t) + (A_1\xi^{(2)}(t)+A_0\xi(t))\varphi + \hat{g}(t),$$

где $\hat{g}(t)=g(t)+\tilde{g}(t)$.

Решение этого уравнения имеет вид

$$w(t) = \tilde{\epsilon}(t) * \Big((A_1\xi^{(2)}(t)+A_0\xi(t))\varphi + \hat{g}(t)\Big)\,\theta(t). \tag{3.8}$$

Подставим решение (3.8) в условие (3.7) и, после тождественных преобразований, получим относительно функции $\xi(t)$ уравнение Вольтерра 1-го рода:

$$\int\limits_0^t K(t-s)\xi(s)\,ds = \hat{F}(t)$$

со следующим ядром:

$$K(t) = \frac{t^{2p-1}}{(2p-1)!} + \\ + \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \left\langle \left(\Lambda_1^{k+1} - \Lambda_0^{k+1}\right) GA_1\varphi + \left(\Lambda_1^k - \Lambda_0^k\right) GA_0\varphi,\ \psi \right\rangle .$$

Решать это уравнение будем методом приведения его к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода путём последовательного дифференцирования по переменной t. В силу структуры ядра уравнения Вольтерра 1-го рода оно сведётся к следующему уравнению:

$$\xi(t) + \int\limits_0^t K_t^{(2p)}(t-s)\xi(s)\,ds = \hat{F}^{(2p)}(t), \tag{3.9}$$

которое имеет единственное решение в классе непрерывных функций при непрерывной правой части [5]. При этом необходимо следить за согласованностью правой и левой частями. Эти условия согласования имеют вид

$$-\tilde{F}^{(i)}(0) = F^{(i)}(0),\ i = \overline{4, 2p+3}. \tag{3.10}$$

Полученные условия представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $c_i,\ d_i,\ i = \overline{1,p}$ и, в силу условий теоремы, матрица этой системы невырождена, следовательно, постоянные $c_i,\ d_i,\ i = \overline{1,p}$ определятся однозначно, а вместе с ними из уравнения (3.9) однозначно определится функция $\xi(t)$ через резольвенту ядра $K^{(2p)}(t)$. Тем самым, решение задачи Коши (3.2)-(3.3) восстановится однозначно по формуле (3.6), а также однозначно определятся коэффициенты $\omega_i,\ i = \overline{0,\, 2p-5}$. Значит, однозначно определится обобщённое решение задачи Коши (0.3) в виде (3.1), которое по теореме 1 и будет единственным в классе обобщённых функций $K'_+(E_1)$. □

Список литературы

1. *Сидоров Н.А., Фалалеев М.В.* Обобщённые решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 726–728.
2. *Фалалеев М.В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Сиб. Мат. Журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1167–1182.
3. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
4. *Русак Ю.Б.* Обобщённая жорданова структура в теории ветвления: Дис. ... канд. физ. мат. наук. Ташкент, АН УССР, 1979.

5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
6. *Сидоров Н.А., Романова О.А.* О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением. // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 9. С. 1516–1526.
7. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A. and Falaleev M.* Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.

A. V. Krasnik

The generalized solutions of singular Cauchy problem for the differential-operator equation of the fourth order

Abstract. The Cauchy problem for the linear differential-operator equation of the fourth order of special type with a noninvertible operator in the main part in Banach spaces is investigated in this paper. The generalized solution is constructed, the uniqueness of the solution in the class of generalized functions is proved.