Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 4. С. 7—20

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 510.53+510.67

Новый спектр вычислимых моделей *

А. Н. Гаврюшкин
Иркутский государственный университет

Аннотация. В работе доказано существование моделей эренфойхтовой теории, попарно друг в друга элементарно вкладываемых, одна из которых имеет вычислимое представление, а другая нет. Этот результат вместе с работой [6] является ключевым для описания спектров вычислимых моделей эренфойхтовых теорий.

Ключевые слова: эренфойхтова теория; вычислимая модель; разрешимая модель; простая модель; однородная модель.

1. Введение

Эта статья представляет собой обзор современного состояния исследований в области вычислимых моделей эренфойхтовых теорий. Также в ней представлены некоторые новые результаты. Начнём с необходимых определений, предварительных сведений и истории предмета.

В работе мы используем стандартные понятия и обозначения теории вычислимых моделей. В качестве классических мы отметим книги [1, 2, 17].

Сигнатуры всех моделей в этой работе предполагаются вычислимыми, а сами модели — счётными. Когда мы говорим о вычислительных (алгоритмических) свойствах некоторых множеств формул, мы идентифицируем формулы с их гёделевскими номерами. Исторически сложилось называть вычислимые теории *разрешимыми*. Модель $\mathfrak{A}$ называется *вычислимой*, если её носитель является подмножеством ω (множества натуральных чисел), и её атомная диаграмма, обозначаемая через $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$, вычислима. Это эквивалентно тому, что носитель модели $\mathfrak{A}$ — это вычислимое множество, а её отношения и функции равномерно вычислимы. Модель $\mathfrak{A}$ (чей носитель — подмножество множества ω) *разрешима*,

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг., государственный контракт No П1227.

если её полная диаграмма, обозначаемая через $\mathcal{D}_c(\mathfrak{A})$, вычислима. Модель $\mathfrak{B}$ называется *представлением* модели $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{B}$ изоморфна $\mathfrak{A}$, обозначается это через $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$. Обычно мы будем использовать слово «вычислима» вместо «имеет вычислимое представление» и «разрешима» вместо «имеет разрешимое представление», но из контекста всегда будет ясно, что именно имеется в виду.

Обозначим через $S(T)$ множество всех типов (над), совместных с теорией T. Полная теория T счётного языка называется *малой*, если множество $S(T)$ не более чем счётно. Обозначим через $\omega(T)$ число счётных моделей теории T с точностью до изоморфизма. Полная теория T называется *эренфойхтовой*, если $1 < \omega(T) < \omega$. Класс эренфойхтовых теорий является одним из самых загадочных подклассов класса малых теорий. Имеется большое количество вопросов, стоящих уже очень давно и до сих пор остающихся без ответа. Эти вопросы относятся как к теории моделей, так и к теории вычислимости. В этой работе мы постараемся упомянуть наиболее важные среди них.

История началась в Итаке. А. Нероуд, вдохновлённый результатом Л. Харрингтона [10], который доказал, что если разрешимая теория $\aleph_1$-категорична, то все её счётные модели разрешимы, поставил следующий вопрос. Будут ли все счётные модели разрешимой эренфойхтовой теории разрешимы? М. Морли и А. Лахлан [15] ответили на этот вопрос приведя пример теории с шестью моделями, среди которых только простая была разрешимой. Позднее М. Перетятькин [16] нашёл для всех $n \geqslant 3$ примеры теорий, имеющих в точности n моделей, из которых только простая разрешима. По теореме Р. Вота (см. [2]), никакая полная теория не может иметь в точности две счётные модели. Чтобы получить все эти результаты, авторы строили разрешимые эренфойхтовы теории с невычислимым неглавным типом и пользовались эффективной версией теоремы об опускании типов. Именно это послужило причиной для Морли переформулировать вопрос Нероуда следующим образом.

Проблема 1 (М. Морли [15], 1976)**.** *Предположим, T имеет в точности $n < \omega$ счётных моделей, и каждый тип, совместный с T, вычислим.*

1. *Будет ли любая счётная модель теории T разрешимой?*
2. *Если нет, каково наименьшее n, доставляющее контрпример?*

Сам Морли решил эту проблему положительно для $n = 3$. Для $n \geqslant 4$ проблема по-прежнему открыта. Исследования разрешимых моделей эренфойхтовых теорий тесно связаны с изучением разрешимости простых и насыщенных моделей в частности и однородных моделей вообще.

Харрингтон [10] обнаружил критерий разрешимости простых моделей. Пусть T имеет простую модель. Необходимым и достаточным условием того, чтобы эта модель была разрешимой, является существование вычислимого списка главных типов. Одним из следствий эффективной версии теоремы об опускании типов является следующее. Если простая модель разрешимой теории не разрешима, то эта теория имеет бесконечно много неизоморфных разрешимых моделей. (Действительно, в этом случае всякая разрешимая модели теории реализует некоторый неглавный тип, который в сою очередь может быть опущен в другой разрешимой модели этой теории.) Таким образом, простые модели разрешимой эренфойхтовой теории разрешимы. Морли доказал критерий разрешимости для насыщенных моделей. Необходимым и достаточным условием является существование вычислимого списка всех типов. Отсюда он заметил, что ответ на второй вопрос его Проблемы 1 не может быть три. Другой вопрос, который Морли поставил в той же работе, был: Может ли результат о простых и насыщенных моделях быть расширен на однородные модели? С. С. Гончаров [8] и Т. Миллар [14] независимо построили контрпримеры. Кроме того, они нашли необходимые и достаточные условия разрешимости однородных моделей. Эти условия требует выполнения дополнительных свойств вычислимости расширений типов. Но из теоремы Вота следует, что любая эренфойхтова теория имеет неоднородную модель. Однако все известные модели эренфойхтовых теорий однородны над кортежами из своих элементов, назовём такие модели *почти однородными*. Более точно, модель $\mathfrak{A}$ *почти однородна*, если существует набор элементов $\bar{a}$ из $\mathfrak{A}$, такой что обогащение $\mathfrak{A}$ этими элементами $\langle \mathfrak{A}, \bar{c} \rangle$ является однородной моделью (здесь мы интерпретируем константы $\bar{c}$ элементами $\bar{a}$). Это побудило Гончарова сформулировать

Проблема 2. *Пусть почти однородная модель $\mathfrak{A}$ имеет эренфойхтову теорию и реализует только вычислимые типы. Будет ли $\mathfrak{A}$ разрешимой?*

Эта проблема до сих пор открыта. Возможно, она эквивалентна Проблеме 1. «Возможно» — потому что следующий теоретикомодельный вопрос, заданный тоже Гончаровым, остаётся открытым.

Проблема 3. *Пусть модель $\mathfrak{A}$ имеет эренфойхтову теорию. Является ли $\mathfrak{A}$ почти однородной?*

Мы собираемся взглянуть на эти проблемы с современной точки зрения.

2. Сведения из теории моделей

В этом разделе мы коснёмся результатов о типах изоморфизма счётных моделей эренфойхтовых теорий.

Тип p теории T называется *властным* (в теории T), если всякая модель $\mathfrak{A}$ теории T, реализующая p, также реализует каждый тип из $S(T)$. Если полная теория не имеет властного типа, то она имеет бесконечно много моделей. Действительно, возьмём тип p_0, поскольку он не властный, существуют тип p_1 и модель $\mathfrak{A}_0$, которая реализует p_0 и опускает p_1, поскольку p_0, p_1 не властные, опять существуют тип p_2 и модель $\mathfrak{A}_1$, которая реализует p_0, p_1 и опускает p_2, поскольку p_0, p_1, p_2 не властные, ... Таким образом, любая эренфойхтова теория имеет властный тип.

Модель $\mathfrak{A}$ называется *простой над типом* p, если существует набор элементов $\bar{a}$ в $\mathfrak{A}$, такой что $\bar{a}$ — это реализация p в $\mathfrak{A}$, то есть $\mathfrak{A} \models p(\bar{a})$, и модель $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle$ проста. Модель $\mathfrak{M}$ is *почти проста*, если она проста над реализацией некоторого типа. Как мы увидим позже, почти простые модели образуют, в некотором смысле, базис в классе *эренфойхтовых моделей* (то есть моделей, теория которых эренфойхтова).

Если p — тип, и модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ просты над p, то $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Поэтому обозначим через $\mathfrak{A}_p$ некоторую модель, которая проста над p. Обозначим через $RK(T)$ множество всех попарно неизоморфных моделей $\mathfrak{A}_p$ по всем $p \in S(T)$. Это множество предупорядочено отношением $\hookrightarrow$, определённым следующим образом. $\mathfrak{A}_p \hookrightarrow \mathfrak{A}_q$, тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_q \models p$. Эквивалентно, существует элементарная подмодель $\mathfrak{B}$ модели $\mathfrak{A}_q$, обозначается $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A}_q$, такая что $\mathfrak{A}_p \cong \mathfrak{B}$. Мы также скажем, что тип p *подчиняется* типу q, если $\mathfrak{A}_p \hookrightarrow \mathfrak{A}_q$, обозначается $p \hookrightarrow q$.

Пусть T — эренфойхтова теория. Заметим, что $RK(T)$ имеет наименьший элемент. Действительно, если p — главный тип, то для всех $q \in S(T)$ мы имеем $\mathfrak{A}_q \models p$. Конечно, в этом случае $\mathfrak{A}_p$ — это простая модель теории T, и поэтому наименьший элемент в $RK(T)$ единственен. Также $RK(T)$ имеет наибольший элемент. Чтобы показать это, возьмём властный тип p, тогда $\mathfrak{A}_p \models q$ для всех $q \in S(T)$. Как мы позже увидим, наибольший элемент не обязан быть единственным. Так, мы имеем конечное множество $\hookrightarrow$-эквивалентных наибольших элементов.

Конечно, не каждая модель эренфойхтовой теории почти проста. Например, если $\mathfrak{A}$ — насыщенная модель, то она не почти проста.

Лемма 1 (Судоплатов [18])**.** *Пусть теория T эренфойхтова, и $\mathfrak{A}$ — модель теории T. Тогда существует тип $p \in S(T)$ и элементарная цепь изоморфных моделей $\mathfrak{A}_0 \preceq \ldots \preceq \mathfrak{A}_n \preceq \ldots$, каждая из которых проста над p, такие что $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_n \mathfrak{A}_n$.*

Благодаря этой лемме, если модель не почти проста, назовём её *предельной моделью.* Если предельная модель $\mathfrak{A}$ такая, как в последнем предложении Леммы 1, назовём её *предельной над типом* p. Как мы увидим, существуют неизоморфные модели, предельные над одним и тем же типом.

Лемма 2 (Судоплатов [18]). *Пусть* $\mathfrak{A}_p$ *и* $\mathfrak{A}_q$ *неизоморфные* $\hookrightarrow$*-эквивалентные (то есть* $\mathfrak{A}_p \hookrightarrow \mathfrak{A}_q$ *and* $\mathfrak{A}_q \hookrightarrow \mathfrak{A}_p$*) почти простые модели. Тогда существует модель, предельная над типом* p *и предельная над типом* q.

Доказательство. Для каждого $n \in \omega$ определим по индукции модель $\mathfrak{A}_n$ следующим образом. Модель $\mathfrak{A}_0$ — это $\mathfrak{A}_p$. Предположим, что модели $\mathfrak{A}_0 \preceq \mathfrak{A}_1 \preceq \ldots \preceq \mathfrak{A}_n$ уже определены и удовлетворяют следующему свойству. Если $k \in \{0, \ldots, n\}$ чётное число, то $\mathfrak{A}_k \cong \mathfrak{A}_p$, а если k нечётное, то $\mathfrak{A}_k \cong \mathfrak{A}_q$.

Случай 1. n чётное. Поскольку $\mathfrak{A}_p \hookrightarrow \mathfrak{A}_q$ и $\mathfrak{A}_n \cong \mathfrak{A}_p$, существует модель $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}_q$, такая что $\mathfrak{A}_n \preceq \mathfrak{B}$. Положим $\mathfrak{A}_{n+1} = \mathfrak{B}$.

Случай 2. n нечётное. Необходимо p и q в *Случае 1* поменять местами.

Рассмотрим модель $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_n \mathfrak{A}_n$. Эта модель предельна. Действительно, если она почти проста, то она должна быть изоморфна и $\mathfrak{A}_p$, и $\mathfrak{A}_q$, а это невозможно. □

Определим функцию $ln : RK(T) \to \omega$ следующим образом. $ln(\mathfrak{A}_p)$ — это число попарно неизоморфных моделей, каждая из которых предельна над некоторым типом q, таким что q и p $\hookrightarrow$-эквивалентны (то есть $q \hookrightarrow p \hookrightarrow q$). Поскольку объединение элементарной цепи простых моделей некоторой теории — это снова простая модель этой теории, то $ln(\mathfrak{A}_p) = 0$, когда тип p главный.

Таким образом, если у нас есть конечное предупорядоченное множество $\langle X, \leqslant \rangle$ и функция $f : X \to \omega$, и мы хотим построить эренфойхтову теорию T, такую что существует изоморфизм $\varphi : \langle X, \leqslant \rangle \to \langle RK(T), \hookrightarrow \rangle$, сохраняющий f, то есть $f(x) = ln(\varphi(x))$, то X и f должны удовлетворять следующим свойствам.

1. Существует единственный наименьший элемент a_0;
2. Существует наибольший элемент $z_0 \neq a_0$;
3. $f(a_0) = 0$;
4. $f(z_0) > 0$;
5. Если $x \leqslant y \leqslant x$ и $x \neq y$, то $f(x) > 0$.

Назовём пару (X, f), удовлетворяющую этим свойствам, *E-параметрами*. В этом случае, множество X назовём *E-порядком*, а функцию f *E-функцией*. Если T эренфойхтова теория, назовём пару $(RK(T), ln)$ *E-параметрами теории* T.

Мы закончим этот раздел теоремой, которая доказана в [7], утверждающей, что у каждой эренфойхтовой теории имеется много однородных моделей.

Теорема 4. *Пусть T эренфойхтова теория и p тип, совместный с T. Если $\mathfrak{A}_{p_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{p_k}$ — это все элементы $RK(T)$, которые $\hookrightarrow$-эквивалентны $\mathfrak{A}_p$, а $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_m$ — это все модели, каждая из которых предельна над некоторым типом из $p_1, \ldots, p_k$. Тогда существует единственная однородная модель среди моделей $\mathfrak{A}_{p_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{p_k}, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_m$.*

Заметим, что если модели $\mathfrak{A}_{p_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{p_k}, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_m$ такие, как в Теореме 4, и $m \geqslant 1$, то однородная модель должна быть среди $\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_m$, то есть она является предельной моделью. Действительно, если у нас есть элементарная цепь изоморфных однородных моделей, то её объединение снова однородная модель и, значит, изоморфна моделям цепи. Но как мы знаем, если над типом p нет предельных моделей, то в классе эквивалентности почти простых моделей, содержащем $\mathfrak{A}_p$, должна быть только одна с точность до изоморфизма модель. Таким образом, справедливо

Следствие 1. *Почти простая модель $\mathfrak{A}_p$ однородна, тогда и только тогда, когда не существует предельных над типом p моделей.*

Как мы увидим, Теорема 4 имеет много полезных следствий.

3. Разрешимые модели

Этот раздел посвящён следующей общей проблеме: Описать разрешимые модели эренфойхтовых теорий. Более точно, пусть нам дана эренфойхтова теория T. Какие модели теории T имеют разрешимые представления? Это основная проблема.

Сначала отметим, что разрешимые модели замкнуты вниз в $RK(T)$.

Предложение 1. *Если $\mathfrak{A}_p \hookrightarrow \mathfrak{A}_q$ и $\mathfrak{A}_q$ разрешима, то $\mathfrak{A}_p$ разрешима. В частности, если $\mathfrak{A}_p \hookrightarrow \mathfrak{A}_q \hookrightarrow \mathfrak{A}_p$ и $\mathfrak{A}_q$ разрешима, то $\mathfrak{A}_p$ разрешима.*

Предложение 2. *Если $\mathfrak{A}$ разрешимая модель предельная над p, то $\mathfrak{A}_p$ разрешима.*

Морли и Лахлан [15] первыми показали, что разрешимые модели не замкнуты вверх в $RK(T)$. Следующая теорема, доказанная в [5], показывает, в частности, что любой конечный линейный порядок может быть реализован как $RK(T)$ для некоторой *наследственно разрешимой* (то есть все типы которой вычислимы) эренфойхтовой теории T.

Теорема 5. *Пусть $n \geqslant 1$ и $0 \leqslant k \leqslant n$ — некоторые натуральные числа, $L_n = \{x_0 \leqslant \ldots \leqslant x_n\}$ — линейный порядок, состоящий из $n+1$ элемента. Тогда существует эренфойхтова теория T_{nk}, такая что*

1. *$RK(T_{nk}) = \{\mathfrak{A}_0 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathfrak{A}_n\} \cong L_n$;*

2. *Модели $\mathfrak{A}_0, \dots, \mathfrak{A}_k$ разрешимы, модели $\mathfrak{A}_{k+1}, \dots, \mathfrak{A}_n$ не имеют даже вычислимых представлений.*

А что касается предельных моделей? Предельные модели представляют большую сложность. Практически любое утверждение о разрешимости предельных моделей либо тривиально, либо эквивалентно Проблеме Морли. Действительно, если у нас есть разрешимая насыщенная модель (которая, конечно, предельна), тогда все типы теории разрешимы, тогда все почти простые модели разрешимы, тогда практически всё, что можно спросить о разрешимости оставшихся моделей зависит от Проблемы 1. Так, можно сформулировать большое количество открытых проблем. Мы остановимся на двух из них.

Вопрос 6. *Пусть p — разрешимый тип эренфойхтовой теории T, и существует модель $\mathfrak{A}$, которая предельна над p. Тогда существует ли разрешимая модель, которая предельна над p?*

Вопрос 7. *Пусть p — разрешимый тип эренфойхтовой теории T, и существует разрешимая модель $\mathfrak{A}$, которая предельна над p. Будут ли тогда все предельные над p модели разрешимы?*

Вопрос 6 был задан Гончаровым на конференции Logic Colloquium 2010. Гаврюшкин [7] получил положительный ответ на этот вопрос как следствие Теоремы 4.

Таким образом, Вопрос 7 действительно эквивалентен Проблеме Морли.

Другое следствие Теоремы 4 решает Проблему Морли положительно для большого класса эренфойхтовых теорий. Более точно,

Следствие 2. *Пусть T эренфойхтова теория и всякий тип, совместный с T, вычислим. Пусть также если p — это тип, совместный с T, то существует не более одной предельной над p модели. Тогда все счётные модели теории T разрешимы.*

4. Вычислимые модели

В этом разделе мы будем рассматривать вычислимые представления вместо разрешимых.

Начнём со следующего вопроса. Если модель $\mathfrak{A}$ имеет вычислимое представление, то какова сложность её теории $Th(\mathfrak{A})$? Верхняя граница достигается, если рассмотреть стандартную модель арифметики $\langle \omega; \leqslant, +, \times, s, 0\rangle$. А что с эренфойхтовыми теориями? На сколько сложной может быть эренфойхтова теория, имеющая вычислимую модель? В [3] доказано, что она может быть произвольной арифметической сложности (то есть эквивалентной по Тьюрингу $\mathbf{0}^{(n)}$). Недавно Б. Хусаинов и А. Монталбан [12] построили ω-категоричную теорию, имеющую вычислимую модель и при этом 1-эквивалентную $Th(\omega; \leqslant, +, \times, s, 0)$. Этот пример может быть реконструирован в эренфойхтову теорию:

Теорема 8. *Для каждого $n \geqslant 3$ существует полная теория T, имеющая в точности n счётных моделей, такая что T имеет вычислимую модель и при этом эквивалентна по Тьюрингу арифметике.*

Какие модели эренфойхтовой теории имеют вычислимые представления? Оставшаяся часть работы посвящена размышлениям над этим вопросом.

Хусаинов, Нис и Шор [13] были первыми, кто показал, что вычислимые модели некоторой эренфойхтовой теории T не замкнуты вниз относительно $\hookrightarrow$ в $RK(T)$. Более точно, они построили эренфойхтову теорию (имеющую три модели), единственная вычислимая модель которой — насыщенная. Гаврюшкин [4], [6] показал, что вычислимые модели не обязаны образовывать интервалы в $RK(T)$.

Более того, в работе [6] имеется пример эренфойхтовой теории, имеющей 6 моделей, такой что

1. $RK(T) = \{\mathfrak{A}_0 \hookrightarrow \mathfrak{A}_1 \hookrightarrow \mathfrak{A}_2\}$;
2. $ln(\mathfrak{A}_0) = ln(\mathfrak{A}_1) = 0$, $ln(\mathfrak{A}_2) = 3$, то есть существуют 3 неизоморфные предельные модели над властным типом;
3. Среди моделей теории T только $\mathfrak{A}_0$ и 2 из предельных моделей обладают вычислимыми представлениями.

Таким образом, мы имеем две предельные над одним и тем же типом модели, одна из которых вычислима, а другая — нет. Заметим, что эти модели предельны над властным типом. А как мы упоминали ранее, такой результат для разрешимых моделей влечёт отрицательное решение Проблемы Морли.

Как мы помним, разрешимость одной из $\hookrightarrow$-эквивалентных почти простых моделей влечёт разрешимость остальных. Для вычислимых моделей это не так:

Теорема 9. *Пусть n и m — натуральные числа, такие что $1 \leqslant m \leqslant n$. Существует эренфойхтова теория T, такая что*

1. *T имеет в точности $n + 2$ неизоморфных счётных моделей;*
2. *T имеет n неизоморфных почти простых моделей $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, которые $\hookrightarrow$-эквивалентны;*
3. *Модели $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ не вычислимы, модели $\mathfrak{A}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{A}_n$ вычислимы.*

Доказательство. Доказательство основывается на двух идеях: существование Δ^0_2-множества, не являющегося областью значений никакой предельно монотонной функции (примеры таких множеств независимо построены Н. Г. Хисамиевым [11] и Хусаиновым, Нисов, Шором [13]); и кодирование таких множеств в эренфойхтовы теоии.

Для каждого набора кардиналов $k_1, \dots, k_n \in \{2, 3, \dots, \omega\}$ определим модель $Q(k_1, \dots, k_n)$ следующим образом.

Пусть $\mathbb{Q}$ множество рациональных чисел. И пусть $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_1 \cup \ldots \cup \mathbb{Q}_n$ — плотное разбиение, то есть если $1 \leqslant i < j \leqslant n$, то $\mathbb{Q}_i \cap \mathbb{Q}_j =$ и для любой пары рациональных чисел $x < y$ существует $z \in \mathbb{Q}_i$, лежащий между ними. Носитель модели $Q(k_1, \dots, k_n)$ — это $A \cup B$, где

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \mid 1 \leqslant q < 2\},$$

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_{q,1}, \dots, a_{q,k_i} \mid q \in A \cap \mathbb{Q}_i\}$$

множество новых элементов. Сигнатура модели — $\langle \leqslant; f_1, \dots, f_n \rangle$, где $\leqslant$ — это бинарное отношение, а $f_1, \dots, f_n$ — унарные функции. Положим $A_i = A \cap \mathbb{Q}_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Отношение $\leqslant$ и функции $f_1, \dots, f_n$ определяются следующим образом. Для всех x и y мы имеем $x \leqslant y$, тогда и только тогда, когда $x, y \in A$ и x меньше либо равен y как рациональные числа. Положим $i \in \{1, \dots, n\}$ и $x \in A \cup B$, определим $f_i(x)$ следующим образом. Если $x \in A$, то $f_i(x) = x$. Если $x = a_{q,t}$ для некоторого $q \in A_i$ и некоторого t, то $f_i(x) = q$. Если $x = a_{q,t}$ для некоторого $q \in A_j$, такого что $j \neq i$, и некоторого $t < k_j$, то $f(x) = a_{q,t+1}$, и $f(a_{q,k_j}) = a_{q,1}$.

Обозначим через $Q(\omega)$ модель $Q(\omega, \dots, \omega)$, и пусть $Q_1(\omega)$ будет моделью, получаемой из $Q(\omega)$ удалением элементов $1, a_{1,1}, \dots, a_{1,\omega}$ из носителя модели $Q(\omega)$.

Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — это изоморфные копии моделей $Q(k_1, \dots, k_n)$ и $Q(t_1, \dots, t_n)$, соответственно, и $A \cap B =$, то можно естественным образом определить тип изоморфизма модели $Q(k_1, \dots, k_n) + Q(t_1, \dots, t_n)$ следующим образом. Носитель новой модели — это множество $A \cup B$. Отношение $\leqslant$ в новой модели — это наименьшее частичное упорядочение, содержащее частичный порядок модели $\mathfrak{A}$, частичный порядок модели $\mathfrak{B}$ и отношение $\{(x, y) \mid x \in A \;\&\; f_1^{\mathfrak{A}}(x) = x \;\&\; y \in B \;\&\; f_1^{\mathfrak{B}}(y) = y\}$. Для $1 \leqslant i \leqslant n$ унарная функция f_i в новой модели — это объединение унарных функций $f_i^{\mathfrak{A}}$ и $f_i^{\mathfrak{B}}$.

Если $k_1^j, k_2^j, \dots, k_n^j$, $j < \omega$ — наборы натуральных чисел, каждое из которых больше либо равно 2, то как и выше мы можем определить модель

$$Q(k_1^0, \dots, k_n^0) + Q(k_1^1, \dots, k_n^1) + \ldots + Q(k_1^j, \dots, k_n^j) + \ldots$$

Для некоторых функций $g_i : \omega \to \{2, 3, \dots, \omega\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, таких что область значений каждой из них бесконечна, рассмотрим модель

$$\mathfrak{A}_0 = Q(g_1(0), g_2(0), \dots, g_n(0)) + Q(g_1(1), g_2(1), \dots, g_n(1)) + \ldots$$

И рассмотрим теорию T_0 модели $\mathfrak{A}_0$.

Докажем, что T_0 *имеет в точности* $n + 2$ *модели.*

$\mathfrak{A}_0$ простая модель T_0. Вторая модель теории T_0 — это $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}_0 + Q_1(\omega)$. Это насыщенная модель. И у нас есть n почти простых моделей $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_0 + Q(\omega)$, где элемент 1 из $Q(\omega)$ имеет бесконечно много f_i-прообразов, $1 \leqslant i \leqslant n$. Каждая из этих моделей почти проста над некоторым властным типом.

Чтобы видеть, что эти модели действительно являются моделями теории T_0, докажем, что $\mathfrak{A}_0$ — элементарная подмодель каждой из этих моделей. Очевидно, она подмодель. Чтобы доказать, что она элементарная подмодель, выберем некоторый набор элементов $\bar{a}$ из $\mathfrak{A}_0$, некоторую формулу вида $\exists x\varphi(\bar{a}, x)$ и некоторую модель $\mathfrak{B} \in \{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{M}\}$. Можно проверить, что если формула $\exists x\varphi(\bar{a}, x)$ истинна на $\mathfrak{B}$, то существует элемент b из $\mathfrak{A}_0$, такой что $\varphi(\bar{a}, b)$ истина на $\mathfrak{A}_0$, значит, подмодель элементарна.

Нам необходимо доказать, что любая счётная модель теории T_0 изоморфна одной из $n+2$ моделей, описанных выше. Пусть $\mathfrak{A}$ — это модель теории T_0. Определим по индукции последовательность элементов $a_0, a_1, \ldots$ Положим a_0 — минимальный элемент относительно частичного порядка в $\mathfrak{A}$, такой что он не единственный элемент, сравнимый с a_0. Заметим, что множество $\bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{b \mid b \neq a_0 \mathbin{\&} f_i(b) = a_0\}$ имеет в точности $g_i(0)$ элементов для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Положим $k_0^i = 0$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Предположим, что элементы $a_0, \ldots, a_{t-1}$ и числа $k_0^i, \ldots, k_{t-1}^i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) уже определены. Для $i \in \{1, \ldots, n\}$ положим k_t^i — наименьшее число, такое что $g_i(k_t^i) \neq g_i(k_j^i)$ для $j = 0, \ldots, t-1$. Элемент a_t определяется таким, что выполнены следующие свойства:

1. Множество $\bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{b \mid b \neq a_0 \mathbin{\&} f_i(b) = a_0\}$ имеет в точности $g_i(k_t)$ элементов для некотрого $i \in \{1, \ldots, n\}$;
2. Для каждого $x < a_t$ мощность множества $\bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{b \mid b \neq x \mathbin{\&} f_i(b) = x\}$ лежит в $\bigcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{g_i(k_0), \ldots, g_i(k_{t-1})\}$.

Рассмотрим последовательность $a_0, a_1, \ldots$ Очевидно, $a_0 < a_1 < \ldots$ Так, мы имеем $n+2$ случая:

Случай 0. $\lim\limits_t a_t$ не существует, и для любого $x \in A$, такого что $f_1(x) = x$ найдётся t, такое что $a_t \geqslant x$;

Случай i ($\mathbf{1 \leqslant i \leqslant n}$). $\lim\limits_t a_t$ существует, и если $a = \lim\limits_t a_t$, то a имеет бесконечно много f_i-прообразов;

Случай $\mathbf{n+1}$. $\lim\limits_t a_t$ не существует, и найдётся такой $x \in A$, что $f_1(x) = x$ и $x \geqslant a_t$ для всех a_t.

В первых n случаях мы имеем $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}_i$, в последнем случае $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{M}$.

Докажем, что *модели* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ $\hookrightarrow$*-эквивалентные почти простые модели.*

Для $1 \leqslant i \leqslant n$ рассмотрим тип $p_i(x)$, порождённый множеством формул $\{\varphi_s(x) \mid s \in \omega\}$, где $\varphi_s(x)$ говорит, что x имеет как минимум s f_i-прообразов. Заметим, что типы $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ — неглавные властные типы. Рассмотрим модель $\langle \mathfrak{A}_i, a\rangle$, где $a = \lim_t a_t$. Несложно видеть, что эта модель простая. А поскольку $\langle \mathfrak{A}_i, a\rangle \models p_i(a)$, модель $\mathfrak{A}_i$ проста над p_i.

Чтобы доказать что модели $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ $\hookrightarrow$-эквивалентны, мы заметим, что для всех пар чисел $1 \leqslant i, j \leqslant n$ мы имеем $\langle \mathfrak{A}_i, a\rangle \models p_j(b)$, где опять $a = \lim_t a_t$, а b — некоторый элемент, который имеет бесконечно много f_j-прообразов.

Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторая модель теории T_0. Для $1 \leqslant i \leqslant n$ рассмотрим ограничение $\mathfrak{B}_i$ модели $\mathfrak{B}$ на множество $\{x \mid f_i(x) = x \ \vee \ f_i(f_i(x)) = f_i(x)\}$. Сигнатурой модели $\mathfrak{B}_i$ является $\langle \leqslant, f_i\rangle$. Очевидно, если модель $\mathfrak{B}$ вычислима, то такова и $\mathfrak{B}_i$.

Теория T_0 очень полезна для построения различных примеров и контр-примеров эренфойхтовых теорий. Во-первых, по причине того, что она имеет любое заданное число моделей, во-вторых, из-за свойства, упомянутого в предыдущем обзаце — варьируя вычислительные свойства функций g_i можно получать различные вычислительные свойства моделей этой теории. В-третьих, она имеет конечную сигнатуру, а это важно, например, для теории автоматных моделей.

Мы воспользуемся теорией T_0 для построения теории T, существование которой утверждается в доказываемой теореме. Положим $g_i(x) = x + 2$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Сигнатура теории T получается из сигнатуры теории T_0 добавлением для каждого $j \in \{1, \ldots, m\}$ бинарного отношения $\leqslant_j$ и трёх унарных функций h_j^0, h_j^1, h_j^2.

Напомним, что в этом случае модель $\mathfrak{A}_0$ имеет вид

$$Q(\underbrace{2,\ 2,\ \ldots,\ 2}_{n\ \text{раз}}) + Q(\underbrace{3,\ 3,\ \ldots,\ 3}_{n\ \text{раз}}) + \ldots$$

Для каждого $j \in \{1, \ldots, m\}$ проведём следующее обогащение модели $\mathfrak{A}_0$:

На множестве $\{x \mid f_j(x)$ *определено и* $f_j(x) \neq x\}$ определим структуру модели $\mathfrak{B} \leftrightharpoons Q(n_0) + Q(n_1) + \ldots$, в качестве предпорядка которой выступает $\leqslant_j$, а в качестве одноместной функции выступает h_j^0. Числа $n_0, n_1, \ldots$ выбираются так, чтобы множество $\{n_0, n_1, \ldots\}$ было Δ_2^0-множеством, не являющимся областью значений никакой предельно монотонной функции. Проинтерпретируем функции h_j^1 и h_j^2. Функция h_j^1 действует из множества $\{x \mid f_j(x) = x\}$ в множество $\{y \mid h_j^0(y) = y\}$ следующим образом. Для всех натуральных чисел t h_j^1 — это изоморфизм множеств $Q(t+2, \ldots, t+2) \cap \{x \mid f_j(x) = x\}$ и $Q(n_t) +$

$Q(n_{t+1})+\ldots\cap\{y \mid h_j^0(y)=y\}$ как порядков относительно $\leqslant$ и $\leqslant_j$ соответственно. (Поскольку указанные множества образуют плотные линейные порядки с наименьшим элементом, то такой изоморфизм существует и единственный.) Функция h_j^2 действует из множества $\{y \mid h_j^0(y)=y\}$ в множество $\{x \mid f_j(x)=x\}$ следующим образом. Для всех натуральных чисел t h_j^2 — это изоморфизм множеств $Q(n_t)\cap\{y \mid h_j^0(y)=y\}$ и $Q(t+2,\ldots,t+2)+Q(t+3,\ldots,t+3)+\ldots\cap\{x \mid f_j(x)=x\}$ как порядков относительно $\leqslant_j$ и $\leqslant$ соответственно.

Обозначим получившуюся модель через $\mathfrak{B}_0$. А теорию этой модели $Th(\mathfrak{B}_0)$ — через T. Это и есть требуемая теория.

Хусаинов, Нис и Шор [13] доказали, что теория $T_1 \leftrightharpoons Th(\mathfrak{B})$ имеет в точности три счётные модели, среди которых только насыщенная вычислима. Несложно видеть, что $\omega(T)\leqslant\omega(T_0)\times\omega(T_1)$, поэтому T эренфойхтова. Далее заметим, что если $\mathfrak{M}\models T$, то в части модели $\mathfrak{M}$, определяемой множествами $\{x \mid f_t(x)=x\}$, $1\leqslant t\leqslant n$, реализуется в точности один из **Случаев 0, … , n+1,** описанных выше. Точно так же, если взять $j\in\{1,\ldots,m\}$, то в части модели $\mathfrak{M}$, определяемой множеством $\{x \mid h_j^0(x)=x\}$, реализуется в точности один из трёх аналогичных случаев.

Зафиксируем $j\in\{1,\ldots,m\}$. Покажем, что в части модели $\mathfrak{M}$, определяемой множествами $\{x \mid f_t(x)=x\}$, $1\leqslant t\leqslant n$, реализуется **Случай j,** то есть существует предел a_j, имеющий бесконечно много f_j-прообразов, тогда и только тогда, когда в части модели $\mathfrak{M}$, определяемой множеством $\{x \mid h_j^0(x)=x\}$, существует предел b_j. Действительно, если имеется предел b_j, но нет предела a_j, то должен существовать элемент a, имеющий бесконечно много f_j-прообразов, такой что $h_j^1(a)=b_j$, кроме того, должен существовать элемент $a'<a$, который тоже имеет бесконечно много f_j-прообразов, а значит, должно выполняться $h_j^1(a')=b_j$, что невозможно. Случай, когда есть предел a_j, но нет предела b_j рассматривается аналогично, только вместо h_j^1 нужно взять h_j^2.

Таким образом мы имеем, что тип изоморфизма модели $\mathfrak{M}$ однозначно определяется типом изоморфизма её части, определяемой множествами $\{x \mid f_t(x)=x\}$, $1\leqslant t\leqslant n$. А значит, *теория T имеет $n+2$ счётные модели.*

Несложно видеть, что для вычислимости модели $\mathfrak{M}$ теории T необходима и достаточна вычислимость модели, определяемой ограничением $\mathfrak{M}$ на множества $\{x \mid f_t(x)=x\}$, $1\leqslant t\leqslant n$, и моделей, определяемых ограничением $\mathfrak{M}$ на множества $\{x \mid h_j^0(x)=x\}$, $1\leqslant j\leqslant n$. Первая несомненно вычислима. Последние, как уже отмечалось, вычислимы тогда и только тогда, когда существует элемент, имеющий бесконечно много h_j^0-прообразов, но не существует наименьшего среди таких элементов. Таким образом, вычислимыми будут модели, соответствующие **Случаям m+1, ... , n,** а также насыщенная модель. □

Список литературы

1. Ash C. Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy / C. Ash, J. Knight. – Elsevier, 2000. – 270 p.
2. Chang C. C. Model Theory / C. C. Chang, H. J. Keisler. – North Holland, 1990. – 350 p.
3. Gavryushkin A. Complexity of Ehrenfeucht models / A. Gavryushkin // Algebra and Logic. – 2006. – V. 45, No. 5. – P.289–295.
4. Gavryushkin A. Spectra of computable models for Ehrenfeucht theories / A. Gavryushkin // Algebra and Logic. – 2007. – V. 46, No. 3. – P. 149–157.
5. Gavryushkin A. On constructive models of theories with linear Rudin-Keisler ordering / A. Gavryushkin // Journal of Logic and Computation. – doi: 10.1093/logcom/exq043. – 2010.
6. Gavryushkin A. Computable limit models / A. Gavryushkin // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер.: Математика. – 2009. – Т. 2, №. 2. – С. 56–61.
7. Gavryushkin A. Computable models of Ehrenfeucht theories / A. Gavryushkin // submitted.
8. Goncharov S. S. Strong constructivizability of homogeneous models / S. S. Goncharov // Algebra and Logic. – 1973. – V.17, No.4. – P. 247–263.
9. Goncharov S. S. A totally transcendental decidable theory without constructivizable homogeneous models / S. S. Goncharov // Algebra and Logic– 1980. – V. 19, No. 2. – P. 85–93.
10. Harrington L. Recursively presented prime models / L. Harrington // Journal of Symbolic Logic. – 1974. – V. 39, No. 2. – P. 305–309.
11. Khisamiev N. G. Criterion for Constructivizability of a Direct Sum of Cyclic p-groups / N. G. Khisamiev // Izvestiya Akademii Nauk Kazakhskoi SSR. Seriya Fiziko-Matematicheskaya. – 1981. – V. 86, No. 1. – P. 51–55.
12. Khoussainov B. A computable $\aleph_1$-categorical structure whose theory computes true arithmetic / B. Khoussainov, A. Montalban// Journal of Symbolic Logic. – 2010. – V. 75, No. 2. – P. 728–740.
13. Khoussainov B. Computable Models of Theories with Few Models / B. Khoussainov, A. Nies, R. Shore// Notre Dame Journal of Formal Logic. – 1997. – V. 38, No. 2.– P. 165–178.
14. Millar, T. Homogeneous models and decidability / T. Millar // Pacific Journal of Mathematics. – 1980. – V. 91.– No. 2.
15. Morley M. Decidable Models / M. Morley // Israel Journal of Mathematics.– 1976. – No. 25. – P. 233–240.
16. Peretyat'kin M. G. On complete theories with a finite number of denumerable models / M. G. Peretyat'kin // Algebra and Logic. – 1973. – V.12, No.5. – P. 310–326.
17. Soare R. I. Recursively Enumerable Sets and Degrees. A Study of Computable Functions and Computably Generated Sets / R. I. Soare. – Springer Verlag : Berlin-New York, 1987.
18. Sudoplatov S. V. Complete theories with finitely many countable models / S. V. Sudoplatov// Algebra and Logic. – 2004. – V. 43, No. 1. – P. 62–69.

A. Gavryushkin
A new spectrum of computable models

Abstract. In the paper we prove that there exist models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of an Ehrenfeucht theory such that $\mathfrak{A}$ is elementary embeddable into $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ is elementary embeddable into $\mathfrak{A}$, model $\mathfrak{A}$ has a computable presentation, model $\mathfrak{B}$ has no computable presentation. This theorem together with the work [6] is the key result for the theorem describing computable models spectra of Ehrenfeucht theories.

Keywords: Ehrenfeucht theory; computable model; decidable model; prime model; homogeneous model.

Гаврюшкин Александр Николаевич, кандидат физико-математических наук, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)955256 (`gavryushkin@gmail.com`)

Alexander Gavryushkin, Irkutsk State University, 1 K. Marks St., Irkutsk 664003. Phone: (3952)955256 (`gavryushkin@gmail.com`)