Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 3. С. 21—27

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 518.517

Методы нелокального улучшения в невыпуклых задачах оптимального управления специального вида *

В. Г. Антоник
Иркутский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача минимизации нелинейного функционала специальной структуры на траекториях билинейной управляемой системы. На основе нелокальных оценок приращения целевого функционала конструируются методы решения этой задачи. Обсуждаются вопросы, связанные с вычислительной эффективностью представленных алгоритмов.

Ключевые слова: оптимальное управление; вогнутая задача; метод улучшения.

1. Вогнутая задача оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимизации функционала

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T \Big(F_0(x(t),t) + F_1(u(t),t)\Big)dt \to \min\,, \tag{1.1}$$

связанного с линейной по состоянию динамической системой

$$\dot{x} = A(u,t)x + b(u,t)\,,\ x(t_0) = x^0 \tag{1.2}$$

в классе допустимых управлений

$$V = \Big\{u \in PC(T):\ u(t) \in U,\, t \in T = [t_0, t_1]\Big\}. \tag{1.3}$$

Предположим, что в задаче (1.1)–(1.3) матричная функция $A(u,t)$, вектор-функция $b(u,t)$ и функция $F_1(u,t)$ линейны по $u \in U$ и непрерывны по $t \in T$, функция $\varphi(x)$ непрерывно-дифференцируема по

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 08–01–00709.

$x \in R^n$, функция $F_0(x,t)$ непрерывна по $t \in T$ и непрерывно-дифференцируема по x, множество $U \subset R^r$ – выпуклый компакт.

В дополнение к этому предположим, что функции $\varphi(x)$ и $F_0(x,t)$ вогнуты по x.

Введем в рассмотрение функцию Понтрягина для задачи (1.1)–(1.3)

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi,\, f(x,u,t)\rangle - F_0(x,t) - F_1(u,t)\,,$$

где $f(x,u,t) = A(u,t)x + b(u,t)$, а сопряжённая вектор-функция $\psi(t)$ удовлетворяет системе

$$\dot{\psi} = -A(u,t)^T\psi + F_{0x}(x,t)\,,\ \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1))\,. \tag{1.4}$$

Понятно, что принцип максимума в задаче (1.1)–(1.3) не является достаточным условием оптимальности. Следуя схеме [1], проведём анализ задачи на предмет построения нелокальной процедуры улучшения, не требующей параметрического поиска. Её основу составляет точная оценка для приращения функционала (1.1).

Пусть u, v – допустимые управления в задаче (1.1)–(1.3), $x(t,u)$, $x(t,v)$, $t \in T$ – соответствующие фазовые траектории.

Для фазового приращения $\Delta x(t) = x(t,v) - x(t,u)$ справедливо уравнение

$$\Delta\dot{x} = A(u(t),t)\Delta x + \Delta_{v(t)} f(x(t,v),u(t),t)\,,\ \Delta x(t_0) = 0\,, \tag{1.5}$$

где $\Delta_v f(x,u,t) = f(x,v,t) - f(x,u,t)$.

Запишем выражение для приращения функционала

$$\Delta_v\Phi(u) = \langle \varphi_x(x(t_1,u)), \Delta x(t_1)\rangle +$$
$$+ \int\limits_T \Big(\langle F_{0x}(x(t,u),t), \Delta x(t)\rangle + \Delta_{v(t)}F_1(u(t),t)\Big)dt +$$
$$+ o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|) + \int\limits_T o_F(\|\Delta x(t)\|)dt$$

и найдём для него специальное представление, использующее решение $\psi(t,u)$ сопряжённой системы.

В силу систем (1.4), (1.5) получаем

$$\frac{d}{dt}\langle \psi(t,u),\, \Delta x(t)\rangle = \langle \psi(t,u),\, \Delta_{v(t)} f(x(t,v),u(t),t)\rangle =$$
$$= \Delta_{v(t)} H(\psi(t,u), x(t,v), u(t), t)\,.$$

После интегрирования по $t \in T$ получим соотношение

$$\Delta_v\Phi(u) = -\int\limits_T \Delta_{v(t)} H(\psi(t,u), x(t,v), u(t), t)dt +$$
$$+ o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|) + \int\limits_T o_F(\|\Delta x(t)\|)dt\,.$$

Учитывая свойство вогнутости функций $\varphi(x)$ и $F_0(x,t)$, приходим к *первой оценке приращения функционала* на паре u, v

$$\Delta_v \Phi(u) \leqslant -\int_T \Delta_{v(t)} H(\psi(t,u), x(t,v), u(t), t)dt \,. \tag{1.6}$$

Очевидно, что если в задаче (1.1)–(1.3) функции $\varphi(x)$ и $F_0(x,t)$ – линейны по x, то (1.6) реализуется в виде равенства. Иначе говоря, в этом случае мы имеем дело с формулой приращения функционала.

Поставим задачу об улучшении управления $u \in V$: найти управление $w \in V$ со свойством $\Delta_w \Phi(u) < 0$.

Опишем первую процедуру улучшения:
1) по заданной допустимой паре $(u(t),\, x(t,u))$ вычислим сопряжённую траекторию $\psi(t,u)$, $t \in T$;
2) сформируем вспомогательное управление

$$v(x,t) = P_U(u(t) + H_u(\psi(t,u), x, t)) \,,\ x \in R^n \,,\ t \in T \,,$$

где P_U – оператор проецирования на множество U в евклидовой норме;
3) найдём решение $x(t)$, $t \in T$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, v(x,t), t) \,,\ x(t_0) = x^0, \tag{1.7}$$

4) сформируем управление $w(t) = v(x(t),t)$, $t \in T$.

Проведём обоснование процедуры. Очевидно, что решение $x(t)$ системы (1.7) порождается управлением $v(t)$, т. е. $x(t) = x(t,v)$. Поскольку $v(t) = P_U(u(t) + H_u(\psi(t,u), x(t,v), t))$, $t \in T$ и в силу свойства проекции получаем неравенство

$$\Delta_{v(t)} H(\psi(t,u), x(t,v), u(t), t) \geqslant 0,\ t \in T.$$

На основании оценки (1.6) заключаем, что $\Delta_v \Phi(u) \leqslant 0$.

Понятно, что равенство $v(t) = u(t)$, $t \in T$ означает выполнение принципа максимума для управления $u(t)$ в задаче (1.1)–(1.3):

$$u(t) = P_U(u(t) + H_u(\psi(t,u), x(t,u), t)) \,,\ t \in T \,.$$

2. DC-задача оптимального управления

Продолжим анализ задачи (1.1)–(1.3). Снимем предположение о вогнутости функции $\varphi(x)$ и подчиним её условию

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \,, \tag{2.1}$$

где $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{2}\langle x,\, Cx\rangle$, $C \geqslant 0$, а $\varphi_2(x)$ – вогнутая нелинейная. В результате получили так называемую d.c.-задачу. Её анализ проведём по следующей схеме.

В дополнение к сопряжённой системе (1.4) рассмотрим матричную задачу относительно $(n \times n)$ симметричной матричной функции $Q(t)$, $t \in T$

$$\dot{Q} = -A(u,t)^T Q - QA(u,t)\,,\ Q(t_1) = -C\,. \tag{2.2}$$

Составим выражение для приращения функционала

$$\Delta_v \Phi(u) = \langle \varphi_x(x(t_1,u)), \Delta x(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\langle \Delta x(t_1), C\Delta x(t_1)\rangle +$$

$$+ \int_T \Big(\langle F_{0x}(x(t,u),t), \Delta x(t)\rangle + \Delta_{v(t)} F_1(u(t),t) \Big) dt +$$

$$+ o_{\varphi_2}(\|\Delta x(t_1)\|) + \int_T o_F(\|\Delta x(t)\|) dt$$

Пусть $\psi(t,u)$, $Q(t,u)$, $t \in T$ – решение векторно-матричной задачи Коши (1.4), (2.2). Тогда

$$\frac{d}{dt}\Big(\langle \psi(t,u),\, \Delta x(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle \Delta x(t), Q(t,u)\Delta x(t)\Big) =$$

$$= \langle \psi(t,u) + Q(t,u)\Delta x(t),\, \Delta_{v(t)} f(x(t,v), u(t), t)\rangle =$$

$$= \Delta_{v(t)} H(\psi(t,u) + Q(t,u)\Delta x(t), x(t,v), u(t), t)\,.$$

Отсюда, после интегрирования по $t \in T$ и учёта свойства вогнутости функций $\varphi_2(x)$ и $F_0(x,t)$ получаем *вторую оценку приращения функционала* на паре u, v

$$\Delta_v \Phi(u) \leqslant -\int_T \Delta_{v(t)} H(\psi(t,u) + Q(t,u)\Delta x(t), x(t,v), u(t), t) dt\,. \tag{2.3}$$

Как и ранее, решим задачу об улучшении управления $u \in V$. С этой целью опишем вторую процедуру улучшения:
1) по заданной допустимой паре $(u(t),\, x(t,u))$ вычислим сопряжённую траекторию $\psi(t,u)$ и матричную функцию $Q(t,u)$, $t \in T$;
2) сформируем вспомогательное управление

$$v(x,t) = P_U(u(t) + H_u(p(x,t), x, t))\,,\ x \in R^n\,,\ t \in T\,,$$

где $p(x,t) = \psi(t,u) + Q(t,u)(x - x(t,u))$;
3) найдём решение $x(t)$, $t \in T$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, v(x,t), t)\,,\ x(t_0) = x^0;$$

4) сформируем управление $w(t) = v(x(t), t)$, $t \in T$.

Обоснование процедуры вполне очевидно:

$$x(t) = x(t, v) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = P_U(u(t) + H_u(p(x(t, v), t), x(t, v), t)),\ t \in T\,.$$

Следовательно, $\Delta_{v(t)} H(p(x(t, v), t), x(t, v), u(t), t) \geqslant 0$, $t \in T$. В силу оценки (2.3) имеем $\Delta_v \Phi(u) \leqslant 0$.

Здесь также равенство $v(t) = u(t)$, $t \in T$ означает выполнение принципа максимума для управления $u(t)$ в задаче (1.1)–(1.3), (2.1).

3. Вычислительное сравнение

Перейдём на уровень компьютерных расчётов. Используя процедуры, представленные в п. 1, 2 нетрудно построить методы итерационного улучшения в соответствующих задачах. Для удобства дальнейшего изложения обозначим их как M_1 и M_2. Кроме того, в рамках вычислительного эксперимента было проведено дополнительное сравнение методов M_1 и M_2 с известным методом проекции градиента (МПГ), который в рассматриваемых задачах требует на каждой итерации процедуры параметрического поиска.

Расчёты проводились в рамках задачи (1.1)–(1.3). Для того, чтобы получить из неё d.c.-задачу, функция $\varphi(x)$ была представлена в виде

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2}\langle x, Mx\rangle + \frac{1}{2}\langle x, Mx\rangle\,,$$

где $M \geqslant 0$ – заданная $(n \times n)$ матрица. Тогда

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\langle x, Mx\rangle\,,\ \varphi_2(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2}\langle x, Mx\rangle\,.$$

Далее, в качестве базового примера была выбрана билинейная модель со скалярным управлением

$$\varphi(x) = \langle c, x\rangle\,,\ F_0(x, t) \equiv 0\,,\ F_1(u, t) \equiv 0\,,$$

$$A(u, t) = A_0 + uA_1\,,\ b(u, t) = b_0 + ub_1\,,$$

$$U = [u^-, u^+]\,.$$

Пример 1.

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},\ \ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ \ M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$u^- = -2\,, \ u^+ = 2\,, \ t_0 = 0\,, \ t_1 = 1\,.$$

Пример 2.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$b_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \ b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ x^0 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$u^- = -1\,, \ u^+ = 1\,, \ t_0 = 0\,, \ t_1 = 1\,.$$

Пример 3.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \ b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u^- = -1\,, \ u^+ = 1\,, \ t_0 = 0\,, \ t_1 = 4\,.$$

Начальное управление для всех примеров $u^0(t) = 0$, $t \in T$.

Критерием остановки методов являлось совпадение в пределах заданной точности значений функционалов на двух соседних итерациях: $\Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1}) \leqslant \varepsilon$. Точность ε была выбрана единой для трёх методов и равнялась 10^{-7}.

Пример 1.

	$М_1$	$М_2$	МПГ
Кол-во итераций	29	11	68
Кол-во интегрирований задач Коши	59	40	236
Значение функционала	-42.837	-42.837	-42.837

Пример 2.

	$М_1$	$М_2$	МПГ
Кол-во итераций	12	5	47
Кол-во интегрирований задач Коши	25	19	154
Значение функционала	-2.114	-2.114	-2.114

Пример 3.

	$М_1$	$М_2$	МПГ
Кол-во итераций	59	25	167
Кол-во интегрирований задач Коши	119	89	552
Значение функционала	-15.764	-15.764	-15.764

Как итог, можно сделать вывод, что с точки зрения вычислительных затрат метод $М_2$ оказался эффективнее по сравнению и с $М_1$, и с МПГ.

Список литературы

1. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В. А. Срочко. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 160 с.

V. G. Antonik

Methods of non-local improvement in non-convex optimal control problems of special kind

Abstract. The optimal control problem for bilinear dynamic system is considered. In this problem the cost functional is presented by concave nonlinear function. Methods of control improvement are constructed.

Keywords: optimal control, concave functional, improvement method

Антоник Владимир Георгиевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952) 24-22-12 (vga@math.isu.ru)

Antonik Vladimir, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 associated professor, Phone: (3952) 24-22-12 (vga@math.isu.ru)