Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 1. С. 36—41

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.988.67

О малых решениях нелинейных уравнений в секториальных окрестностях *

Р. Ю. Леонтьев
Иркутский государственный университет

Аннотация. Рассматривается операторное уравнение вида $B(\lambda)x + R(x,\lambda) = 0$. Линейный оператор $B(\lambda)$ не имеет ограниченного обратного при $\lambda = 0$. Нелинейный оператор $R(x,\lambda)$ непрерывен в окрестности нуля, $R(0,0) = 0$. Получены достаточные условия существования непрерывного решения $x(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$ в некотором открытом множестве S линейного нормированного пространства Λ. Нуль пространства Λ принадлежит границе множества S. Предложен способ построения решения с максимальным порядком малости в окрестности точки $\lambda = 0$.

Ключевые слова: нелинейное уравнение; ветвление решений; минимальная ветвь.

1. Введение

Пусть X, Y — банаховы пространства, Λ — линейное нормированное пространство. Рассматривается нелинейное операторное уравнение вида

$$B(\lambda)x + R(x,\lambda) = 0, \tag{1.1}$$

где $B(\lambda)$ — замкнутый линейный оператор с плотной в пространстве X областью определения, не зависящей от параметра $\lambda \in \Lambda$. Нелинейный оператор $R : X \times \Lambda \to Y$ — непрерывен в окрестности нуля по x и λ, $R(0,0) = 0$.

Будем предполагать, что оператор $B(\lambda)$ имеет обратный оператор при $\lambda \in S$, причем

$$\left\|B^{-1}(\lambda)\right\| = O\Big(\frac{1}{a(\lambda)}\Big) \text{ при } S \ni \lambda \to 0, \tag{1.2}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Иркутского государственного университета, индивидуальный исследовательский грант 111—09—001/A2.

где S — открытое множество в пространстве Λ, границе которого принадлежит точка $\lambda = 0$, $a(\lambda) : S \subset \Lambda \to (0, +\infty)$ — положительный непрерывный функционал, $a(0) = 0$. Множество S назовем *секториальной окрестностью нуля.*

Требуется построить решение уравнения (1.1) максимального порядка малости ("минимальную ветвь" малого решения) $x(\lambda) \to 0$ при $S \ni \lambda \to 0$ (далее, кратко, при $\lambda \to 0$).

Цель этой статьи — доказательство теорем существования и единственности минимальных ветвей решений уравнения (1.1) в областях вида (2.1) с векторным параметром λ в секториальной окрестности S в общем случае, когда оператор $B(0)$ может не быть нормально разрешимым и $\dim N\big(B(0)\big) \geq 1$.

На основании доказанных теорем искомая ветвь решения строится методом последовательных приближений, сходящимся в области S при нулевом начальном приближении.

Если $B(0)$ — фредгольмов оператор, то для построения малых решений уравнения (1.1) можно использовать классические результаты теории ветвления решений нелинейных уравнений [1]. Решения максимального порядка малости в некоторых случаях строились в работах [2, 3, 4].

2. Достаточные условия существования малых решений и метод последовательных приближений

Введем множество

$$\Omega = \big\{(x, \lambda) \in X \times \Lambda,\ \|x\| \leq a(\lambda) r,\ \lambda \in S\big\}. \tag{2.1}$$

Приведем достаточные условия существования малого решения в некоторой области $\Omega_0 \subseteq \Omega$ с указанием способа построения решения и его асимптотики.

Теорема 1. *Пусть в области Ω выполнено условие (1.2) и при этом:*
1) *справедливо неравенство*

$$\|R(x_1, \lambda) - R(x_2, \lambda)\| \leq L(\lambda) r \,\|x_1 - x_2\|\,, \tag{2.2}$$

где $L(\lambda) = O\big(a(\lambda)\big)$ при $\lambda \to 0$;
2) *имеет место оценка $\|R(0, \lambda)\| = o\big(a^2(\lambda)\big)$ при $\lambda \to 0$.*
Тогда найдется область $\Omega_0 = \big\{\,(x, \lambda) \in X \times \Lambda,\ \|x\| \leq a(\lambda) r_0,\ \lambda \in S_0 \subseteq S, 0 < r_0 \leq r\big\}$, в которой существует единственное решение уравнения (1.1) $x(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$. Последовательность $\{x_n\}$ $x_0 = 0$, где x_n строится методом последовательных приближений (см. формулу (2.4) в доказательстве), сходится к этому решению.

Доказательство. С помощью замены $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$ уравнение (1.1) приведем к эквивалентной форме

$$V = -\frac{1}{a(\lambda)} B^{-1}(\lambda) R\big(a(\lambda)V, \lambda\big) \equiv \Phi(V, \lambda). \tag{2.3}$$

При этом ввиду оценки (2.2)

$$\|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| \le \left\| B^{-1}(\lambda) \right\| L(\lambda) r \, \|V_1 - V_2\|$$

при $\lambda \in S$, $\|V_i\| \le r$.

Ввиду оценки (1.2) $\|B^{-1}(\lambda)\| \, L(\lambda) \le C$ при $\lambda \in S$, где $C > 0$ — фиксированная постоянная. Но тогда $\|\Phi(V_1, \lambda) - \Phi(V_2, \lambda)\| \le Cr \, \|V_1 - V_2\|$. Пусть $0 < q < 1$. Выберем $r_0 \le \min\{q/C, r\}$. Тогда оператор $\Phi(V, \lambda)$ будет сжимающим в шаре $\|V\| \le r_0$ при $\forall \lambda \in S$.

Далее,

$$\|\Phi(V, \lambda)\| \le \|\Phi(V, \lambda) - \Phi(0, \lambda)\| + \|\Phi(0, \lambda)\| \le q r_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \left\| B^{-1}(\lambda) \right\| \|R(0, \lambda)\| .$$

В силу оценки (1.2) и условия 2) теоремы 1 существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при $\forall \lambda \in S_0$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{a(\lambda)} \left\| B^{-1}(\lambda) \right\| \|R(0, \lambda)\| \le (1 - q) \, r_0$$

и, следовательно,

$$\|\Phi(V, \lambda)\| \le r_0 \text{ при } \lambda \in S_0, \ \|V\| \le r_0.$$

Таким образом, на основании принципа сжимающих отображений уравнение (2.3) имеет единственное решение, последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = -B^{-1}(\lambda) R(x_{n-1}, \lambda), \tag{2.4}$$

$x_0 = 0$, сходится при $\forall \lambda \in S_0$ к этому решению. $\square$

Замечание 1. В условиях теоремы 1 в шаре $\|x\| \le a(\lambda) r_0$ при $\lambda \in S_0$ существует единственное малое решение. Заметим, что порядок этого решения, как бесконечно малой в нуле, может оказаться выше порядка бесконечно малой величины $a(\lambda)$.

В области $\|x\| \ge a(\lambda) r_0$ уравнение (1.1) может иметь и другие малые непрерывные решения, очевидно с более низким порядком малости, чем порядок решения $x(\lambda)$, единственного в шаре $S\big(0, a(\lambda) r_0\big)$, к которому сходится последовательность (2.4).

Следующая теорема позволяет ослабить условие 2) теоремы 1, заменив его на предположение существования непрерывной функции $b(\lambda) : S \to Y$, $b(0) = 0$, такой что

$$\|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| = o\big(a^2(\lambda)\big) \text{ при } \lambda \to 0. \tag{2.5}$$

В теореме 2 предполагается еще, что

$$B(\lambda) = B + a(\lambda)A + \omega(\lambda), \tag{2.6}$$

где B, A — замкнутые линейные операторы с плотными в банаховом пространстве X областями определения, $D(B) \subseteq D(A)$, $\omega(\lambda)$ — линейная непрерывная оператор-функция, $\|\omega(\lambda)\| = o\big(a(\lambda)\big)$ при $\lambda \to 0$.

В доказательстве теоремы 2 как и в теореме 1, используется принцип сжимающих отображений и эквивалентное уравнение (2.3). При этом часть доказательства, констатирующая сжимаемость соответствующего оператора, будет опускаться, как подобная доказательству в теореме 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены оценки* (1.2), (2.2), (2.5), *причем оператор* $B(\lambda)$ *имеет вид* (2.6). *Пусть линейное уравнение* $Bx = b(\lambda)$ *имеет при* $\lambda \in S$ *решение* $x^*(\lambda)$, *причем* $\|x^*(\lambda)\| = o\big(a(\lambda)\big)$, $\|Ax^*(\lambda)\| = o\big(a(\lambda)\big)$. *Тогда в области* Ω_0 *существует единственное малое решение уравнения* (1.1).

Доказательство. Аналогично теореме 1 уравнение (1.1) с помощью замены $x(\lambda) = a(\lambda)V(\lambda)$ приводим к виду

$$V = \Phi(V, \lambda), \tag{2.7}$$

где оператор $\Phi(V, \lambda)$ определен в формуле (2.3) и на основании доказательства теоремы 1 в шаре $\|V\| \le r_0$ при $\forall \lambda \in S$ является сжимающим.

Покажем, что найдется область $S_0 \subseteq S$, такая, что при любом $\lambda \in S_0$ $\Phi : S(0, r_0) \to S(0, r_0)$. Действительно, воспользовавшись установленной сжимаемостью оператора $\Phi(V, \lambda)$, представлением (2.6) и оценками (1.2), (2.2), (2.5) имеем цепочку неравенств:

$$\|\Phi(V, \lambda)\| \le qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \left\|B^{-1}(\lambda)R(0, \lambda)\right\|$$

$$\le qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \left\|B^{-1}(\lambda)\right\| \|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)} \left\|B^{-1}(\lambda)Bx^*(\lambda)\right\|$$

$$\le qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \left\|B^{-1}(\lambda)\right\| \|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)} \left\|B^{-1}(\lambda)\big(B(\lambda) - a(\lambda)A - \omega(\lambda)\big)x^*(\lambda)\right\|$$

$$\le qr_0 + \frac{1}{a(\lambda)} \left\|B^{-1}(\lambda)\right\| \|R(0, \lambda) - b(\lambda)\| + \frac{1}{a(\lambda)} \|x^*(\lambda)\| + \left\|B^{-1}(\lambda)Ax^*(\lambda)\right\|$$

$$+ \frac{1}{a(\lambda)} \left\|B^{-1}(\lambda)\omega(\lambda)x^*(\lambda)\right\|.$$

Здесь в силу условий теоремы 2 последние 4 слагаемых стремятся к нулю при $\lambda \to 0$. Следовательно, выбором области $S_0 \subseteq S$ сумму этих четырех слагаемых можно сделать меньше, чем $(1 - q)\, r_0$ при $\forall \lambda \in S_0$. Поэтому существует секториальная окрестность нуля $S_0 \subseteq S$ такая, что при $\forall \lambda \in S_0$ $\|\Phi(V, \lambda)\| \le r_0$ в шаре $\|V\| \le r_0$. □

Замечание 2. Если B — фредгольмов оператор и уравнение $Bx = b(\lambda)$ разрешимо, то можно положить $x^*(\lambda) = \Gamma b(\lambda)$, где Γ — оператор В.А. Треногина (см. [5]). Если при этом $\|b(\lambda)\| = o\big(a(\lambda)\big)$, то очевидно выполнены оценки $\|x^*(\lambda)\| = o\big(a(\lambda)\big)$ и $\|Ax^*(\lambda)\| = o\big(a(\lambda)\big)$.

Пример 1. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение:

$$\int_0^1 tsx(s)\,ds + \lambda x(t) - \int_0^1 x^2(s)\,ds - t\lambda^3 = 0, \quad x(t) \in C_{[0,1]}. \tag{2.8}$$

Здесь

$$B(\lambda)x = \int_0^1 ts\,x(s)\,ds + \lambda x(t),$$

$$R(x,\lambda) = -\int_0^1 x^2(s)\,ds - t\lambda^3.$$

Обратный оператор $B^{-1}(\lambda)$ имеет вид

$$B^{-1}(\lambda)f = \frac{1}{\lambda}f(t) - \frac{3t}{(3\lambda+1)\lambda}\int_0^1 s\,f(s)\,ds \tag{2.9}$$

и удовлетворяет оценке (1.2) при $a(\lambda) = |\lambda|$.

Далее, легко видеть, что в некотором шаре $\|x\| \le |\lambda| r$ выполнено условие 1) теоремы 1 с коэффициентом $L(\lambda) = 2|\lambda|$ и условие 2) теоремы 1.

Таким образом, на основании теоремы 1 уравнение (2.8) имеет в некотором шаре $\|x(t)\| \le |\lambda| r_0 \le |\lambda| r$ при $\forall \lambda : 0 < |\lambda| < \rho$ единственное решение, которое будет являться решением максимального порядка малости среди всех малых решений данного уравнения из окрестности нуля.

Укажем регулярный способ построения искомого решения методом последовательных приближений. Используя замену $x(t) = \lambda V(t)$ и явный вид оператора (2.9), уравнение (2.8) сведем к регулярному виду:

$$V(t) = \left(1 - \frac{3t}{6\lambda+2}\right)\int_0^1 V^2(s)\,ds + \frac{3\lambda^2 t}{3\lambda+1}.$$

Единственное малое решение последнего можно построить методом последовательных приближений

$$V_{n+1}(t) = \left(1 - \frac{3t}{6\lambda+2}\right)\int_0^1 V_n^2(s)\,ds + \frac{3\lambda^2 t}{3\lambda+1},$$

выбрав в качестве начального приближения $V_0 = 0$ или методом неопределенных коэффициентов в виде ряда $V(t) = \sum\limits_{i=2}^{\infty} V_i(t)\lambda^i$.

Построенное решение уравнения (2.8) будет иметь вид:

$$x(t) = 3t\lambda^3 - 9t\lambda^4 + \frac{45t+6}{2}\lambda^5 - \frac{81t+36}{2}\lambda^6 + \ldots$$

Список литературы

1. Вайнберг, М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
2. Леонтьев, Р. Ю. Теоремы о неявном операторе в секториальных квазиокрестностях и минимальные ветви решений нелинейных уравнений / Р. Ю. Леонтьев // Вестник ЮУрГУ. – 2004. – № 15(115), вып. 1. – С. 37–41.
3. Леонтьев, Р. Ю. Теорема о неявном операторе в секториальных областях / Р. Ю. Леонтьев // Известия ИГУ. – 2009. – Т. 2, № 1. – С. 320–323.
4. Сидоров, Н. А. Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы / Н. А. Сидоров // Нелинейные граничные задачи. – Донецк: Институт прикладной математики и механики, 2004. – Вып. 14. – С. 161–164.
5. Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.

R. Yu. Leontyev

Small solutions of nonlinear equations in sectorial neighbourhoods

Abstract. We consider nonlinear operator equation $B(\lambda)x + R(x, \lambda) = 0$. Linear operator $B(\lambda)$ does not have bounded inverse operator at $\lambda = 0$. Nonlinear operator $R(x, \lambda)$ is continuous in neighborhood of zero, $R(0, 0) = 0$. We have deduced sufficient conditions of existence of the continuous solution $x(\lambda) \to 0$ as $\lambda \to 0$ in some open set S of linear normalized space Λ. Zero belongs to frontier of set Λ. We have proposed way of construction the solution of maximum infinitesimal order in neighborhood of zero. The initial estimate is null element.

Keywords: nonlinear operator equation, ramification of solutions, minimal branch

Леонтьев Роман Юрьевич, аспирант, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (lev_roma@bk.ru)

Roman Leontyev, graduate student, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 Phone: (3952)242210 (lev_roma@bk.ru)