Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 1. С. 54—60

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.937, 517.983.5

Вырожденное интегро-дифференциальное уравнение в банаховых пространствах и его приложение *

С. С. Орлов
Иркутский государственный университет

Аннотация. В статье изучается задача Коши для линейного интегро-дифференциального операторного уравнения с интегральной частью Вольтерра типа свертки и фредгольмовым оператором при старшей производной. Получены достаточные условия существования и единственности классического (сильно непрерывно дифференцируемого N раз) решения, а также явные формулы для его восстановления. Эти результаты применены к исследованию начально-краевой задачи математической теории вязкоупругости.

Ключевые слова: банахово пространство; интегро-дифференциальное уравнение; обобщенная жорданова структура; фредгольмов оператор.

1. Постановка задачи

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$Bx^{(N)}(t) - Ax(t) - \int_0^t k(t-s)x(s)ds = f(t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1,\ \ldots,\ x^{(N-1)}(0) = x_{N-1}, \tag{2}$$

где $x(t)$, $f(t)$ — неизвестная и заданная функции неотрицательного вещественного аргумента t со значениями в банаховых пространствах E_1 и E_2 соответственно, B, A — замкнутые линейные операторы с плотными в E_1 областями определения, ядро $k(t)$ — однопараметрическое семейство класса $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ операторов с аналогичными свойствами и областью определения $D(k)$, не зависящей от t. Предполагается, что

$$D(B) \subseteq D(A) \cap D(k),\ \overline{D(B)} = \overline{D(A) \cap D(k)} = E_1,$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг.

оператор-функция $k(t)$ сильно непрерывна на $D(k)$, а оператор B фредгольмов, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$.

Следуя идее работы [2], покажем, что задача Коши (1)-(2) в такой постановке не всегда имеет классическое решение, под которым понимается функция класса $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}_+, E_1)$, обращающая в тождество уравнение (1) и удовлетворяющая начальным условиям (2).

При $N = 1$ аналогичное исследование задачи Коши (1)-(2) проведено М. В. Фалалеевым методами теории фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах [3], [5], решены задачи электротехники и теории вязкоупругости [3]. В настоящей работе рассмотрен случай $N \geq 2$.

2. Построение классического решения

Обозначим через $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ базисы в $N(B)$ и $N(B^*)$ соответственно. Будем предполагать выполненным условие

A) $\det\{\langle A\varphi_i,\ \psi_j\rangle\}_{i,j=1,\ \dots,\ n} \neq 0$,

которое означает, что вектора φ_i образуют полный A–жорданов набор и не имеют A–присоединенных элементов [1]. Согласно [1], базис ядра оператора B^* может быть перестроен таким образом, что условие A) будет эквивалентно следующему равенству:

$$\langle A\varphi_i,\ \psi_j\rangle = \delta_{ij},\ i,\ j = 1,\ \dots,\ n.$$

Рассмотрим оператор-функцию

$$\mathcal{F}(t) = A\frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}k(\tau)d\tau, \tag{3}$$

функцию $g(t) : \mathbb{R}_+ \to E_2$ вида

$$g(t) = f(t) + A(x_0 + x_1 t + \ \dots\ + x_{N-1}\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}) + \\ + \int\limits_0^t k(t-\tau)(x_0 + x_1\tau + \ldots + x_{N-1}\frac{\tau^{N-1}}{(N-1)!})d\tau, \tag{4}$$

матрицу-функцию $\{K_{ij}(t)\}_{i,j=1,\ \dots,\ n} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ с элементами

$$K_{ij}(t) = \langle(\mathcal{F}(t) + \int\limits_0^t R(t-\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau)\varphi_i,\ \psi_j\rangle \tag{5}$$

и вектор-столбец, координаты $b_i(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ i = 1,\ \dots,\ n$ которого определяются формулой

$$b_i(t) = -\int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \langle(\frac{(t-s-\tau)^{N-2}}{(N-2)!} + \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!}R(\tau))g(s),\ \psi_i\rangle d\tau ds, \tag{6}$$

где $R(t)$ — резольвента ядра $\mathcal{F}(t)\Gamma$, Γ — введенный в [1] ограниченный оператор, называемый оператором Треногина-Шмидта.

Непосредственными вычислениями, проводимыми над (5) и (6) с учетом (3) и (4), нетрудно доказать следующие равенства:

$$K_{ij}^{(s-1)}(0) = \begin{cases} 0, & s = 1, \ \dots, \ N-1, \\ \langle A\varphi_i, \ \psi_j \rangle, & s = N; \end{cases} \tag{7}$$

$$b_i^{(s-1)}(0) = \begin{cases} 0, & s = 1, \ \dots, \ N, \\ -\langle g^{(s-N-1)}(0), \ \psi_j \rangle, & s = N+1, \ \dots, \ 2N. \end{cases} \tag{8}$$

Введем условия

B) $\langle f(t), \ \psi_i \rangle \in \mathcal{C}^N(\mathbb{R}_+), \ i = 1, \ \dots, \ n;$

C) $b_i^{(s+N-1)}(0) = 0, \ s = 1, \ \dots, \ N, \ i = 1, \ \dots, \ n.$

Далее справедлива следующая

Теорема 1. *Если выполнены условия A), B), C), то задача Коши* (1)–(2) *имеет единственное классическое решение.*

Доказательство. Согласно [2], решение будем искать в виде

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \ldots + x_{N-1} \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \Gamma V(t) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \xi_i(t), \tag{9}$$

где функции $V(t) : \mathbb{R}_+ \to E_2, \ \xi_i(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \ i = 1, \ \dots, \ n$ удовлетворяют следующим условиям:

$$V(0) = \dot{V}(0) = \ldots = V^{(N-1)}(0) = 0, \ \langle V(t), \psi_j \rangle = 0, \ j = 1, \ \dots, \ n, \tag{10}$$

$$\xi_i(0) = \dot{\xi}_i(0) = \ldots = \xi_i^{(N-1)}(0) = 0, \ i = 1, \ \dots, \ n. \tag{11}$$

Подстановкой (9) в (1) и N–кратным интегрированием по t с учетом первого свойства в (10), получим относительно $V(t)$ регулярное интегрально-операторное уравнение типа свертки с ядром $\mathcal{F}(t)\Gamma$, являющимся сильно непрерывным на E_2 семейством ограниченных операторов. Единственное классическое решение такого уравнения восстанавливается в терминах резольвенты $R(t)$ ядра $\mathcal{F}(t)\Gamma$ по формуле

$$V(t) = \int_0^t \int_0^{t-s} \Big(\frac{(t-s-\tau)^{N-2}}{(N-2)!} + \frac{(t-s-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} R(\tau)\Big) g(s) d\tau ds +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \Big(\mathcal{F}(t-s)\varphi_i + \int_0^{t-s} R(t-s-\tau)\mathcal{F}(\tau)\varphi_i d\tau\Big)\xi_i(s) ds, \tag{12}$$

где функции $\xi_i(t),\ i=1,\ \ldots,\ n$, в силу второго условия в (10), удовлетворяют системе линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_{ij}(t-s)\xi_i(s)ds = b_j(t),\ j=1,\ \ldots,\ n,$$

которая при выполнении условия A), согласно равенству (7), последовательным N–кратным дифференцированием каждого из уравнений с учетом (8) сводится к системе линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\xi_j(t)+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t K_{ij}^{(N)}(t-s)\xi_i(s)ds = b_j^{(N)}(t),\ j=1,\ \ldots,\ n. \tag{13}$$

Последняя при выполнении условий B) и C) имеет своим решением определяемую единственным образом вектор-функцию с координатами $\xi_i(t)\in\mathcal{C}^N(\mathbb{R}_+),\ i=1,\ \ldots,\ n$, обладающими свойством (11).

Таким образом, задача Коши (1)–(2) однозначно разрешима в классе $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}_+,E_1)$. Явный вид решения может быть восстановлен по формуле (9) подстановками найденных из системы интегральных уравнений (13) функций в (9) и (12), а затем (12) в (9). □

Замечание 1. Соотношения, определяемые блоком условий C) теоремы 1, в силу равенства (8), имеют вид

$$\langle f(0)+Ax_0,\ \psi_j\rangle = 0,$$

$$\left\langle f^{'}(0)+Ax_1+k(0)x_0,\ \psi_j\right\rangle = 0,$$

$$\left\langle f^{''}(0)+Ax_2+k(0)x_1+k^{'}(0)x_0,\ \psi_j\right\rangle = 0,$$

$$\ldots,$$

$$\left\langle f^{(N-1)}(0)+Ax_{N-1}+k(0)x_{N-2}+k^{'}(0)x_{N-3}+\ldots+k^{(N-2)}(0)x_0,\ \psi_j\right\rangle = 0$$

и представляют собой ограничения на свободную функцию уравнения (1) и начальные данные (2). Этот факт и означает, что задача Коши (1)–(2) имеет классическое решение не при любых «входных данных».

Замечание 2. При $N=1$ жордановы цепочки базисных элементов $\varphi_i,\ i=1,\ \ldots,\ n$ ядра фредгольмова оператора B строятся относительно оператор функции $\mathcal{F}(t)=A+\int\limits_0^t k(\tau)d\tau$ [5]. В случае $N\geq 2$ более высокого порядка дифференциальной составляющей уравнения (1) становится непонятным относительно какой оператор-функции строятся жордановы цепочки или что будет называться жордановым набором относительно $\mathcal{F}(t)$ при соответствующем значении N в (3). Обобщенная жорданова структура вырожденной главной части имеет сложное строение, которое в настоящее время и является предметом исследований автора. В данной работе основной результат сформулирован в предположении равенства единице всех длин жордановых цепочек. Как будет показано в следующем пункте, рассмотренный частный случай с точки зрения приложения является не менее ценным, чем более общий, который подразумевает существование присоединенных элементов произвольных конечных необязатеьно одинаковых порядков.

3. Приложение

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение в частных производных

$$(\gamma-\Delta)\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,\bar{x})+\Delta^2u(t,\bar{x})-\int_0^t g(t-\tau)\Delta^2u(\tau,\bar{x})d\tau=f(t,\bar{x}),\quad (14)$$

$$t\geq 0,\ \bar{x}\in\Omega,$$

где $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $\mathcal{C}^\infty$, вещественная постоянная γ отлична от нуля, ядро $g(t)$ — аналитическая функция, $f(t,\bar{x})$ — заданная функция класса $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k\in\{0\}\cup\mathbb{N}$, при каждом $t\geq 0$. В случае $m=2$ и $f(t,x_1,x_2)\equiv 0$ это уравнение описывает колебания вязкоупругой пластины с памятью [4].

Будем искать решение уравнения (14), определенное на цилиндре $(t,\bar{x})\in\mathbb{R}_+\times\Omega$, непрерывно дифференцируемое на нем дважды по t и не менее четырех раз по совокупности пространственных переменных, удовлетворяющее следующим начальным и граничному условиям:

$$u(t,\bar{x})|_{t=0}=u_0(\bar{x}),\ \left.\frac{\partial}{\partial t}u(t,\bar{x})\right|_{t=0}=u_1(\bar{x}),\ \bar{x}\in\Omega,\quad (15)$$

$$u(t,\bar{x})|_{\overline{x}\in\partial\Omega}=0,\ (t,\bar{x})\in\mathbb{R}_+\times\partial\Omega.\quad (16)$$

Задача Коши-Дирихле (14)-(16) может быть сведена к исходной задаче Коши (1)-(2), если положить

$$E_1\equiv\left\{v(\bar{x}):\ v(\bar{x})\in\mathcal{L}_2(\Omega),\ v(\bar{x})|_{\overline{x}\in\partial\Omega}=0\right\},\ E_2\equiv\mathcal{L}_2(\Omega),$$

$$B=\gamma-\Delta,\ A=-\Delta^2,\ k(t)=g(t)\Delta^2,$$

$$D(B)=D(A)=D(k)\equiv\left\{v(\bar{x}):\ v(\bar{x})\in H^{k+4}(\Omega),\ v(\bar{x})|_{\overline{x}\in\partial\Omega}=0\right\},$$

а вещественный параметр γ таким, что однородная задача Дирихле

$$\Delta\phi(\bar{x})=\gamma\phi(\bar{x}),\ \phi(\bar{x})|_{\overline{x}\in\partial\Omega}=0$$

имеет ненулевые решения, число которых без ограничения общности можно положить равным некоторому конечному n, в силу конечнократности спектра оператора Лапласа. В этом случае $B = \gamma - \Delta$ является самосопряженным фредгольмовым оператором.

Пусть $\{\lambda_i\}_{i=1}^{+\infty}$ — спектр оператора Лапласа, причем собственные числа λ_i занумерованы в порядке возрастания абсолютных значений с учетом кратностей, $\{\phi_i(\bar{x})\}_{i=1}^{+\infty}$ — ортонормированная система собственных функций $\phi_i(\bar{x}) \in H^{k+4}(\Omega)$, $\phi_i(\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$, из которых первые n отвечают собственному числу γ и являются базисными элементами ядра оператора B. В качестве базиса в $N(B^*)$ выберем $\psi_i(\bar{x}) = -\frac{1}{\gamma^2}\phi_i(\bar{x}),\ i = 1,\ \ldots,\ n$, тогда имеет место равенство

$$\langle A\varphi_i,\ \psi_j\rangle = -\int\limits_{\Omega} \Delta^2\phi_i(\bar{x})\psi_j(\bar{x})d\bar{x} = \delta_{ij},\ i,\ j = 1,\ \ldots,\ n,$$

означающее выполнение условия A) теоремы 1 (длины всех жордановых цепочек равны 1). Справедливо следующее утверждение

Следствие 1. *Если γ является собственным числом кратности n оператора Лапласа, функции $\int\limits_{\Omega} f(t,\bar{x})\phi_i(\bar{x})d\bar{x} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+),\ i = 1,\ \ldots,\ n$ и выполняются условия*

$$\int\limits_{\Omega}\Big(f(0,\bar{x}) - \gamma^2 u_0(\bar{x})\Big)\phi_i(\bar{x})d\bar{x} = 0,$$

$$\int\limits_{\Omega}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}(0,\bar{x}) - \gamma^2 u_1(\bar{x}) + g(0)\gamma^2 u_0(\bar{x})\Big)\phi_i(\bar{x})d\bar{x} = 0,$$

то задача Коши-Дирихле (14)-(16) имеет единственное решение класса $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, E_1)$, которое задается формулой

$$u(t,\bar{x}) = u_0(\bar{x}) + tu_1(\bar{x}) +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\Big(-u_0(\bar{x}) - tu_1(\bar{x}) + \frac{1}{\gamma^2}f(t,\bar{x}) + \frac{1}{\gamma^2}\int\limits_0^t r(t-s)f(s,\bar{x})ds\Big)\phi_i(\bar{x})d\bar{x}\phi_i(\bar{x}) +$$
$$+\sum_{i=n+1}^{+\infty}\int\limits_0^t\int\limits_0^{t-s}\int\limits_{\Omega}\Big(1 + (t-s-\tau)r_i(\tau))g_i(s,\bar{x})\Big)\phi_i(\bar{x})d\bar{x}d\tau ds\phi_i(\bar{x}),$$

где $r(t),\ r_i(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — резольвенты, соответствующие ядрам $g(t)$ и $\frac{\lambda_i^2}{\gamma-\lambda_i}\Big(-t + \int\limits_0^t (t-s)g(s)ds\Big),\ i = n+1,\ \ldots$, а функции $g_i(t,\bar{x}),\ i = n+1,\ \ldots$ имеют следующий вид:

$$g_i(t,\bar{x}) = f(t,\bar{x}) - \lambda_i^2\Big(u_0(\bar{x}) + tu_1(\bar{x}) - \int_0^t g(t-s)(u_0(\bar{x}) + su_0(\bar{x}))ds\Big).$$

В заключении автор выражает глубокую благодарность профессору Н. А. Сидорову за полезнейший совет — начать исследование поставленной задачи с рассмотрения изложенного в данной работе частного случая, важного для приложений. Также автор сердечно благодарит своего научного руководителя доцента М. В. Фалалеева за ряд ценных замечаний и указаний, касающихся представленных здесь результатов.

Список литературы

1. Вайнберг, М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
2. Сидоров, Н. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением / Н. А. Сидоров, О. А. Романова // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 9. – С. 1516-1526.
3. Фалалеев М. В. Теория фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах: дис. ... докт. физ.-мат. наук / М. В. Фалалеев. – Иркутск, 2008. – 238 с.
4. Cavalcanti, M. M. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping / M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira // Math. Meth. Appl. Sci. – 2001. – Vol. 24. – P. 1043–1053.
5. Sidorov, N. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. – 548 p.

S. S. Orlov

Degenerated integro-differential equation in Banach spaces and its application

Abstract. This paper is devoted to the study Cauchy problem for a linear integro-differential operator equation with convolutional type Volterra integral part and Fredholm operator by the derivative of highest order. Sufficient conditions of classical (N times strongly continuously differentiable) solution existence and uniqueness, as well as explicit formulas for its restoration are obtained. These results are applyed to the investigation of initial boundary value problem, arising in mathematical theory of viscoelacity.

Keywords: Banach space, integro-differential equation, generalized Jordan structure, Fredholm operator

Орлов Сергей Сергеевич, аспирант, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (orlov_sergey@inbox.ru)

Sergey Orlov, post-graduate student, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 Phone: (3952)242210 (orlov_sergey@inbox.ru)