Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 1. С. 19—29

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

Об эквивалентных нормах в теории полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода *

А. С. Апарцин
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН

Аннотация. В статье предложен способ построения эквивалентных норм при исследовании вопросов существования локальных непрерывных решений полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода, основанный на решении мажорантных задач Коши.

Ключевые слова: мажорантные интегральные уравнения; мажорантные задачи Коши; сжимающее отображение; функция Ламберта.

Введение

Хорошо известным (см., например, [1]–[3]) методом доказательства существования и единственности решения линейного интегрального уравнения Вольтерра II рода

$$x(t) = \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds + y(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.1}$$

в вещественном пространстве $C_{[0,T]}$ является переход к эквивалентной норме

$$\|x(t)\|_* = \max_{0 \le t \le T} \mathrm{e}^{-Lt}|x(t)|, \quad L > 0, \tag{0.2}$$

и обоснование свойства сжатия в этой норме оператора

$$A(x) \equiv \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds + y(t)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09–01–00377.

в предположении непрерывности ядра $K(t,s)$ и $y(t)$, причем в (0.2) $L = K$, где

$$K = \max_{0\le s\le t\le T} |K(t,s)|. \tag{0.3}$$

Такой прием, пригодный и для нелинейного уравнения

$$x(t) = \int\limits_0^t K(t,s)f(s,x(s))ds + y(t), \quad t \in [0,T], \tag{0.4}$$

если непрерывная по совокупности переменных $0 \le t \le T$, $-\infty < x < \infty$ функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t,x) - f(t,z)| \le L_1|x - z|, \quad -\infty < x, z < \infty \tag{0.5}$$

(в этом случае в (0.2) $L \ge KL_1$), по существу, равносилен доказательству свойства сжатия в пространстве $C_{[0,T]}$ некоторой степени отображения A.

Однако в важных для приложений случаях степенных нелинейностей (например, $f(t,x) \equiv x^p(t)$, $p > 1$) условие (0.5) не выполняется, поскольку константа L_1 является возрастающей функцией радиуса R шара $S_R = \{z(t) : \|z(t)\|_{C_{[0,T]}} \le R\}$. Следовательно, в общем случае можно гарантировать существование лишь локального непрерывного решения, т.е. решения, принадлежащего $C_{[0,T]}$ при некотором, вообще говоря, малом $T > 0$.

В данной работе предлагается способ построения „естественной“ эквивалентной нормы, в которой вес компенсирует возможный сверхэкспоненциальный рост локального решения.

1. Мажорантные интегральные уравнения и задачи Коши

Обратимся сначала к линейному уравнению (0.1). Его решение удовлетворяет неравенству

$$|x(t)| \le K\int\limits_0^t |x(s)|ds + F, \quad t \in [0,T], \tag{1.1}$$

где $F = \max\limits_{t\in[0,T]} |y(t)|$, откуда по лемме Гронуолла-Беллмана

$$|x(t)| \le F\mathrm{e}^{Kt}, \quad t \in [0,T]. \tag{1.2}$$

Именно тем, что решение (0.1) не может иметь сверхэкспоненциальный рост, и объясняется выбор веса e^{-Kt} в (0.2).

Отметим, что оценка (1.2) неулучшаема в том естественном смысле, что мажоранта является точным решением соответствующего (1.1) уравнения

$$\psi(t) = K \int_0^t \psi(s)ds + F, \quad t \in [0, T]. \tag{1.3}$$

Следуя [4], [5], назовем (1.3) мажорантным для (0.1) интегральным уравнением Вольтерра II рода. Из множества способов нахождения решения (1.3) (обозначим его $\overline{\psi}(t)$) остановимся на редукции (1.3) с помощью замены

$$\theta(t) = \int_0^t \psi(s)ds \tag{1.4}$$

к задаче Коши

$$\dot{\theta}(t) = K\theta(t) + F, \quad \theta(0) = 0, \quad t \in [0, T], \tag{1.5}$$

имеющей решение

$$\overline{\theta}(t) = \frac{F}{K}(\mathrm{e}^{Kt} - 1), \tag{1.6}$$

так что

$$\overline{\psi}(t) = \dot{\overline{\theta}}(t) = F\mathrm{e}^{Kt}. \tag{1.7}$$

Задачу Коши (1.5) также назовем мажорантной для (0.1) [4], [5].

Переходя к нелинейному случаю, рассмотрим вначале интегральное уравнение Фредгольма II рода

$$x(t) = \int_0^T K(t, s)x^2(s)ds + y(t), \quad t \in [0, T], \tag{1.8}$$

при тех же предположениях о $K(t, s)$ и $y(t)$. Введем вспомогательное (мажорантное) квадратное уравнение

$$KTR^2 + F = R, \tag{1.9}$$

имеющее два положительных корня

$$R_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - 4FKT}}{2KT}, \tag{1.10}$$

если

$$T < \frac{1}{4FK}. \tag{1.11}$$

Очевидно, оператор $A(x)$, определяемый правой частью (1.8), переводит шар S_{R_1} в себя. Действительно, если $x(t) \in S_{R_1}$, то

$$\|A(x)\|_{C_{[0,T]}} \le KT\|x\|^2_{C_{[0,T]}} + F \le KTR_1^2 + F = R_1.$$

Далее,

$$\|A(x)-A(z)\|_{C_{[0,T]}} \leq K\int\limits_0^T (|x(s)|+|z(s)|)ds\|x-z\|_{C_{[0,T]}} \leq 2R_1KT\|x-z\|_{C_{[0,T]}}. \tag{1.12}$$

Так как в силу (1.10) $R_1 < \frac{1}{2KT}$, то из (1.12) вытекает, что $A(x)$ является сжимающим на S_{R_1} с константой сжатия

$$q < 4KFT < 1, \tag{1.13}$$

а это гарантирует существование и единственность непрерывного решения уравнения (1.8) в шаре S_{R_1}.

Рассмотрим теперь, заменяя в (1.8) верхний предел интегрирования на t, уравнение Вольтерра II рода

$$x(t) = \int\limits_0^t K(t,s)x^2(s)ds + y(t), \quad t \in [0,T]. \tag{1.14}$$

Специфика (1.14) позволяет усилить полученный выше результат.

Мажорантное интегральное уравнение для (1.1) имеет вид

$$\psi(t) = K\int\limits_0^t \psi^2(s)ds + F, \quad t \in [0,T]. \tag{1.15}$$

Замена

$$\theta(t) = \int\limits_0^t \psi^2(s)ds$$

приводит к мажорантной задаче Коши

$$\dot{\theta}(t) = (K\theta(t)+F)^2, \quad \theta(0) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{1.16}$$

решение которой

$$\overline{\theta}(t) = \frac{tF^2}{1-KFt}, \tag{1.17}$$

откуда

$$\overline{\psi}(t) = \sqrt{\dot{\overline{\theta}}(t)} = \frac{F}{1-KFt}, \tag{1.18}$$

причем функция $\overline{\psi}(t)$ является неулучшаемой оценкой [7] непрерывных решений неравенства

$$x(t) \leq K\int\limits_0^t x^2(s)ds + F, \quad t \in [0,T], \tag{1.19}$$

где

$$T < \frac{1}{KF}. \tag{1.20}$$

Основная идея данной работы заключается в использовании решения мажорантного интегрального уравнения Вольтерра II рода в качестве веса эквивалентной нормы. Такая норма имеет вид

$$\|x(t)\|_* = \max_{0\le t\le T} \frac{|x(t)|}{\psi^*(t)}, \tag{1.21}$$

где применительно к (1.14) $\psi^*(t)$ — решение (1.15) с заменой K на K^*.

Теорема 1. *Пусть выполнено (1.11). Тогда оператор $A(x)$ на S_{R_1} является сжимающим в норме* (1.21) *с константой сжатия*

$$q_* < \frac{1}{\mathrm{e}}. \tag{1.22}$$

Доказательство. Так как

$$\psi^*(t) = \frac{F}{1 - K^*Ft}, \quad t \in [0, T],$$

и T удовлетворяет (1.11), то при любом $0 < K^* \le 4K$

$$\|A(x) - A(z)\|_* \le 2KR_1 \max_{0\le t\le T}\left[(1 - K^*Ft)\int_0^t \frac{ds}{1 - K^*Fs}\right]\|x - z\|_* \le$$

$$\le \frac{2KR_1}{K^*F} \max_{0\le\lambda\le 1}(-\lambda\ln\lambda)\|x - z\|_* = \frac{2KR_1}{K^*F\mathrm{e}}\|x - z\|_*. \tag{1.23}$$

Справедливость теоремы следует теперь из (1.23), если положить $K^* = 4K$ и учесть неравенство $R_1 \le 2F$. □

Сравнение (1.22) с (1.13) показывает, что введение эквивалентной нормы (1.21) позволяет уменьшить оценку константы сжатия в e раз, что существенно, в частности, при построении и исследовании скорости сходимости вычислительных алгоритмов.

Замечание 1. В случае линейного уравнения (0.1) применение (1.21) с учетом (1.6), (1.7) немедленно дает известный результат:

$$\|A(x-z)\|_* \le K \max_{0\le t\le T}\left[\frac{1}{\psi^*(t)}\int_0^t |x(s)-z(s)|ds\right] \le K \max_{0\le t\le T}\frac{\theta^*(t)}{\dot\theta^*(t)}\|x-z\|_* =$$

$$= \max_{0\le t\le T}\frac{\mathrm{e}^{Kt}-1}{\mathrm{e}^{Kt}}\|x - z\|_* = (1 - \mathrm{e}^{-KT})\|x - z\|_*$$

и при любом $T < \infty$ сжатие гарантировано.

2. Полиномиальные уравнения Вольтерра I рода

Рассматриваемый в этом пункте класс интегральных уравнений возникает в теории математического моделирования нелинейных динамических систем типа черного ящика полиномами Вольтерра. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — скалярные функции времени. Тогда полином Вольтерра N-ой степени, отображающий $x(t)$ в $y(t)$, имеет следующий вид:

$$y(t) = \sum_{m=1}^{N} \int_0^t \cdots \int_0^t K_m(t, s_1, \ldots, s_m) \prod_{i=1}^{m} x(s_i) ds_i, \quad t \in [0, T]. \tag{2.1}$$

Предположим, непрерывные по совокупности переменных, симметричные по $s_1, \ldots, s_m$ ядра Вольтерра K_m уже идентифицированы каким-либо способом и ставится типичная задача автоматического управления — определить такой вход $x(t)$, который обеспечивает желаемый выход $y(t)$. При заданных $y(t)$ и K_m, $m = \overline{1, N}$, (2.1) является интегральным уравнением относительно $x(t)$.

Теории подобных уравнений, по-видимому, пока не существует. Не существует даже их общепринятого названия, хотя при $N = 1$ (2.1) переходит в стандартное линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода, для которого теория и численные методы хорошо известны [8].

В ряде работ автора (в частности, в [4]–[6]) (2.1) названо полилинейным (для $N = 2, 3$ соответственно би- и трилинейным) уравнением Вольтерра I рода. Однако, поскольку с точки зрения классического функционального анализа в скалярном случае m-ое слагаемое в (2.1) есть m-степенной [1] интегральный оператор, можно трактовать (2.1) как полиномиальное интегральное уравнение Вольтерра I рода N-ой степени. Такое название подчеркивает и основную специфику (2.1) — локальность его (единственного) вещественного непрерывного “корня“.

При $N = 2$ (2.1) имеет вид

$$\int_0^t K_1(t, s) x(s) ds + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) x(s_1) x(s_2) ds_1 ds_2 = y(t), \quad t \in [0, T]. \tag{2.2}$$

Предположим дополнительно, что K_1, K_2 непрерывно дифференцируемы по t, $y(t) \in C^{(1)}_{[0,T]}$, $y(0) = 0$ и $K(t, t) \neq 0$ $\forall t \in [0, T]$. Не уменьшая общности, примем $K(t, t) = 1$. В сделанных предположениях (2.2) эквивалентно уравнению

$$x(t) + \int_0^t K'_{1_t}(t, s) x(s) ds + 2x(t) \int_0^t K_2(t, t, s) x(s) ds +$$

$$+\int_0^t \int_0^t K'_{2_t}(t, s_1, s_2)x(s_1)x(s_2)ds_1 ds_2 = y'(t), \quad t \in [0, T]. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$L_1 = \max_{0 \le t \le T} |K'_{1_t}(t, s)| \ge 0; \tag{2.4}$$

$$L_2 = \max_{0 \le s_1, s_2 \le t \le T} |K'_{2_t}(t, s_1, s_2)| \ge 0; \tag{2.5}$$

$$M_2 = \max_{0 \le s \le t \le T} |K_2(t, t, s)| > 0; \tag{2.6}$$

$$F = \max_{0 \le t \le T} |y'(t)|. \tag{2.7}$$

Если K_1 и K_2 не зависят от t, то $L_1 = L_2 = 0$ и (2.3) представимо в виде $x = A_1(x)$, где

$$A_1(x) = -2x(t) \int_0^t K_2(t, s)x(s)ds + y'(t) \tag{2.8}$$

(у K_2 оставлен лишь второй и третий аргументы).

Пусть

$$T < \frac{1}{8M_2F}, \tag{2.9}$$

тогда оператор $A_1(x)$ переводит S_{R_1} в себя, где

$$R_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 8M_2FT}}{4M_2T}, \tag{2.10}$$

при этом

$$\|A_1(x) - A_1(z)\|_{C_{[0,T]}} = 2 \max_{0 \le t \le T} \left| -(x(t) - z(t)) \int_0^t K_2(t, s)x(s)ds + \right.$$

$$\left. +z(t) \int_0^t K_2(t, s)(x(s) - z(s))ds \right| \le 4M_2R_1T\|x - z\|_{C_{[0,T]}}, \tag{2.11}$$

и так как $R_1 \le 2F$, то из (2.9) и (2.11) следует, что оператор $A_1(x)$ на S_{R_1} является сжимающим с константой сжатия

$$q \le 8M_2FT < 1. \tag{2.12}$$

Рассмотрим мажорантное интегральное уравнение для (2.3), имеющее при $L_1 = L_2 = 0$ вид

$$\psi(t) = 2M_2\psi(t) \int_0^t \psi(s)ds + F. \tag{2.13}$$

Замена (1.4) приводит к мажорантной задаче Коши

$$\dot{\theta}(t) = \frac{F}{1 - 2M_2\theta(t)}, \quad \theta(0) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{2.14}$$

Ее решение

$$\overline{\theta}(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4M_2Ft}}{2M_2F}, \tag{2.15}$$

поэтому решение (2.13)

$$\overline{\psi}(t) = \dot{\overline{\theta}}(t) = \frac{F}{\sqrt{1 - 4M_2Ft}}, \quad t \in [0, T]. \tag{2.16}$$

Вновь введем норму (1.21), где теперь $\psi^*(t)$ — решение (2.13) с заменой M_2 на M_2^*.

Теорема 2. *Пусть выполнено* (2.9). *Тогда оператор* $A_1(x)$ *на* S_{R_1} *является сжимающим в норме* (1.21) *с константой сжатия*

$$q_* < \frac{3}{4}. \tag{2.17}$$

Доказательство. Так как

$$\psi^*(t) = \frac{F}{\sqrt{1 - 4M_2^*Ft}}, \quad t \in [0, T],$$

и T удовлетворяет (2.9), то при любом $0 < M_2^* \leq 2M_2$

$$\|A_1(x) - A_1(z)\|_* = 2 \max_{0 \leq t \leq T} \left[\frac{1}{\psi^*(t)} \left| -(x(t) - z(t)) \int\limits_0^t K_2(t,s)x(s)ds + \right.\right.$$

$$\left.\left. + z(t) \int\limits_0^t K_2(t,s)(x(s) - z(s))ds \right| \right] \leq 2M_2R \left\{ T + \max_{0 \leq t \leq T} \frac{\theta^*(t)}{\dot{\theta}^*(t)} \right\} \|x - z\|_* =$$

$$= 2M_2R \left\{ T + \frac{1}{2M_2^*F} \max_{0 \leq t \leq T} \left[\sqrt{1 - 4M_2^*Ft} \left(1 - \sqrt{1 - 4M_2^*Ft} \right) \right] \right\} \|x - z\|_* =$$

$$2M_2R \left\{ T + \frac{1}{2M_2^*F} \max_{0 \leq \lambda \leq 1} [\lambda(1 - \lambda)] \right\} \|x - z\|_* \leq 4M_2F \left(T + \frac{1}{8M_2^*F} \right) \|x - z\|_*. \tag{2.18}$$

Полагая в (2.18) $M_2^* = 2M_2$ и учитывая (2.9), получаем (2.17) □

В случае, когда ядра K_1 и K_2 зависят от t, для установления условий существования и единственности локального непрерывного решения (2.2) также можно применить как классический вариант принципа сжимающих отображений в $C_{[0,T]}$, так и технику эквивалентных норм вида (1.21).

Предположим, $L_1 > 0$, а $L_2 = 0$. Тогда (2.2) эквивалентно уравнению II рода

$$x = A_2(x) \equiv -\int_0^t K'_{1_t}(t,s)x(s)ds - 2x(t)\int_0^t K_2(t,s)x(s)ds + y'(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.19}$$

Согласно принципу сжимающих отображений, существование и единственность решения (2.19) в $C_{[0,T]}$ обеспечивает неравенство

$$T < \min\left[\frac{R}{L_1(F+R) + 2M_2(F+R)^2},\ \frac{1}{L_1 + 4M_2(F+R)}\right], \tag{2.20}$$

где R — радиус шара в $C_{[0,T]}$ с центром в $y'(t)$. Максимизация правой части (2.20) по R дает $R^* = \sqrt{1 + \frac{L_1}{2M_2F}}$, при этом из (2.20) следует, что

$$T < \widehat{T} = \frac{L_1 + 4M_2F - \sqrt{(L_1 + 4M_2F)^2 - L_1^2}}{L_1^2}. \tag{2.21}$$

Мажорантным для (2.19) является уравнение

$$\psi(t) = L_1\int_0^t \psi(s)ds + 2M_2\psi(t)\int_0^t \psi(s)ds + F, \tag{2.22}$$

а подстановка (1.4) приводит к мажорантной задаче Коши

$$\dot{\theta}(t) = \frac{F + L_1\theta(t)}{1 - 2M_2\theta(t)}, \quad \theta(0) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{2.23}$$

Решение (2.23) выражается в терминах W-функции Ламберта. Напомним (см., например, [9], [10]), что многозначная функция Ламберта $W(z)$ является обратной к функции $z = W\mathrm{e}^W$ и имеет две вещественные ветви — главную, которая определена для $z \in \left[-\frac{1}{\mathrm{e}}, \infty\right)$ и аналитична в 0 (ее обозначают как $W(0,z)$ или просто $W(z)$), и вторую ветвь, определенную для $z \in [-\frac{1}{\mathrm{e}}, 0]$ и обозначаемую как $W(-1,z)$. При $z = -\frac{1}{\mathrm{e}}$ $W\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = W\left(-1, -\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -1$, а при $z = 0$ $W(0) = 0$, $W(-1,0) = -\infty$.

В [11] показано, что

$$\overline{\theta}(t) = -\frac{1}{b}W(-ab\mathrm{e}^{\frac{bL_1t}{2M_2} - ab)}) - a, \quad t \in [0,T], \tag{2.24}$$

где

$$a = \frac{F}{L_1}, \quad b = \frac{2L_1M_2}{L_1 + 2FM_2}, \tag{2.25}$$

а

$$T \le T^* = \frac{2M_2}{bL_1}\ln\left(1 + \frac{L_1}{2M_2F}\right) - \frac{1}{L_1}. \tag{2.26}$$

Поскольку ((см. [9], [10])

$$W'(z) = \frac{W(z)}{z(1 + W(z))}, \quad z \ne 0,$$

то решение (2.22) представимо в следующем виде:

$$\overline{\psi}(t) = -\frac{L_1}{2M_2}\frac{W(-ab\mathrm{e}^{\frac{bL_1t}{2M_2}-ab)})}{1 + W(-ab\mathrm{e}^{\frac{bL_1t}{2M_2}-ab)})}, \quad t \in [0, T]. \tag{2.27}$$

Выше было показано, что введение нормы (1.21) приводит к улучшению оценки константы сжатия за счет того, что область определения решения мажорантного уравнения шире интервала существования локального решения. Нетрудно убедиться, что и в рассматриваемом случае $T^* > \widehat{T}$, а это позволяет в качестве весовой функции $\psi^*(t)$ принять (2.27) с заменой M_2, L_1 на некоторые $M_2^* \ge M_2$, $L_1^* \ge L_1$.

Ключевое выражение

$$\max_{0\le t\le T}\frac{\theta^*(t)}{\psi^*(t)}$$

с учетом того, что при $t = 0$ $W(\cdot) = -a^*b^*$, при $t = T^*$ $W(\cdot) = -1$, а в силу (2.25) $a^*b^* < 1$, оценивается следующим образом:

$$\max_{0\le t\le T}\frac{\theta^*(t)}{\psi^*(t)} \le \frac{2M_2^*}{b^*L_1^*}\max_{0\le t\le T}\frac{(W(\cdot) + a^*b^*)(W(\cdot) + 1)}{W(\cdot)} =$$

$$= \frac{2M_2^*}{b^*L_1^*}\max_{-1\le\lambda\le -a^*b^*}\frac{(\lambda + a^*b^*)(\lambda + 1)}{\lambda} =$$

$$= \frac{2M_2^*}{b^*L_1^*}\left[\frac{(\lambda + a^*b^*)(\lambda + 1)}{\lambda}\right]_{\lambda = -\sqrt{a^*b^*}} = \frac{2M_2^*}{b^*L_1^*}(1 - \sqrt{a^*b^*})^2.$$

Вычисление q^* как в этом случае, так и в общем случае $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, которому соответствует представление решения мажорантной задачи Коши в терминах второй вещественной ветви функции Ламберта ([7], [11]), требует отдельного рассмотрения.

Замечание 2. Эффект возникновения погранслоя ошибок численного решения методом квадратур полиномиальных уравнений Вольтерра I рода, отмеченный в [12], связан, по-видимому, с нарушением условий принципа сжимающих отображений.

Список литературы

1. Треногин, В.А. Функциональный анализ /В. А. Треногин // М: Наука, 1980. – 495 с.
2. Красносельский, М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. // М: Наука, 1969. – 456 с.
3. Хатсон, В. Приложения функционального анализа и теории операторов / В. Хатсон, Дж. Пим // М: Мир, 1983. – 431 с.
4. Апарцин, А.С. О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода /А. С. Апарцин // Автоматика и телемеханика, 2004. – № 2. – С. 118–125.
5. Апарцин, А.С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы /А. С. Апарцин // Изв. ИГУ. Математика. – 2007. – № 1. – С. 13–41.
6. Апарцин, А.С. Полилинейные уравнения Вольтерра I рода и некоторые задачи управления /А. С. Апарцин // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 4. – С. 3–16.
7. Apartsyn, A.S. Unimprovable estimates of solutions for some classes integral inequalities / A. S. Apartsyn // Inverse and Ill-posed Problems, 2008. – V. 16, No 7. – P. 561–590.
8. Апарцин, А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода. Теория и численные методы / А. С. Апарцин // Новосибирск, Наука, 1999. – 193 с.
9. Corless, R.M. On the Lambert W function / R. M. Corless, G. H.Gonnet at al. // Advances Computational Maths. 1996. – Vol. 5. – P. 329–359.
10. Дубинов, А.Е. W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики / А. Е. Дубинов, И. Д. Дубинова, С. К. Сайков // Учеб. пособие для вузов. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2006. – 160 с.
11. Апарцин, А.С. О билинейных уравнениях Вольтерра I рода / А. С. Апарцин // Оптимизация, управление, интеллект – 2004, – № 8. – С. 20–28.
12. Апарцин, А.С. О сходимости численных методов решения билинейного уравнения Вольтерра I рода / А. С. Апарцин // ЖВМиМФ. – 2007. – № 8. – С. 1380–1388.

A. S. Apartsyn

On equivalent norms in the theory of Volterra polinomial equations of the first kind

Abstract. The paper suggests a method for construction of equivalent norms in studies on existence of local continuous solutions of the Volterra polynomial integral equations of the fist kind. The method is based on solution of the majorant Cauchy problems.

Keywords: majorant integral equations; majorant Cauchy problems; contraction mapping; Lambert function.

Апарцин Анатолий Соломонович, д.ф.-м.н., Институт систем энергетики им. Л.А. Меленьтева СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130 тел.: (3952)463556 (apartsyn@isem.sei.irk.ru)

Anatoly Apartsyn, professor, Irkutsk Melentiev Energy Institute SB RAS, 130, Lermontov St., Irkutsk, 664033 Phone: (3952)242210 (apartsyn@isem.sei.irk.ru)