Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 1. С. 78—91

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 518.946

Математическая модель магнитной изоляции вакуумного диода и ее точные решения

Э. И. Семенов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

А. В. Синицын
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. В статье получены новые точные решения стационарной модели магнитной изоляции вакуумного диода. Данная математическая модель описывается системой двух нелинейных сингулярных эллиптических уравнений в двумерном координатном пространстве. Рассмотрены два физически важных случая, как с постоянной, так и с переменной плотностью тока. Указан бесконечномерный класс систем уравнений магнитной изоляции с переменной плотностью тока, которые нетривиальными преобразованиями сводятся к уравнениям аналогичного вида с постоянной плотностью тока. Доказаны соответствующие теоремы и приведены иллюстративные примеры.

Ключевые слова: точные решения, эллиптические уравнения, магнитная изоляция.

70-летию Николая Александровича Сидорова посвящается

1. Введение

В последнее десятилетие большой интерес проявляется к математическому моделированию в полупроводниках. В этой связи актуальными являются задачи построения адекватных математических моделей, описывающих различные физические процессы в полупроводниках, и их качественное исследование. Одной из таких важных задач, является исследование математической модели магнитной изоляции для вакуумного диода. Сущность эффекта магнитной изоляции состоит в том, что под влиянием сильного внешнего магнитного поля электроны, испускаемые с катода, не достигают анода, а начинают отклоняться обратно к катоду. В работе [1], впервые, была предложена и исследована математическая модель магнитной изоляции, представляющая собой систему двух нелинейных сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей статье предлагается обобщение модели предложенной в [1], на случай двух пространственных переменных. В этом случае, математическая модель магнитной изоляции описывается следующей системой сингулярных нелинейных эллиптических уравнений

$$\Delta_{x\,y}\,\psi = j(x,y)\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}\,, \quad \psi \stackrel{\triangle}{=} \psi(x,y),$$

$$\Delta_{x\,y}\,a = j(x,y)\frac{a}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}\,, \quad a \stackrel{\triangle}{=} a(x,y). \tag{1}$$

Здесь $\Delta_{x\,y}\cdot = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot\right)$ — двумерный оператор Лапласа в пространстве переменных $(x,\,y)$, $\phi(x,y)$ — потенциал электрического поля, а $a(x,y)$ — потенциал магнитного поля, $j(x,y) > 0$ — плотность тока.

Основная цель нашего исследования – построение точных решений модели (1), как с постоянной, так и с переменной плотностью тока в двумерном координатном пространстве. Заметим, что данная система эллиптических уравнений инвариантна относительно преобразования $\psi(x,y) \to -\psi(x,y)$, $a(x,y) \to -a(x,y)$. Поэтому, мы можем отыскивать либо только положительные, либо только отрицательные решения системы (1), при этом будем рассматривать положительное значение квадратного корня стоящего в правых частях уравнений системы, т.е. $\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1} > 0$. В дальнейшем будем приводить только положительные решения системы (1).

2. Точные решения модели магнитной изоляции вакуумного диода с постоянной плотностью тока

В этом разделе, рассмотрим задачу отыскания явных точных решений системы нелинейных эллиптических уравнений (1), в предположении постоянства плотности тока, т.е. вместо модели (1) будем рассматривать уравнения

$$\Delta_{x\,y}\,\psi = j_0\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}\,, \quad \psi \stackrel{\triangle}{=} \psi(x,y),$$

$$\Delta_{x\,y}\,a = j_0\frac{a}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}\,, \quad a \stackrel{\triangle}{=} a(x,y), \tag{2}$$

где $j_0 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{const} > 0$ — плотность тока. Нас будут интересовать радиально-симметричные решения системы (2), как наиболее простой класс многомерных решений, т.е. функции

$$\psi(x,y) \stackrel{\triangle}{=} \psi(r), \quad a(x,y) \stackrel{\triangle}{=} a(r), \quad \text{где} \ \ r^2 = x^2 + y^2.$$

В этом случае система (2) преобразуется к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка

$$\psi'' + \frac{1}{r}\,\psi' = j_0\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}, \quad \psi \stackrel{\triangle}{=} \psi(r),$$

$$a'' + \frac{1}{r}\,a' = j_0\frac{a}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}, \quad a \stackrel{\triangle}{=} a(r). \tag{3}$$

Здесь и далее в разделе 1, штрих означает производную по аргументу r. Нетрудно убедиться, что система уравнений (3) обладает следующим первым интегралом

$$\mathbf{I} \equiv r\ (\psi a' - a\psi') = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Решение системы (3) будем отыскивать в виде следующего функционального анзатца

$$\psi(r) = \frac{1}{2\gamma}z(r)\left(e^{\omega(r)} + \gamma^2 e^{-\,\omega(r)}\right),$$

$$a(r) = \frac{1}{2\gamma}z(r)\left(e^{\omega(r)} - \gamma^2 e^{-\,\omega(r)}\right), \tag{5}$$

где $\gamma \neq 0$ — произвольная вещественная постоянная, а новые функции $z \stackrel{\triangle}{=} z(r)$, $\omega \stackrel{\triangle}{=} \omega(r)$ подлежат определению. Если выбрать постоянную γ равной единице, то вместо формул (5) получим анзатц вида

$$\psi(r) = z(r)\operatorname{ch}\omega(r), \quad a(r) = z(r)\operatorname{sh}\omega(r).$$

Как будет показано ниже, с помощью анзатца (5) систему (3) удается "расщепить", т.е. свести её к двум уравнениям, одно на функцию $z(r)$, второе на функцию $\omega(r)$.

После подстановки анзатца (5) в систему (3) и вычисления необходимых производных, сгруппируем слагаемые таким образом, чтобы получить следующую алгебраическую систему:

$$A\left(\frac{1}{2\gamma}e^{\omega(r)} + \frac{\gamma}{2}e^{-\,\omega(r)}\right) + B\left(\frac{1}{2\gamma}e^{\omega(r)} - \frac{\gamma}{2}e^{-\,\omega(r)}\right) = 0,$$

$$A\left(\frac{1}{2\gamma}e^{\omega(r)} - \frac{\gamma}{2}e^{-\,\omega(r)}\right) + B\left(\frac{1}{2\gamma}e^{\omega(r)} + \frac{\gamma}{2}e^{-\,\omega(r)}\right) = 0.$$

Здесь приняты обозначения

$$A \stackrel{\triangle}{=} z'' + \frac{1}{r}z' + z\omega'^2 - j_0\frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

$$B \stackrel{\triangle}{=} \left(2z' + \frac{1}{r}z\right)\omega' + z\omega''.$$

Относительно переменных A и B полученная система алгебраических уравнений является линейной и однородной, её определитель равен единице, а поэтому она имеет только тривиальное решение $A = 0,\ \ B = 0$. Следовательно, с учетом введенных обозначений, система (3) свелась к следующим двум ОДУ:

$$z'' + \frac{1}{r}z' + z\omega'^2 - j_0\frac{z}{\sqrt{z^2-1}} = 0, \tag{6}$$

$$\left(2z' + \frac{1}{r}z\right)\omega' + z\omega'' = 0. \tag{7}$$

После однократного интегрирования уравнения (7) находим, что

$$\omega' = \frac{B_0}{rz^2}, \tag{8}$$

где $B_0 \geq 0$ — постоянная интегрирования. Подставляя соотношение (8) в выражение (6) окончательно получим

$$z'' + \frac{1}{r}\,z' + \frac{B_0^2}{r^2}\,z^{-3} - j_0\frac{z}{\sqrt{z^2-1}} = 0. \tag{9}$$

Таким образом, разрешимость системы ОДУ (3) в виде анзатца (5) свелась к разрешимости одного нелинейного неавтономного ОДУ второго порядка (9) на функцию $z(r)$, поскольку функция $\omega(r)$ находится по формуле (8) простым интегрированием. С помощью замены $z = \sqrt{y^2+1},\ \ y \stackrel{\triangle}{=} y(r)$ уравнение (9) несложными преобразованиями можно привести к виду свободному от радикалов

$$y^2(y^2+1)\left(y'' + \frac{1}{r}\,y'\right) + yy'^2 + \frac{B_0^2}{r^2}\,y - j_0(y^2+1)^2 = 0.$$

Последнее уравнение при $B_0 = 2$ имеет частное точное решение в виде степенной функции

$$y(r) = \frac{1}{4}j_0\,r^2,$$

отсюда, легко предъявить явное решение уравнения (9) вида

$$z(r) = \frac{1}{4}\sqrt{j_0^2\,r^4 + 16}. \tag{10}$$

Интегрируя выражение (8), с учетом соотношения (10) находим

$$\omega(r) = \ln\left(\frac{C_0 r^2}{\sqrt{j_0^2 r^4 + 16}}\right),$$

где $C_0 > 0$ — константа интегрирования. Таким образом, из формул (5) получим следующее точное решение системы (3)

$$\psi_1(r) = \frac{\gamma_0^2 + j_0^2}{8\gamma_0}\, r^2 + \frac{2}{\gamma_0}\, r^{-2},$$

$$a_1(r) = \frac{\gamma_0^2 - j_0^2}{8\gamma_0}\, r^2 - \frac{2}{\gamma_0}\, r^{-2}. \tag{11}$$

Здесь для удобства введена новая постоянная $\gamma_0 = C_0/\gamma$. В свою очередь, из анализа первого интеграла (4) можно выписать другое точное решение системы (3) отличное от формул (11), но близкое к нему по своей структуре

$$\psi_2(r) = \frac{\gamma_0^2 + j_0^2}{8\gamma_0}\, r^2 + \frac{2\gamma_0}{j_0^2}\, r^{-2},$$

$$a_2(r) = \frac{\gamma_0^2 - j_0^2}{8\gamma_0}\, r^2 + \frac{2\gamma_0}{j_0^2}\, r^{-2}. \tag{12}$$

Функции (11), (12) при $\gamma_0 \neq j_0$ являются линейно независимыми решениями. Если выбрать постоянную γ_0 так, чтобы $\gamma_0 = j_0$, то в этом частном случае решения (11), (12) совпадают и выглядят следующим образом:

$$\psi(r) = \frac{j_0}{4}\, r^2 + \frac{2}{j_0}\, r^{-2}, \;\; a(r) = \frac{2}{j_0}\, r^{-2}.$$

Окончательно, в терминах исходных переменных x, y, из формул (11), (12) получим следующие явные точные радиально-симметричные решения системы (2):

$$\psi_1(x,y) = \frac{\gamma_0^2 + j_0^2}{8\gamma_0}\left(x^2+y^2\right) + \frac{2}{\gamma_0}\left(x^2+y^2\right)^{-1},$$

$$a_1(x,y) = \frac{\gamma_0^2 - j_0^2}{8\gamma_0}\left(x^2+y^2\right) - \frac{2}{\gamma_0}\left(x^2+y^2\right)^{-1}, \tag{13}$$

$$\psi_2(x,y) = \frac{\gamma_0^2 + j_0^2}{8\gamma_0}\left(x^2+y^2\right) + \frac{2\gamma_0}{j_0^2}\left(x^2+y^2\right)^{-1},$$

$$a_2(x,y) = \frac{\gamma_0^2 - j_0^2}{8\gamma_0}\left(x^2+y^2\right) + \frac{2\gamma_0}{j_0^2}\left(x^2+y^2\right)^{-1}. \tag{14}$$

Резюмируя выше изложенное, приходим к выводу, что имеет место следующее

Утверждение 1. *Система сингулярных нелинейных эллиптических уравнений (2) с постоянной плотностью тока обладает явными точными радиально-симметричными решениями (13), (14).*

В справедливости данного утверждения можно убедиться непосредственной подстановкой в систему (2) формул (13), (14), которые обращают её в тождество.

В следующем разделе мы перейдем к рассмотрению уравнений (1) с переменной плотностью тока $j(x, y)$ и как будет показано, в некоторых случаях они сводятся к системе уравнений (2) с постоянной плотностью тока. Кроме того, мы проведём редукцию системы (1) к системе ОДУ с постоянной плотностью тока.

3. Точные решения модели магнитной изоляции вакуумного диода с переменной плотностью тока

В этом разделе, мы рассмотрим задачу построения точных многомерных решений системы нелинейных эллиптических уравнений (1) с переменной плотностью тока. Для дальнейшего исследования нам понадобится следующее понятие.

Определение 1 (см. [2]). *Гармонические функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ называются сопряженными в односвязной области D, если функция $F(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$, есть аналитическая функция аргумента $z = x + iy$ в области D.*

Сопряженные гармонические функции связаны уравнениями Коши - Римана

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

и определяют одна другую всюду в D с точностью до аддитивной постоянной и, как следствие, обладают следующими свойствами

$$(\nabla\xi, \nabla\eta) = 0, \quad |\nabla\xi|^2 = |\nabla\eta|^2. \tag{15}$$

Теорема 1. *Если в системе уравнений (1) плотность тока $j(x, y)$ является квадратом градиента произвольной гармонической функции, т.е.*

$$j(x, y) = J_0\,|\nabla\xi|^2, \quad J_0 = \text{const}, \tag{16}$$

то преобразованием

$$\psi(x, y) = \psi(\xi, \eta), \quad a(x, y) = a(\xi, \eta), \tag{17}$$

где $\xi \stackrel{\triangle}{=} \xi(x, y)$, $\eta \stackrel{\triangle}{=} \eta(x, y)$ — сопряженные гармонические функции, система (1) сводится к уравнениям аналогичного вида с постоянной плотностью тока

$$\Delta_{\xi\eta}\,\psi = J_0\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}\,, \quad \psi \stackrel{\triangle}{=} \psi(\xi, \eta),$$

$$\Delta_{\xi\eta}\, a = J_0 \frac{a}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}\,, \quad a \stackrel{\triangle}{=} a(\xi,\eta). \tag{18}$$

Доказательство. С учетом свойств (15) сопряженных гармонических функций нетрудно показать, что при преобразовании (17) выполняются соотношения

$$\Delta_{x\,y}\, \psi(x,y) = |\nabla\xi|^2 \Delta_{\xi\eta}\, \psi(\xi,\eta), \;\; \Delta_{x\,y}\, a(x,y) = |\nabla\xi|^2 \Delta_{\xi\eta}\, a(\xi,\eta),$$

или

$$\Delta_{x\,y}\, \psi(x,y) = |\nabla\eta|^2 \Delta_{\xi\eta}\, \psi(\xi,\eta), \;\; \Delta_{x\,y}\, a(x,y) = |\nabla\eta|^2 \Delta_{\xi\eta}\, a(\xi,\eta).$$

Здесь $\Delta_{\xi\eta}\cdot = \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\cdot + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\cdot\right)$ — двумерный оператор Лапласа в пространстве переменных $(\xi,\, \eta)$. При этом система (1) примет вид

$$|\nabla\xi|^2 \Delta_{\xi\eta}\, \psi = j(x,y) \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}},$$

$$|\nabla\xi|^2 \Delta_{\xi\eta}\, a = j(x,y) \frac{a}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}.$$

Отсюда, полагая, что плотность тока $j(x,y)$ удовлетворяет условию теоремы (16), немедленно получим систему уравнений (18). Что и требовалось доказать. □

Пример 1. Построим точные решения системы уравнений следующего вида,

$$\Delta_{x\,y}\, \psi = j_0 (x^2+y^2)^{k-1} \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}},$$

$$\Delta_{x\,y}\, a = j_0 (x^2+y^2)^{k-1} \frac{a}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}, \tag{19}$$

где $j_0 = \mathrm{const} > 0$. Заметим, что имеет место соотношение

$$(x^2+y^2)^{k-1} = \frac{1}{k^2}\, |\nabla\phi(x,y)|^2\,,$$

где функция $\phi(x,y)$ — гармонический полином степени $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, плотность тока в уравнениях (19) удовлетворяет условию теоремы 1, следовательно, преобразованием (17) они сводятся к системе уравнений (18) на функции $\psi(\xi,\eta)$, $a(\xi,\eta)$, при этом новые переменные ξ, η есть сопряженные гармонические полиномы, а именно

$$\xi(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{k}{2}} \cos(k\varphi(x,y)), \;\; \eta(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{k}{2}} \sin(k\varphi(x,y)), \tag{20}$$

где функция $\varphi(x, y)$ может быть двух видов

$$\varphi(x,y) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad \text{или} \quad \varphi(x,y) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Теперь для того, чтобы выписать точные решения системы (19) с переменной плотностью тока, необходимо предъявить явные нетривиальные решения системы (18) с постоянной плотностью тока. В предыдущем разделе были найдены точные радиально-симметричные решения (13), (14), модели магнитной изоляции (2), которые мы запишем в переменных ξ, η для системы уравнений (18)

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi,\eta) &= \frac{\gamma_0^2 + J_0^2}{8\gamma_0}\left(\xi^2+\eta^2\right) + \frac{2}{\gamma_0}\left(\xi^2+\eta^2\right)^{-1}, \\ a_1(\xi,\eta) &= \frac{\gamma_0^2 - J_0^2}{8\gamma_0}\left(\xi^2+\eta^2\right) - \frac{2}{\gamma_0}\left(\xi^2+\eta^2\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\xi,\eta) &= \frac{\gamma_0^2 + J_0^2}{8\gamma_0}\left(\xi^2+\eta^2\right) + \frac{2\gamma_0}{J_0^2}\left(\xi^2+\eta^2\right)^{-1}, \\ a_2(\xi,\eta) &= \frac{\gamma_0^2 - J_0^2}{8\gamma_0}\left(\xi^2+\eta^2\right) + \frac{2\gamma_0}{J_0^2}\left(\xi^2+\eta^2\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $\gamma_0 \neq 0$ — произвольная постоянная. Осуществляя в соотношениях (21), (22) переход к переменным x, y, и учитывая равенство $J_0 = j_0/k^2$, выпишем точные радиально-симметричные решения системы уравнений (19)

$$\begin{aligned} \psi_1(x,y) &= \frac{\gamma_0^2 k^4 + j_0^2}{8\gamma_0 k^4}\left(x^2+y^2\right)^k + \frac{2}{\gamma_0}\left(x^2+y^2\right)^{-k}, \\ a_1(x,y) &= \frac{\gamma_0^2 k^4 - j_0^2}{8\gamma_0 k^4}\left(x^2+y^2\right)^k - \frac{2}{\gamma_0}\left(x^2+y^2\right)^{-k}, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \psi_2(x,y) &= \frac{\gamma_0^2 k^4 + j_0^2}{8\gamma_0 k^4}\left(x^2+y^2\right)^k + \frac{2\gamma_0 k^4}{j_0^2}\left(x^2+y^2\right)^{-k}, \\ a_2(x,y) &= \frac{\gamma_0^2 k^4 - j_0^2}{8\gamma_0 k^4}\left(x^2+y^2\right)^k + \frac{2\gamma_0 k^4}{j_0^2}\left(x^2+y^2\right)^{-k}. \end{aligned} \tag{24}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что полученные решения (23), (24) удовлетворяют системе уравнений (19) при любом вещественном $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, несмотря на то, что по построению число k является натуральным. Заметим, что при $k = 1$ плотность тока в системе (19) становится постоянной. Поэтому в этом случае, очевидно, что формулы (23), (24) определяют решение системы (18) в пространстве переменных x, y и совпадают с формулами (21), (22).

Если $k = 0$, то в этом интересном частном случае система уравнений

$$\Delta_{x\,y}\,\psi = \frac{j_0}{x^2+y^2}\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2-a^2-1}},$$
$$\Delta_{x\,y}\,a = \frac{j_0}{x^2+y^2}\frac{a}{\sqrt{\psi^2-a^2-1}}, \tag{25}$$

обладает следующими точными решениями

$$\psi_1(x,y) = \frac{\gamma_0^2+j_0^2}{8\gamma_0}\sigma(x,y) + \frac{2}{\gamma_0\sigma(x,y)}, \quad a_1(x,y) = \frac{\gamma_0^2-j_0^2}{8\gamma_0}\sigma(x,y) - \frac{2}{\gamma_0\sigma(x,y)},$$
$$\psi_2(x,y) = \frac{\gamma_0^2+j_0^2}{8\gamma_0}\sigma(x,y) + \frac{2\gamma_0}{j_0^2\sigma(x,y)}, \quad a_2(x,y) = \frac{\gamma_0^2-j_0^2}{8\gamma_0}\sigma(x,y) + \frac{2\gamma_0}{j_0^2\sigma(x,y)},$$

где принято следующее обозначение

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{4}\ln^2\left(x^2+y^2\right) + \operatorname{arctg}^2\frac{y}{x}.$$

Ниже мы приведем другие точные решения системы (25), отличные от найденных выше.

Пример 2. Рассмотрим модель магнитной изоляции описываемую следующей системой нелинейных эллиптических уравнений

$$\Delta_{x\,y}\,\psi = j_0\left(\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y\right)\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2-a^2-1}},$$
$$\Delta_{x\,y}\,a = j_0\left(\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x\right)\frac{a}{\sqrt{\psi^2-a^2-1}}. \tag{26}$$

Здесь $j_0 = \mathrm{const} > 0$. В силу теоремы 1, данная система уравнений преобразованием (17) сводится к уравнениям (18) с постоянной плотностью тока $J_0 = j_0$, при этом переменные ξ, η задаются формулами

$$\xi(x,y) = \cos x\operatorname{ch} y, \quad \eta(x,y) = \sin x\operatorname{sh} y.$$

Используя радиально-симметричные решения уравнений (18) вида (21), (22), легко предъявить точные анизотропные решения системы (26)

$$\psi_1(x,y) = \frac{\gamma_0^2+j_0^2}{8\gamma_0}\left(\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x\right) + \frac{2}{\gamma_0}\left(\operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x\right)^{-1},$$
$$a_1(x,y) = \frac{\gamma_0^2-j_0^2}{8\gamma_0}\left(\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x\right) - \frac{2}{\gamma_0}\left(\operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x\right)^{-1},$$
$$\psi_2(x,y) = \frac{\gamma_0^2+j_0^2}{8\gamma_0}\left(\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x\right) + \frac{2\gamma_0}{j_0^2}\left(\operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x\right)^{-1},$$
$$a_2(x,y) = \frac{\gamma_0^2-j_0^2}{8\gamma_0}\left(\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x\right) + \frac{2\gamma_0}{j_0^2}\left(\operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x\right)^{-1}.$$

Теперь, мы покажем, что помимо редукции системы (1) с переменной плотностью тока к аналогичной системе уравнений в частных производных (2) с постоянной плотностью тока, возможно, её нетривиальное сведение к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, также с постоянной плотностью тока.

Теорема 2. *Если в системе уравнений (1) плотность тока* $j(x,y)$ *является квадратом градиента произвольной гармонической функции* $\theta(x,y)$, $\Delta_{xy}\theta = 0$, *т.е.*

$$j(x,y) = J_0\,|\nabla\theta|^2, \;\; J_0 = \mathrm{const},$$

то следующим преобразованием

$$\psi(x,y) = \psi(\theta), \;\; a(x,y) = a(\theta),$$

система уравнений (1) редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} = J_0\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}\,, \;\; \psi \stackrel{\triangle}{=} \psi(\theta),$$

$$\frac{d^2 a}{d\theta^2} = J_0\frac{a}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}\,, \;\; a \stackrel{\triangle}{=} a(\theta), \tag{27}$$

с постоянной плотностью тока J_0.

Доказательство данной теоремы идентично доказательству теоремы 1, поэтому приводить его не будем.

Замечание 1. Система ОДУ (27) впервые была получена в статье [1], в которой было проведено ее качественное исследование. Результаты аналогичные теоремам 1 и 2 ранее были получены для неавтономного уравнения Лиувилля в работе [3].

Непосредственной проверкой можно убедиться, что система (27) обладает двумя первыми интегралами

$$\mathbf{I}_1 \equiv \left(\frac{da}{d\theta}\right)^2 - \left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)^2 + 2J_0\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1} = \mathrm{const},$$

$$\mathbf{I}_2 \equiv a\frac{d\psi}{d\theta} - \psi\frac{da}{d\theta} = \mathrm{const},$$

и имеет следующее точное решение:

$$\psi(\theta) = \frac{1}{2\gamma\lambda^2}\sqrt{J_0^2 + \lambda^4}\left(e^{\lambda\theta} + \gamma^2 e^{-\lambda\theta}\right),$$

$$a(\theta)=\frac{1}{2\gamma\lambda^2}\sqrt{J_0^2+\lambda^4}\left(e^{\lambda\theta}-\gamma^2e^{-\lambda\theta}\right). \tag{28}$$

где $\gamma\neq 0$, $\lambda\neq 0$ — произвольные вещественные постоянные. В случае, когда $\gamma=1$ функции (28) являются гиперболическим косинусом и гиперболическим синусом, соответственно

$$\psi(\theta)=\frac{1}{\lambda^2}\sqrt{J_0^2+\lambda^4}\,\mathrm{ch}\,\lambda\theta,\ \ a(\theta)=\frac{1}{\lambda^2}\sqrt{J_0^2+\lambda^4}\,\mathrm{sh}\,\lambda\theta. \tag{29}$$

Пример 3. Применяя теорему 2 сконструируем новые точные решения системы уравнений (19). Поскольку плотность тока $j(x,y)$ в данной системе уравнений является квадратом градиента гармонического полинома степени k, то из функций (28), с учетом равенства $J_0=j_0/k^2$, несложными преобразованиями получим следующие точные решения:

$$\psi_1(x,y)=\frac{1}{2\gamma\lambda^2}\sqrt{j_0^2+\lambda^4}\left(e^{\frac{\lambda}{k}\xi(x,y)}+\gamma^2e^{-\frac{\lambda}{k}\xi(x,y)}\right),$$

$$a_1(x,y)=\frac{1}{2\gamma\lambda^2}\sqrt{j_0^2+\lambda^4}\left(e^{\frac{\lambda}{k}\xi(x,y)}-\gamma^2e^{-\frac{\lambda}{k}\xi(x,y)}\right),$$

$$\psi_2(x,y)=\frac{1}{2\gamma\lambda^2}\sqrt{j_0^2+\lambda^4}\left(e^{\frac{\lambda}{k}\eta(x,y)}+\gamma^2e^{-\frac{\lambda}{k}\eta(x,y)}\right),$$

$$a_2(x,y)=\frac{1}{2\gamma\lambda^2}\sqrt{j_0^2+\lambda^4}\left(e^{\frac{\lambda}{k}\eta(x,y)}-\gamma^2e^{-\frac{\lambda}{k}\eta(x,y)}\right),$$

где $k\in\mathbb{N}$, а функции $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ определяется формулами (20). Заметим, что данные решения, в отличие от решений (23), (24), являются анизотропными по пространственным переменным. В качестве демонстрации этого факта, приведем точные решения следующей системы уравнений

$$\Delta_{x\,y}\,\psi=j_0(x^2+y^2)^{10}\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2-a^2-1}},$$
$$\Delta_{x\,y}\,a=j_0(x^2+y^2)^{10}\frac{a}{\sqrt{\psi^2-a^2-1}}.$$

Данная система является частным случаем уравнений (19) для $k=11$ и обладает точными анизотропными решениями вида

$$\psi_1(x,y)=\frac{1}{121}\sqrt{j_0^2+14641}\,\mathrm{ch}\Big(x^{11}-55x^9y^2+330x^7y^4-462x^5y^6+$$

$$+165x^3y^8 - 11xy^{10}\Big),$$

$$a_1(x,y) = \frac{1}{121}\sqrt{j_0^2 + 14641}\,\mathrm{sh}\Big(x^{11} - 55x^9y^2 + 330x^7y^4 - 462x^5y^6 +$$

$$+165x^3y^8 - 11xy^{10}\Big),$$

$$\psi_2(x,y) = \frac{1}{121}\sqrt{j_0^2 + 14641}\,\mathrm{ch}\Big(11x^{10}y - 165x^8y^3 + 462x^6y^5 -$$

$$-330x^4y^7 + 55x^2y^9 - y^{11}\Big),$$

$$a_2(x,y) = \frac{1}{121}\sqrt{j_0^2 + 14641}\,\mathrm{sh}\Big(11x^{10}y - 165x^8y^3 + 462x^6y^5 -$$

$$-330x^4y^7 + 55x^2y^9 - y^{11}\Big).$$

Отметим, что эти решения выписаны из формул (29) при $\lambda = 1$, а не из соотношений (28). Это сделано для того, чтобы избежать громоздкость записи в приведенных формулах.

Если $k = 0$, то из уравнений (19) получим систему (25). В этом случае плотность тока имеет вид $j(x,y) = j_0/(x^2+y^2)$. Здесь $j_0 = \mathrm{const}$, а функция $1/(x^2+y^2)$ является квадратом градиента следующих гармонических функций:

$$\theta(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \;\text{ или }\; \theta(x,y) = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}.$$

Теперь, осуществляя в функциях (28), зависящих от переменной θ, переход к переменным x, y выпишем новые точные решения системы (25) вида

$$\begin{aligned}
\psi_1(x,y) &= \frac{1}{2\gamma\lambda^2}\sqrt{j_0^2+\lambda^4}\left((x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}} + \gamma^2(x^2+y^2)^{-\frac{\lambda}{2}}\right),\\
a_1(x,y) &= \frac{1}{2\gamma\lambda^2}\sqrt{j_0^2+\lambda^4}\left((x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}} - \gamma^2(x^2+y^2)^{-\frac{\lambda}{2}}\right),\\
\psi_2(x,y) &= \frac{1}{2\gamma\lambda^2}\sqrt{j_0^2+\lambda^4}\left(e^{\lambda\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}} + \gamma^2 e^{-\lambda\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}}\right),\\
a_2(x,y) &= \frac{1}{2\gamma\lambda^2}\sqrt{j_0^2+\lambda^4}\left(e^{\lambda\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}} - \gamma^2 e^{-\lambda\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}}\right).
\end{aligned} \tag{30}$$

Пример 4. В этом примере мы построим новые точные решения системы уравнений (25). Как мы уже отмечали, она является частным случаем системы (19) при $k = 0$. Однако, эта система уравнений интересна еще тем фактом, что входящую в нее плотность тока $j(x,y) = j_0/(x^2+y^2)$ можно представить не только в виде квадрата градиента гармонических функций приведенных в примере 3 , но и в следующем виде

$$\left|\nabla \ln|\nabla\varphi(x,y)|^2\right|^2 = \frac{4(n-1)^2}{x^2+y^2},$$

где $\varphi(x,y)$ — произвольный гармонический полином степени $n > 1$. Таким образом, используя функции (28), зависящие от переменной $\theta = \ln|\nabla\varphi(x,y)|^2$, выпишем новые явные точные решения системы (25)

$$\psi(x,y) = \frac{n^2}{8\gamma\lambda^2(n-1)^2}\sqrt{j_0^2 + 16\lambda^4(n-1)^4} \times$$
$$\times\left((x^2+y^2)^{\lambda(n-1)} + \frac{\gamma^2}{n^4(x^2+y^2)^{\lambda(n-1)}}\right),$$
$$a(x,y) = \frac{n^2}{8\gamma\lambda^2(n-1)^2}\sqrt{j_0^2 + 16\lambda^4(n-1)^4} \times$$
$$\times\left((x^2+y^2)^{\lambda(n-1)} - \frac{\gamma^2}{n^4(x^2+y^2)^{\lambda(n-1)}}\right).$$

Обратим внимание, что полученные радиально-симметричные решения удовлетворяют системе уравнений (25) при любом вещественном $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, несмотря на то, что по построению число n является натуральным.

Список литературы

1. Ben, Abdallah N. Mathematical model of magnetic insulation / Abdallah N. Ben, P. Degond, F. Mehats // Rapport interne № 97.20. – 1997. – MIP, Universite Paul Sabatier, Toulouse, France.
2. Гурвиц, А. Теория функций. / А. Гурвиц, Р. Курант. – М.: Наука, 1968.
3. Семенов, Э.И. О новых точных решениях неавтономного уравнения Лиувилля / Э. И. Семенов // Сиб. мат. журн, 2008. – Т. 49, № 1. – С. 207–217.

E. I. Semenov, A. V. Sinitsyn

Mathematical model of magnetic insulation vacuum diode and its exact solutions

Abstract. In this paper we obtain new exact solutions of the stationary model of magnetic insulation for the vacuum diode. This mathematical model described by the system of nonlinear singular elliptic equations in two-dimensional coordinate space. Two physically important cases are considered, both with constant and variable current density. The specified class of infinite-dimensional systems of equations of magnetic insulation with variable current density is determined. They are reduced to equations of similar species with a constant current density via nontrivial transformations. The corresponding theorems are proved and illustrative examples are given.

Keywords: exact solutions, elliptic equations, magnetic insulation.

Семенов Эдуард Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова 134, тел.: (3952)453099
(semenov@icc.ru)

Синицын Александр Владимирович, доктор физико-математических наук, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова 134, тел.:(3952)453020
(avsinitsyn@yahoo.com)

Edward Semenov, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 664033, Irkutsk, Lermontova st. 134, Phone: (3952)453099
(semenov@icc.ru)

Alexander Sinitsyn, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 664003, Irkutsk, Lermontova st. 134, Phone: (3952)453020
(avsinitsyn@yahoo.com)