Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 197—205

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.997

Наблюдаемость упругих колебаний по границе сети с распределенными и сосредоточенными параметрами *

А. И. Егоров
Московский физико-технический институт

Л. Н. Знаменская
Московский физико-технический институт

Аннотация. В работе получено решение задачи граничного наблюдения (восстановления начального состояния) за колебаниями сети с распределенными и сосредоточенными параметрами.

Ключевые слова: волновое уравнение, краевая задача, упругие колебания, управляемость, система с распределенными и сосредоточенными параметрами

В работах [1]–[5] рассматривались различные варианты задачи наблюдаемости и управляемости взаимосвязанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами. В каждой из них получены достаточные условия управляемости или наблюдаемости. В статье [6] аналогичные результаты по управляемости получены для системы, содержащей несколько связанных объектов с распределенными параметрами и один с сосредоточенными параметрами. Настоящая работа посвящена задаче наблюдаемости такой системы.

1. Постановка задачи

Рассматриваются колебания сети, составленной из m струн, длина каждой струны равна ℓ. Все объекты связаны в одной концевой точке, к которой подсоединен колебательный объект с сосредоточенными параметрами. Все остальные концы струн жестко закреплены. Колебания

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-01-00265 и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/500.

такой сети описываются волновыми уравнениями

$$u^i_{tt}(x,t) = a_i^2 u^i_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in Q, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{1.1}$$

где $Q = \{\,(x,t) : 0 < x < \ell,\ 0 < t < \infty\,\}$, через ∂Q обозначим границу полосы Q. Функции $u^i(x,t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$u^i(x,0) = \varphi_i(x), \quad u^i_t(x,0) = \psi_i(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{1.2}$$

и граничным условиям при $0 \leqslant t < \infty$:

$$u^j(\ell,t) = 0, \quad j = 1,\,\ldots,\,m, \tag{1.3}$$

$$u^1(0,t) = u^2(0,t) = \ldots = u^m(0,t), \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} r_i u^i_x(0,t) = y(t), \tag{1.5}$$

$$\ddot{y}(t) + c^2 y(t) = \sum_{i=1}^{m} b_i u^i(0,t), \quad y(0) = y^0, \quad \dot{y}(0) = y^1. \tag{1.6}$$

Из условия (1.6) следует, что $y(t) = y^0 \cos ct + \dfrac{y^1}{c}\,\sin ct + \dfrac{\beta}{c}\displaystyle\int_0^t \sin c(t-\tau) u^1(0,\tau)\,d\tau$. Здесь учтено условие (1.4), согласно которому

$$\sum_{k=1}^{m} b_i u^i(0,t) = \sum_{k=1}^{m} b_i u^1(0,t) = \beta u^1(0,t), \qquad \beta = \sum_{k=1}^{m} b_i.$$

Согласование по непрерывности начальных и граничных условий дают следующие равенства для функций $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$, $i = 1,\ldots,m$:

$$\begin{gathered} \varphi_1(0) = \ldots = \varphi_m(0), \quad \psi_1(0) = \ldots = \psi_m(0), \\ \varphi_i(\ell) = 0, \quad \psi_i(\ell) = 0, \qquad i = 1,\ldots,m, \\ \sum_{i=1}^{m} r_i \varphi_i'(0) = y^0, \quad \sum_{i=1}^{m} r_i \psi_i'(0) = y^1. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Сформулируем задачу наблюдения за колебаниями сети.

Задача 1. Найти период времени T и начальные состояния (1.2) сети, колебания которой описываются уравнениями (1.1) и однородными краевыми условиями (1.3)–(1.6), по результатам наблюдения

$$u^j_x(\ell,t) = w_j(t), \qquad j = 1,\ldots,m, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.8}$$

Прежде, чем решать поставленную задачу наблюдения, приведем необходимые результаты по существованию решения краевой задачи (1.1)–(1.6).

2. Решение краевой задачи

Решение краевой задачи с дифференциальным уравнением $\ddot{y}(t)+c^2y(t)=\mu(t)+\sum\limits_{i=1}^{m} b_iu^i(0,t)$ приведено в [6]. Из этих результатов следует, что решение рассматриваемой краевой задачи (1.1)–(1.6) получается из решения, найденного в [6], при $\mu(t)\equiv 0$.

Чтобы сформулировать полученный результат, введем некоторые обозначения. Пусть $\varkappa=\sum\limits_{i=1}^{m}(r_i/a_i)$. Уравнение $p^3+c^2p+\beta/\varkappa=0$ может иметь один действительный корень и два комплексно сопряженных корня.

Если $p^3+c^2p+\beta/\varkappa=(p-\omega)((p-\omega_1)^2+\omega_2^2)$, то будем рассматривать функцию

$$K(t)=B_1e^{\omega t}+B_2e^{\omega_1 t}\cos\omega_2 t+B_3e^{\omega_1 t}\sin\omega_2 t.$$

Здесь постоянные B_i, $i=1,2,3$, находятся с помощью равенства

$$\frac{p^2+c^2}{p^3+c^2p+\beta/\varkappa}=\frac{B_1}{p-\omega}+\frac{B_2(p-\omega_1)}{(p-\omega_1)^2+\omega_2^2}+\frac{B_3\omega_2}{(p-\omega_1)^2+\omega_2^2}.$$

Справедлива следующая теорема, дающая решение краевой задачи (1.1)–(1.6).

Теорема 1. *Пусть для функций $\varphi_i(x)\in C^2[0,\ell]$ и $\psi_i(x)\in C^1[0,\ell]$ выполнены условия* (1.7) *при $i=1,\dots,m$. Тогда единственные решения $u^i(t,x)\in C^2(Q)\cap C^1(\partial Q)$, $i=1,\dots,m$, краевой задачи* (1.1)–(1.6) *представимы в виде*

$$u^i(x,t)=E_i(x+a_it)+G_i(x-a_it),\qquad (x,t)\in\overline{Q}. \tag{2.1}$$

Функции $E_i(x)$ и $G_i(x)$ заданы при $0\leqslant x\leqslant\ell$ формулами

$$E_i(x)=\frac{\varphi_i(x)}{2}+\int\limits_0^x\frac{\psi_i(s)}{2a_i}\,ds,\ \ G_i(x)=\frac{\varphi_i(x)}{2}-\int\limits_0^x\frac{\psi_i(s)}{2a_i}\,ds,\ \ i=1,\dots,m, \tag{2.2}$$

функции $E_i(\ell+z)$, $i=1,\dots,m$, имеют вид

$$E_i(\ell+z)=-G_i(\ell-z),\qquad z\geqslant 0, \tag{2.3}$$

а функции $G_i(-z)$ *определяются формулами*

$$G_1(-z) = \frac{\varphi_1(0)}{2}\,K(z/a_1) + \frac{1}{\varkappa}\int\limits_0^{z/a_1} K(z/a_1-\tau)F(\tau)\,d\tau, \qquad z \geqslant 0 \quad (2.4)$$

и при $i = 2, \ldots, m$

$$G_i(-z) = G_1(-a_1z/a_i) + E_1(a_1z/a_i) - E_i(z), \qquad z \geqslant 0, \qquad (2.5)$$

где

$$F(t) = 2\sum_{i=1}^{m} r_iE_i'(a_it) - \varkappa a_1E_1'(a_1t) - \frac{\beta}{c}\int_0^t \sin c(t-s)E_1(a_1s)\,ds - \\ -y^0\cos ct - \frac{y^1}{c}\,\sin ct. \qquad (2.6)$$

3. Решение задачи наблюдения

Обозначим $t_i = \ell/a_i$, $i = 1, \ldots, m$. Из того, что любое решение каждого из уравнений (1.1) представляет собой суперпозицию волн вида $w^i(x \pm a_it)$, следует, что решение задачи наблюдения за колебаниями рассматриваемой сети возможно лишь при условии соизмеримости моментов времени t_i, $i = 1, \ldots, m$, т. е. при условии существования таких чисел $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, m$, что $a_1/n_1 = \ldots = a_m/n_m$.

Из того, что функции $u^j(x,t)$ имеют вид (2.1), находим результаты наблюдения (1.8): $w_j(t) = E_j'(\ell + a_jt) + G_j'(\ell - a_jt)$, затем используем формулу (2.3), при этом получаем, что $E_j'(\ell + a_jt) = G_j'(\ell - a_jt)$, тогда эти результаты наблюдения представим следующим образом:

$$w_j(t) = 2G_j'(\ell - a_jt), \qquad j = 1, \ldots, m, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \qquad (3.1)$$

Очевидно, что если в (3.1) переменная t принадлежит отрезку $[0, t_j]$, то G_j явно выражаются через функции наблюдения w_j, $j = 1, \ldots, m$. Если $t \geqslant t_j$, то из выражений (2.4) и (3.1) для $j = 1$ найдем функцию $F(t)$, которая содержит функции $E_i(a_it)$, $i = 1, \ldots, m$, а остальные уравнения (3.1) для $j = 2, \ldots, m$ при $t \geqslant t_j$ позволяют определить функции $E_j(a_jt)$ на отрезках $[0, t_j]$. Приведем строгое доказательство в частном случае $j = 3$, $a_1 = a_2/2 = a_3/3$ и $T = 2t_1$.

За колебаниями рассматриваемой сети будем наблюдать в течение периода времени $T = 2t_1$, тогда результаты наблюдения (3.1) при $j = 1$ имеют следующий вид:

$$w_1(t_1 - t) = 2G_1'(a_1t), \qquad (3.2)$$
$$w_1(t_1 + t) = 2G_1'(-a_1t), \qquad (3.3)$$

где $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Преобразуем уравнение (3), используя выражение (2.4) и свойство функции $K(t)$: $K(0) = 1$, приходим к уравнению

$$-\varkappa\,\frac{a_1}{2}\,w_1(t_1+t) = \varkappa\,\frac{\varphi_1(0)}{2}\,K'(t) + F(t) + \int\limits_0^t K'(t-\tau)F(\tau)\,d\tau.$$

Поскольку функции начального состояния содержатся в функции $F(t)$, то с помощью операционного исчисления выразим функцию $F(t)$ из полученного уравнения. Полагая

$$\overline{w}_1(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} w_1(t_1+t)\,dt, \qquad \overline{F}(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} F(t)\,dt,$$
$$\overline{K}(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} K(t)\,dt,$$

применяя теорему о свертке, находим

$$-\varkappa\,\frac{a_1}{2}\,\overline{w}_1(p) = \varkappa\,\frac{\varphi_1(0)}{2}\,[p\overline{K}(p)-1] + \overline{F}(p) + [p\overline{K}(p)-1]\overline{F}(p).$$

Здесь в квадратных скобках стоит преобразование Лапласа функции $K'(t)$. Далее, воспользуемся тем, что $\overline{K}(p) = \dfrac{p^2+c^2}{p^3+c^2p+\beta/\varkappa}$ (см. [6]), тогда

$$\overline{F}(p) = -\varkappa\,\frac{a_1}{2}\,\overline{w}_1(p) - \frac{\beta}{c^2}\,\frac{a_1}{2}\,\overline{w}_1(p)\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+c^2}\right] +$$
$$+\frac{\beta}{c^2}\,\frac{\varphi_1(0)}{2}\,\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+c^2}\right].$$

Таким образом, получаем

$$F(t) = -\varkappa\,\frac{a_1}{2}\,w_1(t_1+t) - \frac{\beta}{c^2}\,\frac{a_1}{2}\int\limits_0^t w_1(t_1+s)[1-\cos c(t-s)]\,ds + \\ +\frac{\beta}{c^2}\,\frac{\varphi_1(0)}{2}\,[1-\cos ct]. \tag{3.4}$$

Если теперь воспользоваться тем, что $F(t)$ имеет вид (2.6), то будем иметь

$$2\sum_{i=1}^m r_i E_i'(a_i t) - \varkappa a_1 E_1'(a_1 t) - \frac{\beta}{c}\int\limits_0^t E_1(a_1 s)\sin c(t-s)\,ds = \mathcal{F}(t), \tag{3.5}$$

где введено обозначение

$$\mathcal{F}(t) = \frac{\beta}{c^2}\,\frac{\varphi_1(0)}{2} + \left(y^0 - \frac{\beta}{c^2}\,\frac{\varphi_1(0)}{2}\right)\cos ct + \frac{y^1}{c}\,\sin ct -$$
$$-\varkappa\,\frac{a_1}{2}\,w_1(t_1+t) - \frac{\beta}{c^2}\,\frac{a_1}{2}\int\limits_0^t w_1(t_1+s)[1-\cos c(t-s)]\,ds,$$

здесь $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

Заметим, что в рассматриваемом частном случае имеют место равенства $T = 2t_1 = 4t_2 = 6t_3$. Результаты наблюдения (3.1) для $j = 2, 3$ представим, используя формулы (2.3) и (2.5), в следующем виде для $0 \leqslant t \leqslant t_2$:

$$w_2(t) = 2G_2'(\ell - a_2 t), \tag{3.6}$$
$$w_2(t_2+t) = \frac{1}{2}\,w_1(t_1+t) - E_1'(a_1 t) + 2E_2'(a_2 t), \tag{3.7}$$
$$w_2(2t_2+t) = \frac{1}{2}\,w_1(t_1+t_2+t) - E_1'(a_1(t_2+t)) + w_2(t), \tag{3.8}$$
$$w_2(3t_2+t) = G_1'(-(\ell+a_1 t)) - \frac{1}{2}\,w_1(t) + w_2(t_2+t); \tag{3.9}$$

для $0 \leqslant t \leqslant t_3$ получаем

$$w_3(t) = 2G_3'(\ell - a_3 t), \tag{3.10}$$
$$w_3(t_3+t) = \frac{1}{3}\,w_1(t_1+t) - \frac{2}{3}\,E_1'(a_1 t) + 2E_3'(a_3 t), \tag{3.11}$$

и при $0 \leqslant t \leqslant 2t_3$ выполняется

$$w_3(2t_3+t) = \frac{1}{3}\,w_1(t_1+t_3+t) - \frac{2}{3}\,E_1'(a_1(t_3+t)) + w_3(t), \tag{3.12}$$
$$w_3(4t_3+t) = \frac{2}{3}\,G_1'(-(\ell+a_1 t)) - \frac{1}{3}\,w_1(t) + w_3(2t_3+t). \tag{3.13}$$

Равенство функций $E_1'(a_1(t_2+t))$ из (3) и $E_1'(a_1(t_3+t))$ из (3) при $2t_3 \leqslant t \leqslant t_1$ дают следующее условие на функции w_2 и w_3:

$$2w_2(2t_3-t_2+t) - 2w_2(2t_3+t_2+t) = 3w_3(t_3+t) - 3w_3(3t_3+t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_3. \tag{3.14}$$

Аналогично, равенство функций $G(-(\ell+a_1 t))$ из (3) и (3) при $0 \leqslant t \leqslant t_2$ приводят к еще одному условию на функции w_2 и w_3:

$$2w_2(t_2+t) - 2w_2(3t_2+t) = 3w_3(2t_3+t) - 3w_3(4t_3+t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{3.15}$$

В уравнение (3.5) подставим при $0 \leqslant t \leqslant t_3$ функцию $E_2'(a_2 t)$, найденную из (3), и функцию $E_3'(a_3 t)$, найденную из (3), после преобразований получаем

$$\varkappa a_1 E_1'(a_1 t) - \frac{\beta}{c}\int\limits_0^t E_1(a_1 s)\sin c(t-s)\,ds = \mathcal{F}_1(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_3, \quad (3.16)$$

где

$$\mathcal{F}_1(t) = (a_1\varkappa - r_1)w_1(t_1+t) - r_2 w_2(t_2+t) - r_3 w_3(t_3+t) + \mathcal{F}(t).$$

Обозначим $E_1(a_1t) = q(t)$ и $q(0) = \varphi(0)/2$. Применим преобразование Лапласа к уравнению (3.16), находим $\overline{q}(p) = q(0)\overline{\mathcal{K}}(p) + \dfrac{1}{\varkappa}\,\overline{\mathcal{F}}_1(p)\overline{\mathcal{K}}(p)$, где $\overline{\mathcal{K}}(p) = \left[\dfrac{p^2+c^2}{p^3+c^2p-\beta/\varkappa}\right]$. Окончательно определим функцию $E_1(a_1t)$:

$$E_1(a_1t) = \frac{\varphi_1(0)}{2}\,\mathcal{K}(t) + \frac{1}{\varkappa}\int\limits_0^t \mathcal{K}(t-\tau)\mathcal{F}_1(\tau)\,d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_3. \quad (3.17)$$

Здесь $\mathcal{K}(t) = C_1e^{\alpha t} + C_2e^{\alpha_1 t}\cos\gamma t + C_3e^{\alpha_1 t}\sin\gamma t$ и $p^3 + c^2p - \beta/\varkappa = (p-\alpha)((p-\alpha_1)^2+\gamma^2)$, а коэффициенты C_i, $i = 1,2,3$, находятся с помощью равенства

$$\frac{p^2+c^2}{p^3+c^2p-\beta/\varkappa} = \frac{C_1}{p-\alpha} + \frac{C_2(p-\alpha_1)}{(p-\alpha_1)^2+\gamma^2} + \frac{C_3\gamma}{(p-\alpha_1)^2+\gamma^2}.$$

Функция $\mathcal{K}(t)$ обладает свойством $\mathcal{K}(0) = 1$.

Выражение (3.17) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2E_1'(a_1t) = \frac{\varphi_1(0)}{a_1}\,\mathcal{K}'(t) + \frac{2}{a_1\varkappa}\,\mathcal{F}_1(t) + \\ + \frac{2}{a_1\varkappa}\int\limits_0^t \mathcal{K}'(t-s)\mathcal{F}_1(s)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_3. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Равенство (3) позволяет определить функцию $E_1'(a_1t)$ на отрезке $[t_3, t_1]$

$$2E_1'(a_1t) = w_1(t_1+t) + 3w_3(t-t_3) - 3w_3(t_3+t), \qquad t_3 \leqslant t \leqslant t_1. \quad (3.19)$$

Функция $E_1'(a_1t)$, определенная в (3.18) и (3.19), непрерывна на отрезке $[0, t_1]$ при условии, что

$$\begin{aligned} w_1(t_1+t_3) + 3w_3(0) - 3w_3(2t_3) = \\ = \frac{\varphi_1(0)}{a_1}\,\mathcal{K}'(t_3) + \frac{2}{a_1\varkappa}\,\mathcal{F}_1(t_3) + \frac{2}{a_1\varkappa}\int\limits_0^{t_3} \mathcal{K}'(t_3-s)\mathcal{F}_1(s)\,ds. \end{aligned} \quad (3.20)$$

С помощью найденной функции $E_1'(a_1t)$ определим функции $E_2'(a_2t)$ и $E_3'(a_3t)$ из равенств (3) и (3) соответственно,

$$E_i'(a_it) = \frac{a_1}{a_i}\,E_1'(a_1t) - \frac{a_1}{2a_i}\,w_1(t_1+t) + \frac{1}{2}\,w_i(t_i+t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_i, \quad i = 2,3. \tag{3.21}$$

Выражения (3), (3) и (3) объединим

$$G_i'(a_it) = \frac{1}{2}\,w_i(t_i - t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_i, \quad i = 1,2,3. \tag{3.22}$$

Уравнение (3.5) для $t_3 \leqslant t \leqslant t_1$ дает дополнительные условия на функции w_i, $i = 1,2,3$, если в это уравнение подставлять найденные в (3.18), (3.19) и (3.21) значения функций $E_i'(a_it)$ для $t_3 \leqslant t \leqslant t_2$, $t_2 \leqslant t \leqslant 2t_3$ и $2t_3 \leqslant t \leqslant t_1$, при этом используются свойства (2.3), (2.5), (3), (3) и (3) функций E_i и G_i, $i = 1,2,3$.

Приведенные рассуждения доказывают следующее утверждение.

Лемма 1. *Если функции* $\varphi_j(x)$ *и* $\psi_j(x)$, $j = 1,2,3$, *удовлетворяют условиям* (1.7) *и* $\varphi_j(x) \in C^2[0,\ell]$, $\psi_j(x) \in C^1[0,\ell]$, $j = 1,2,3$, *то функции наблюдения* $w_j(t)$, *определяемые формулами* (1.8), *принадлежат* $C^1[0,\ell]$ *и удовлетворяют условиям* (3.14), (3.15), *уравнению* (3.5) *при* $t_3 \leqslant t \leqslant t_1$, *а также обладают свойствами:*

$$w_j(0) = \varphi_j'(\ell), \quad w_j(t_j) = \varphi_j(0) - \frac{\psi_j(0)}{a_j}, \qquad j = 1,2,3.$$

Функции начального состояния $\varphi_i'(x)$ и $\psi_i(x)$, $i = 1,2,3$, найдем из (2.2), используя найденные выражения (3.18), (3.19) и (3.21) для функций $E_i'(a_it)$ и (3.22) для $G_i'(a_it)$. Эти функции имеют следующий вид:

$$\varphi_i'(a_it) = \frac{a_1}{a_i}\,E_1'(a_1t) - \frac{a_1}{2a_i}\,w_1(t_1+t) + \frac{1}{2}\,[w_i(t_i+t) + w_i(t_i-t)], \tag{3.23}$$

$$\frac{\psi_i(a_it)}{a_i} = \frac{a_1}{a_i}\,E_1'(a_1t) - \frac{a_1}{2a_i}\,w_1(t_1+t) + \frac{1}{2}\,[w_i(t_i+t) - w_i(t_i-t)], \tag{3.24}$$

здесь $0 \leqslant t \leqslant t_i$ и $i = 1,2,3$. Причем, в силу условия (3.20), эти функции непрерывны на отрезках $[0, t_i]$.

Формулы (3) и (3) перепишем в следующем виде для $0 \leqslant x \leqslant \ell$:

$$\begin{aligned}\varphi_i'(x) = \frac{a_1}{a_i}\,E_1'\left(\frac{a_1x}{a_i}\right) - \frac{a_1}{2a_i}\,w_1\left(\frac{a_it_1+x}{a_i}\right) + \\ +\frac{1}{2}\left[w_i\left(\frac{\ell+x}{a_i}\right) + w_i\left(\frac{\ell-x}{a_i}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}\frac{\psi_i(x)}{a_i} = \frac{a_1}{a_i}\,E_1'\left(\frac{a_1x}{a_i}\right) - \frac{a_1}{2a_i}\,w_1\left(\frac{a_it_1+x}{a_i}\right) + \\ +\frac{1}{2}\left[w_i\left(\frac{\ell+x}{a_i}\right) - w_i\left(\frac{\ell-x}{a_i}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.26}$$

Справедлива теорема.

Теорема 2. *Пусть* $a_1 = a_2/2 = a_3/3$. *Если о функциях* $\varphi_j(x)$ *и* $\psi_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, *начального состояния* (1.2) *сети известно, что они удовлетворяют условиям теоремы* 1, *то по результатам наблюдения* (1.8) *в течении периода времени* $T = 2t_1$ *функции* $\varphi_j(x)$ *и* $\psi_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, *определяются однозначно с помощью формул* (3.25) *и* (3.26). *При этом функция* $E_1'(a_1 t)$ *имеет вид* (3.18) *для* $0 \leqslant t \leqslant t_3$ *и* (3.19) *для* $t_3 \leqslant t \leqslant t_1$.

Список литературы

1. Егоров А. И. Управления колебаниями связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2005. — Т. 45. — № 10. — С. 1766–1784.
2. Егоров А. И. Об управляемости колебаний системы связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2006. — Т. 46. — № 6. — С. 1002–1018.
3. Егоров А. И. Управляемость упругих колебаний систем с распределенными и сосредоточенными параметрами по двум границам / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2006. — Т. 46. — № 11. — С. 2032–2044.
4. Егоров А. И. О граничной наблюдаемости упругих колебаний связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Автом. и телемех. — 2007. — № 2. — С. 95–102.
5. Знаменская Л. Н. Наблюдаемость упругих колебаний систем с распределенными и сосредоточенными параметрами по двум границам / Л. Н. Знаменская // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2007. — Т. 47. — № 6. — С. 944–958.
6. Егоров А. И. Об управляемости колебаний сети из связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами / А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2009. — Т. 49. — № 5. — С. 815–825.

A. I. Egorov, L. N. Znamenskaya

Observability of Elastic Oscillations on the Boundary of the Distributed and Concentrated Parameters Net

Abstract. There is solved the boundary observability problem (to reconstruction of initial conditions) for the elastic oscillations of the distributed and concentrated parameters net.

Keywords: wave equation, boundary problem, elastic oscillations, controllability, system with distributed and concentrated parameters.

Егоров Александр Иванович, доктор физико-математических наук, доцент, Московский физико-технический институт, 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, тел.: (495) 408-38-27, (egorov@4unet.ru)

Знаменская Людмила Николаевна, доктор физико-математических наук, доцент, Московский физико-технический институт, 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, тел.: (495) 408-38-27, (lznam@lznam.pereslavl.ru)

Egorov Alexandr Ivanovich, Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Moscow Institute of Physic and Technology, 141700, Moscow reg., Dolgoprudny, per. Institutskii, 9, Phone: (495) 408-38-27, (egorov@4unet.ru)

Znamenskaya Lyudmila Nikolaevna, Doctor of physical and mathematical sciences, associate professor, 141700, Moscow reg., Dolgoprudny, per. Institutskii, 9, Phone: (495) 408-38-27, (egorov@4unet.ru)