Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 328—332

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.983.51

Непрерывные решения вырожденного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах

С. С. Орлов
Иркутский государственный университет

Аннотация. В статье изучается задача Коши для линейного интегро-дифференциального операторного уравнения второго порядка с вырождением в банаховых пространствах. Указаны достаточные условия существования и единственности классического (дважды сильно непрерывно дифференцируемого) решения, получены явные формулы для его восстановления.

Ключевые слова: банахово пространство, фредгольмов оператор, жорданов набор.

1. Постановка задачи

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$B\ddot{x}(t) - A_1\dot{x}(t) - A_0x(t) - \int_0^t k(t-s)x(s)ds = f(t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1, \tag{2}$$

где $B,\ A_1,\ A_0,\ k(t) : E_1 \to E_2$ — замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, такими что выполнены условия:

$$D(B) \subset D(A_1) \cap\ D(A_0) \cap D(k),\ \overline{D(B)} = \overline{D(A_1) \cap D(A_0) \cap D(k)} = E_1,$$

$E_1,\ E_2$ — банаховы пространства, причем область определения $D(k)$ оператора $k(t)$ не зависит от t. Функции $x(t)$ и $f(t)$ являются абстрактными функциями неотрицательного вещественного аргумента t со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Оператор B предполагается нормально разрешимым фредгольмовым оператором с n-мерным ядром.

Следуя идее работы [1], покажем, что задача Коши (1)–(2) в такой постановке не всегда имеет классическое решение, под которым понимается функция класса $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, E_1)$, обращающая в тождество уравнение (1) и удовлетворяющая начальным условиям (2).

2. Построение классического решения

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\mathcal{F}(t) = A_1 + A_0 t + \int_0^t (t-\tau)k(\tau)d\tau,$$

$$g(t) = f(t) + A_1 x_1 + A_0(x_0 + x_1 t) + \int_0^t k(t-\tau)(x_0 + x_1\tau)d\tau,$$

$$K_{ij}(t) = \langle \mathcal{F}(t)\varphi_i + \int_0^t R(t-\tau)\mathcal{F}(\tau)\varphi_i d\tau,\, \psi_j\rangle,\ i,j = \overline{1,n},$$

$$b_j(t) = -\int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} \langle (I + (t-s-\tau)R(\tau))g(s),\, \psi_j\rangle\, d\tau ds,\ j = \overline{1,n},$$

где R(t) — резольвента ядра $\mathcal{F}(t)\Gamma$, Γ — оператор Треногина-Шмидта [2], $\{\varphi_i,\ i = \overline{1,n}\}$ — базис в $N(B)$, $\{\psi_i,\ i = \overline{1,n}\}$ — базис в $N(B^*)$.

Теорема 1. *Если выполнены условия:*

A) *оператор B имеет относительно оператор-функции $\mathcal{F}(t)$ полный биканонический жорданов набор [3];*

B) *оператор-функция $k(t) \in \mathcal{C}^{p-1}(t \geq 0)$ сильно непрерывна на $D(k)$;*

C) $\langle f(t),\, \psi_i\rangle \in \mathcal{C}^{p_i-1}(\mathbb{R}_+),\ i = \overline{1,n}$;

D) $b_j^{(q+1)}(0) = 0,\ q = \overline{1,p_j},\ j = \overline{1,n}$,

то задача Коши (1)–(2) имеет единственное классическое решение. Здесь и далее p_i — длина жордановой цепочки элемента φ_i относительно оператор-функции $\mathcal{F}(t)$, $p = \max\limits_{i=\overline{1,n}} p_i$.

Доказательство. Согласно [1], решение задачи Коши (1)–(2) будем искать в виде:

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \Gamma V(t) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \xi_i(t), \tag{3}$$

где функции $V(t) : \mathbb{R}_+ \to E_2,\ \xi_i(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ i = \overline{1,n}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$V(0) = \dot{V}(0) = 0,\ \langle V(t),\, \psi_j\rangle = 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

$$\xi_i(0) = \dot{\xi}_i(0) = 0,\ i = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Подстановкой (3) в (1) и двукратным интегрированием по t с учетом начального условия из (4), получим относительно $V(t)$ регулярное интегрально-операторное уравнение типа свертки с ядром $\mathcal{F}(t)\Gamma$, являющимся в силу B) сильно непрерывным на E_2 семейством ограниченных операторов. Единственное классическое решение такого уравнения восстанавливается в терминах резольвенты $R(t)$ по формуле:

$$V(t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{t-s} (I + (t-s-\tau)R(\tau))g(s)d\tau ds +$$
$$+ \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \left[F(t-s)\varphi_i + \int\limits_0^{t-s} R(t-s-\tau)\mathcal{F}(\tau)\varphi_i d\tau \right] \xi_i(s)ds, \tag{6}$$

где функции $\xi_i(t),\ i = \overline{1,n}$ удовлетворяют системе линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода:

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_0^t K_{ij}(t-s)\xi_i(s)ds = b_j(t),\ j = \overline{1,n}. \tag{7}$$

В силу условия A) элементы матрицы-функции $\|K_{ij}(t)\|_{i,j=\overline{1,n}}$ обладают следующим свойством:

$$K_{ij}^{(s)}(0) = \begin{cases} 0, & s < p_i - 1, \\ \delta_{ij}, & s = p_i - 1, \\ 0, & s > p_i - 1, j > i. \end{cases}$$

Тогда система (7) последовательным дифференцированием каждого из ее уравнений с учетом условий D) и (5) сводится к системе линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$\xi_j(t) + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t K_{ij}^{(p_j)}(t-s)\xi_i(s)ds = b_j^{(p_j)}(t),\ j = \overline{1,n}, \tag{8}$$

которая при выполнении условий B) и C) имеет единственное векторное решение, состоящее из функций $\xi_i(t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+),\ i = \overline{1,n}$.

Таким образом, задача Коши (1)–(2) однозначно разрешима в классе $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, E_1)$. □

Замечание 1. Блок условий D) теоремы 1 задает соотношения на ядро интегральной части, свободную функцию уравнения (1) и начальные условия (2). Это и означает, что задача Коши (1)–(2) имеет классическое решение не при любых „входных данных“.

Замечание 2. Применение к поставленной задаче теории обобщенных функций Соболева-Шварца в банаховых пространствах [3] позволяет снять эти ограничения и построить решение в классе распределений с ограниченным слева носителем.

3. Приложение

Полученный результат может быть применен к исследованию следующей начально-краевой задачи, возникающей в теории вязко-упругих процессов [4]:

$$(\gamma-\Delta)u''_{tt}(t,\bar{x})-\beta\Delta u'_t(t,\bar{x})-\Delta u(t,\bar{x})+\int_0^t g(t-\tau)\Delta u(\tau,\bar{x})d\tau=f(t,\bar{x}),$$

$$u|_{t=0}=u_0(\overline{x}),\ u_t|_{t=0}=u_1(\overline{x}),\ u|_{\overline{x}\in\partial\Omega}=0,$$

если вещественный параметр γ является собственным числом кратности n оператора Лапласа, действующего по пространственным переменным. Здесь Ω — ограниченное в $\mathbb{R}^m$ множество с регулярной границей $\partial\Omega$. Оператор $B=\gamma-\Delta$ с областью определения $\mathcal{C}_0^2(\Omega)$ — дважды дифференцируемых на Ω финитных функций, является самосопряженным нормально разрешимым фредгольмовым оператором на пространстве $\mathcal{L}_2(\Omega)$. Длины всех жордановых цепочек равны 1.

Таким образом, согласно теоремы 1, данная начально-краевая задача имеет единственное решение класса $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)\cap\mathcal{C}_0^2(\Omega)$, если выполнены условия: $g(t),\ \int_\Omega f(t,\bar{x})\phi_i(\bar{x})d\bar{x}\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, где $\phi_i,\ i=\overline{1,n}$ — собственные функции, соответствующие собственному числу γ; $u_0(\bar{x}),\ u_1(\bar{x})\in\mathcal{C}_0^2(\Omega)$.

Список литературы

1. Сидоров Н. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением / Н. А. Сидоров, О. А. Романова // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19, № 9. — С. 1516–1526.
2. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. — М.: Наука, 1969.
3. Sidorov N. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
4. Cavalcanti M. M. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping / M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira // Math. Meth. Appl. Sci. — 2001. — Vol. 24. — P. 1043–1053.

S. S. Orlov
The continuous solutions of a singular integro-differential equation of the second order in Banach spaces

Abstract. The article is devoted to the investigation of Cauchy problem for linear integro-differential operator equation of the second order with degeneration in Banach spaces. Sufficient conditions of the classical (twice strongly continuously differentiable) solution existence and uniqueness are shown; explicit formulas of the solution are obtained.
Keywords: Banach space, Fredholm operator, Jordan set.

Орлов Сергей Сергеевич, аспирант, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952) 24-22-10, (`orlov_sergey`)

Orlov Sergey, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003, postgraduat student, Phone: (3952) 24-22-10, (`orlov_sergey`)