Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 313—316

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.9

О решении одной нелинейной краевой задачи на полуоси с малым параметром

А. И. Дрегля
Сибирский институт ГАСИС, Иркутский госуниверситет

Аннотация. Рассматривается двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка на сколь угодно большом интервале $[0, \frac{1}{\varepsilon}]$, где ε – малый параметр. Предложен метод последовательных приближений для построения искомого решения.

Ключевые слова: краевая задача, малый параметр, сингулярность, принцип сжимающих отображений.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} = R(u, x, \varepsilon), 0 \leq x < \infty, \tag{1}$$

где ε – малый параметр.

Пусть

1. $R(u, x, \varepsilon)$ – непрерывная функция в области $\Omega = \{|u| < r, 0 \leq x < \infty, 0 < \varepsilon < \rho\}$, причем в области Ω выполнены оценки

$$\sup_{x,\varepsilon} |R'_u(u, x, \varepsilon) - \alpha^2| = O(|u|),$$

$$\sup_{x,\varepsilon} |R(u, x, \varepsilon) - \alpha^2 u - R(0, x, \varepsilon)| = O(|u|^2),$$

$$\sup_{x} |R(0, x, \varepsilon)| = O(\varepsilon^4),$$

$$\alpha^2 - const.$$

Требуется построить малое решение u при $\varepsilon \to +0$ уравнения (1) на сколь угодно большом интервале $[0, \frac{1}{\varepsilon}]$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0; \; u|_{x=1/\varepsilon} = 0. \tag{2}$$

Подобные краевые задачи возникают в ряде проблем в прикладной математике [2, 3, 4], [6].

С помощью замены $x = \frac{t}{\varepsilon}$ задачу (1)–(2) приведем к виду

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dt^2} = R(u, t/\varepsilon, \varepsilon),\ 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = 0,\ u|_{t=1} = 0. \tag{4}$$

Задачу (3)–(4) можно рассматривать как нелинейное операторное уравнение

$$F(u, \varepsilon) = 0, \tag{5}$$

где оператор

$$F(u, \varepsilon) = \left\{ \varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dt^2} - R(u, t/\varepsilon, \varepsilon), u(0), u(1) \right\}$$

действует из банахова пространства $X = C^{(2)}_{[a,b]}$ в банахово пространство $Y = C_{[a,b]} \dot{+} R^2$. При этом оператор F имеет производную Фреше по u, причем производной Фреше в точке $u = 0$ отвечает линейная краевая задача

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dt^2} - \alpha^2 u = h(t), \tag{6}$$

$$u(0) = 0,\ u(1) = 0. \tag{7}$$

Так как соответствующая функция Грина оператора $\frac{d^2}{dt^2} - (\alpha/\varepsilon)^2$ имеет вид

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} k(t-1) \operatorname{sh} ks}{k}, & s \le t \\ \frac{\operatorname{sh} kt \operatorname{sh} k(s-1)}{k}, & s \ge t, \end{cases}$$

где $k = \frac{\alpha}{\varepsilon}$, то непосредственными вычислениями проверяется оценка

$$||F_u^{-1}(0, \varepsilon)||_{\mathcal{L}(X \to Y)} = O(1/\varepsilon^2).$$

Лемма 1. *Пусть*
1) Оператор $F(u, \varepsilon)$ непрерывен по u, ε и имеет частную производную Фреше $F'_u(u, \varepsilon)$ непрерывную по u, ε,

$$||F_u^{-1}(0, \varepsilon)|| = O(1/\varepsilon^2);$$

2) $||F'_u(u, \varepsilon) - F'_u(0, \varepsilon)|| \le L(||u||)$;
3) $||F(0, \varepsilon)|| = O(\varepsilon^4)$.

Тогда найдутся числа $r_0 \in (0, r)$ и $\rho_0 \in (0, \rho)$ такие, что для каждого $\varepsilon \in (0, \rho_0)$ уравнение (5) имеет в шаре $||u|| \le \varepsilon^2 r_0$ непрерывное решение $u \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство:
Следуя работе Р. Ю. Леонтьева [7], уравнение (5) с помощью замены $u = \varepsilon^2 v$ приведем к эквивалентному уравнению $v = \Phi(v, \varepsilon)$, где $\Phi(v, \varepsilon) = v - \frac{1}{\varepsilon^2} F_u^{-1}(0, \varepsilon) F(\varepsilon^2 v, \varepsilon)$ в силу условий леммы удовлетворяет условиям принципа сжимающих отображений.

На основании леммы 1 имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1. Тогда задача (3)–(4) имеет единственное решение $u \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Последовательность $\{u_n\}$, где u_n является решением линейной краевой задачи*

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 u_n}{dt^2} - \alpha^2 u_n = R(u_{n-1}, t/\varepsilon, \varepsilon) - \alpha^2 u_{n-1}, \tag{8}$$

$$u_n(0) = 0, \ u_n(1) = 0 \tag{9}$$

$u_0 = 0$, *сходится к этому решению нелинейной краевой задачи (3).*

При численном решении сингулярных линейных краевых задач (8)–(9) с малым параметром при старшей производной является эффективным использование сеток Г. И. Шишкина (см. [4, 5]).

Автор благодарит проф. Сидорова Н. А. за постановку задачи.

Список литературы

1. Дрегля А. И., Пимшина Л. П. О применении сеток Шишкина в одной сингулярной задаче с малым параметром / А. И. Дрегля, Л. П. Пимшина // Труды 3ей межвузовской занальной конференции, посвященной памяти проф. Б.А.Бельтюкова. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. пед. ун-та, 2007. — С. 43–46.
2. Glauert M. B., Lighthill M. J. The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder / M. B. Glauert, M. J. Lighthill // Proc. R. Soc. London, 1955, 320. — P. 188–203.
3. Schlichting H. Boundary Layer Theory / H. Schlichting. — McGraw Hill, 1951.
4. Farrel P. A. Robust Computational Techniques for Boundary Layers / P. A. Farrel, A. F. Hegarty, J. J. H. Miller and others. — Chapman and hall CRC, Florida, USA, 2000.
5. Dreglea A. I., Shishkin G. I. Robust numerical method for a singularly perturbed equation with unboundedly growing convective term at infinity / A. I. Dreglea, G. I. Shishkin // Proceedings of International Conference on Computational Mathematics. — Novosibirsk, 2004. — P. 83–87.
6. Дрегля А. И. Некоторые аналитические и точные решения систем уравнений в теории моделирования полимеров / А. И. Дрегля // Сиб. журн. индустр. матем. — 2008. — Том 11. — № 3. — С. 61-–70.
7. Леонтьев Р. Ю. Теоремы о неявном операторе в секториальных квазиокрестностях и минимальные ветви решений нелинейных уравнений / Р. Ю. Леонтьев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. — Челябинск, 2008. — Вып. 1. — № 15 (115). — С. 37–41.

A. I. Dreglea

Solutions of nonlinear BVP with small parameter on semi-axis

Abstract. This paper addresses two-point BVP for the second order differential equation on arbitrarily big interval $[0, \frac{1}{\varepsilon}]$, where ε is small parameter. The method of successive approximations is employed for solutions construction.

Keywords: BVP, small parameter, principle of contracting mappings.

Дрегля Алена Ивановна, старший преподаватель кафедры управления, ГОУ ДПО Сибирский институт ГАСИС, 664000, Иркутск, ул. К. Либкнехта, 153, (adreglea@gmail.com)

Dreglea Aliona, Siberian Inst. GASIS, 153, K. Libkneht St., Irkutsk, 664000, M.Sc., (adreglea@gmail.com)