



Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 63–71

Онлайн-доступ к журналу:
<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.958 / 517.977

Оптимизация форм тел, аблирующих в атмосфере планеты*

М. А. Аргучинцева

Иркутский государственный университет

Аннотация. В статье исследована задача о нахождении оптимальной начальной формы аблирующего осесимметричного тела, движущегося по баллистической траектории и обладающего минимальным суммарным радиационным нагревом поверхности.

Ключевые слова: оптимальное аэродинамическое проектирование, интегро-дифференциальная система.

1. Введение

Оптимальное аэродинамическое проектирование космических аппаратов является одной из интересных и перспективных областей приложения методов оптимального управления и вариационного исчисления. Известно, что при движении с гиперзвуковыми скоростями в атмосферах планет поверхности тел подвергаются интенсивному радиационному и конвективному нагреву. В результате этого происходит разрушение теплозащитного покрытия, сопровождающееся уносом массы тела. Изучение уноса массы космического аппарата представляет большой интерес в связи с созданием зондов, способных входить в атмосферы внешних планет Солнечной системы.

Одним из эффективных путей снижения тепловых потоков к телу и, следовательно, уменьшения уноса массы покрытия является соответствующий выбор формы спускаемого аппарата, которая должна удовлетворять целому ряду аэродинамических и конструктивных требований. В данной работе исследуется вопрос нахождения оптимальной начальной формы тела, для которой суммарный радиационный нагрев поверхности вдоль баллистической траектории движения будет минимальным.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 08–01–00709.

Нужно отметить, что унос массы теплозащитного покрытия приводит к изменению первоначальной формы тела, его аэродинамических коэффициентов и, в конечном счете, влияет на траекторию движения тела. Поэтому важно совместно решать задачи обтекания и нагрева тела с учетом абляции поверхности и движения тела по траектории. В наиболее общей постановке проблема поиска оптимальной начальной формы тела, обгорающего в атмосфере планеты, представляет собой сложную задачу оптимального управления системой нестационарных уравнений Навье-Стокса с управляемыми границами. Исследование этой задачи сопряжено со значительными трудностями.

В настоящее время в научной литературе рассматриваются различные упрощения исходной постановки задачи. Так, в работах [1,2] исследовалось уравнение абляции, когда унос массы происходил под воздействием конвективного нагрева. Соответствующие решения для стационарных форм аблирующих тел получены в работах [3-5]. Исследованию уноса массы осесимметричных и пространственных тел за счет радиационного теплового потока в атмосферах Земли и Юпитера при неизменных условиях в набегающем потоке посвящены работы [6-9]. В [8] рассмотрена постановка сопряженной задачи, которая включает уравнения движения тела переменной формы и уравнения радиационной газовой динамики для химически равновесных течений невязкого газа в ударном слое. В работе [9] была решена задача об оптимальной стационарной форме аблирующего тела с точки зрения минимума уноса массы при неизменных условиях в набегающем потоке. При этом предполагалось, что радиационный нагрев зависит от локального угла наклона поверхности.

Данная работа посвящена более общей постановке задачи о нахождении оптимальной начальной формы аблирующего осесимметричного тела, движущегося по баллистической траектории и обладающего минимальным суммарным радиационным нагревом поверхности. Общая нестационарная задача обтекания разбивается на две взаимосвязанные части:

- 1) нестационарную задачу о движении аблирующего тела по баллистической траектории в атмосфере планеты. Данная задача описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений движения, зависящей от аэродинамических коэффициентов в каждой точке траектории, и интегро-дифференциальным уравнением абляции тела за счет теплового нагрева;
- 2) стационарную задачу обтекания тела в заданной точке траектории с учетом теплообмена. Асимптотическое решение данной задачи позволило получить функционалы для радиационного теплового потока [10] и волнового сопротивления [11], явно зависящие от формы тела и параметров обтекания.

Интегрирование уравнений движения с учетом найденных коэффициентов сопротивления и теплообмена позволяет поставить и эффективно решить соответствующие вариационные задачи нахождения оптимальных начальных форм аблирующих тел.

2. Постановка задачи

Рассмотрим гиперзвуковое движение осесимметричного тела в атмосфере планеты вдоль баллистической траектории [8]

$$\begin{aligned} M(t) \frac{dv(t)}{dt} &= -\frac{1}{2} \rho(t) v^2(t) C_B(t) S(t) + M(t) g \sin \gamma(t), \\ \frac{d\gamma(t)}{dt} &= \cos \gamma(t) \left(\frac{g}{v(t)} - \frac{v(t)}{R_E} \right), \\ \frac{dH(t)}{dt} &= -v(t) \sin \gamma(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t – время ($t \in [0, T]$); $v(t)$, $C_B(t)$, $M(t)$, $R(t)$, $S(t)$ ($S(t) = \pi R^2(t)$) – соответственно скорость, коэффициент волнового сопротивления, масса, радиус и площадь донного сечения тела; $\rho(t)$ – плотность газа на высоте $H(t)$; $\gamma(t)$ – угол наклона траектории движения; g – ускорение свободного падения; R_E – средний радиус планеты. Для изотермической атмосферы имеем

$$\rho(t) = \rho_0 \exp(-\lambda H(t)),$$

где ρ_0 – плотность атмосферы на уровне поверхности планеты; λ^{-1} – шкала высот для плотности.

При больших сверхзвуковых скоростях входа в плотные слои атмосферы (порядка второй космической скорости и выше) преобладающую роль в нагреве тела играет радиационный тепловой поток от сжатого ударного слоя. Тогда уравнение абляции, описывающее обгар осесимметричного тела за счет радиационного нагрева, имеет вид [6]:

$$\frac{\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2}} = -\frac{q_R(x,t)}{H_{ef} \rho_T}, \quad (2)$$

где x – координата вдоль оси тела; $y(x,t)$ – функция формы тела; $q_R(x,t)$ – величина локального радиационного теплового потока в заданную точку поверхности тела; H_{ef} – эффективная энтальпия разрушения теплозащитного покрытия; ρ_T – плотность тела.

Уравнения (1), (2) решаются при начальных условиях

$$H(0) = H_0, \quad v(0) = v_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0; \quad (3)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad y_0(0) = 0, \quad y_0(L) = R_0, \quad (4)$$

где H_0 , v_0 , γ_0 – заданные высота, скорость и угол входа в атмосферу; $y_0(x)$, L , R_0 – начальная форма тела, ее длина и радиус донного сечения.

Выражения для коэффициента волнового сопротивления и локального радиационного теплового потока осесимметричного тела получены в работах [10,11] из асимптотического исследования задач стационарного гиперзвукового обтекания тел в заданной точке траектории с учетом теплообмена

$$C_B(t) = \frac{4}{R^2(t)} \int_{x_0(t)}^L \frac{y(x, t) \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^3 dx}{1 + \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2}, \quad (5)$$

$$q_R(x, t) = C_{R0}(t) \frac{\rho(t) v^3(t)}{2} \frac{1}{y(x, t)} \int_{x_0(t)}^x \frac{y(s, t) \left(\frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \right)^{2N+11}}{\left(1 + \left(\frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \right)^2 \right)^{(2N+9)/2}} \times$$

$$\times \left[1 + b \int_s^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y(s_1, t)}{\partial s_1} \right)^2} ds_1 \frac{\left(\frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \right)^{2N+8}}{\left(1 + \left(\frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \right)^2 \right)^{(2N+7)/2}} \right]^{-\frac{N+5}{N+4}} ds. \quad (6)$$

Здесь N – параметр излучения газа [10], $x_0(t)$ – координата критической точки тела

$$x_0(t) = \int_0^t \frac{C_{R0}(\tau)}{H_{ef} \rho_T} d\tau.$$

Для вычисления коэффициента радиационного теплообмена в критической точке затупленного тела $C_{R0}(t)$ можно использовать известные эмпирические зависимости [10] для различных составов атмосфер планет. Например, для воздуха при $9 \text{ км/с} \leq v(t) \leq 20 \text{ км/с}$; $10^{-7} \text{ г/см}^3 \leq \rho(t) \leq 10^{-4} \text{ г/см}^3$; $0.3 \text{ м} \leq R(t) \leq 40 \text{ м}$ имеем

$$C_{R0}(t) = \frac{\Gamma}{2 + 8.9\Gamma^{5/6}},$$

$$\Gamma = 0.00344(0.1v(t))^6(\rho(t) 10^6)^{0.35} R^{0.5}(t), \quad b = 2(n+4)\Gamma.$$

Нужно отметить, что в классе тонких осесимметричных тел, когда $\left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 \ll 1$, выражение для радиационного теплового потока (6) можно упростить, тогда уравнение абляции примет вид

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -\frac{\varphi(x, t)}{y(x, t)}, \quad (7)$$

$$\varphi(x, t) = K(t) \int_{x_0(t)}^x y(s, t) \left(\frac{\partial y(s, t)}{\partial s} \right)^{2N+11} ds, \quad K(t) = \frac{\rho(t)v^3(t)C_{R0}(t)}{2H_{ef}\rho_T}.$$

Масса тела равна

$$M(t) = \rho_T \pi \int_{x_0(t)}^L y^2(x, t) dx. \quad (8)$$

Поставим следующую оптимизационную задачу: в классе гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям (4), найти начальную форму аблирующего тела $y_0(x) = y(x, 0)$, которая подчиняется системе уравнений (1)–(3), дополнительному ограничению на массу аппарата

$$M(t) \geq M_*, \quad (9)$$

(M_* – заданное минимально возможное значение массы аппарата) и минимизирует функционал суммарного радиационного нагрева

$$Q_R = 2\pi \int_0^T \int_{x_0(t)}^L y(x, t) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2} q_R(x, t) dx dt. \quad (10)$$

Таким образом, поставленная задача является задачей оптимального управления начальными условиями системы, состоящей из нелинейного интегро-дифференциального уравнения абляции (2) и системы обыкновенных дифференциальных уравнений движения тела по баллистической траектории (1). Для ее решения использовался численный метод локальных вариаций [12]. Опишем общую схему метода.

3. Метод решения

Для дальнейших рассуждений функцию формы тела $y(x, t)$ удобно переписать в безразмерном виде $\eta(\xi, t)$ ($\xi \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$):

$$\eta = y/R, \quad \xi = x/L, \quad \tau = R/L.$$

Тогда искомая начальная форма тела $\eta_0(\xi) = y_0(x)/R$ будет удовлетворять граничным условиям $\eta_0(0) = 0$, $\eta_0(1) = 1$. На плоскости (ξ, t) ведем равномерную сетку узлов

$$t_i = i \Delta t, \quad \Delta t = T/n, \quad i = 0, 1, \dots, n;$$

$$\xi_j = j \Delta \xi, \quad \Delta \xi = 1/m, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Первоначальное число узлов по временной переменной ($n = 80$) затем уточнялось в процедуре автоматического выбора шага сетки Δt метода Рунге-Кутты интегрирования системы уравнений движения (1). Соотношение между количеством узлов m и n выбиралось из условия выполнения соответствующего критерия Куранта для конечно-разностной схемы уравнения абляции (2).

В качестве начального приближения искомого решения $\eta_0(\xi)$ задавалась одна из следующих зависимостей:

$$\eta_0^0 = \xi^{1/4}, \quad \eta_0^0 = \xi^{1/2}, \quad \eta_0^0 = \xi^{3/4}, \quad \eta_0^0 = \xi.$$

Как показали расчеты, все эти начальные приближения в процессе варьирования сходились к одной и той же оптимизирующей кривой, однако, в случае конического начального приближения $\eta_0^0 = \xi$ скорость сходимости метода была значительно быстрее. Для выбранного начального приближения по квадратурным формулам Симпсона производился подсчет интегралов C_B (5), M (8), стоящих в правых частях уравнений движения (1). Далее, на каждом временном слое проводилось совместное интегрирование указанной системы интегро-дифференциальных уравнений (1)–(2). Система обыкновенных дифференциальных уравнений движения (1) исследовалась методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Для решения уравнения абляции в случае тонких тел вращения (7) использовалась неявная разностная схема, которая на каждом временном слое приводила к решению нелинейного уравнения относительно $\eta(\xi_j, t_i)$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\eta(\xi_j, t_i) - \eta(\xi_j, t_{i-1})}{\Delta t} \right] \eta(\xi_j, t_i) + \varphi(\xi_{j-1}, t_i) + \\ & + K(t_i) \eta(\xi_j, t_i) \left[\frac{\eta(\xi_j, t_i) - \eta(\xi_{j-1}, t_i)}{\Delta \xi} \right]^{2N+11} \tau^{2N+10} \Delta \xi = 0. \end{aligned}$$

Для более общего случая нетонких осесимметричных тел использование неявного подхода было сопряжено с рядом трудностей, поэтому для уравнения абляции (2),(6) применялась явная разностная схема

$$\begin{aligned} & \frac{\eta(\xi_j, t_i) - \eta(\xi_j, t_{i-1})}{\Delta t} = \\ & = - \frac{q_R(\xi_j, t_{i-1})}{H_{ef} \rho_T R(t_{i-1})} \sqrt{1 + \tau^2 \left[\frac{\eta(\xi_j, t_{i-1}) - \eta(\xi_{j-1}, t_{i-1})}{\Delta \xi} \right]^2}. \end{aligned}$$

На рис. 1 представлены примеры расчетов начальной $\eta_0^0 = \xi^{3/4}$ и конечных форм аблирующих тел при $v_0 = \{11; 15; 19\}$ км/с, $H_0 = 80$ км, $\gamma_0 = \pi/3$, $\rho_0 = 1.225$ г/м³, $\lambda^{-1} = 0.149$ км, $R_E = 6371$ км, $\tau = 0.5$, $\rho_T = 2200$ кг/м³, $H_{ef} = 2 * 10^7$ Дж/кг.

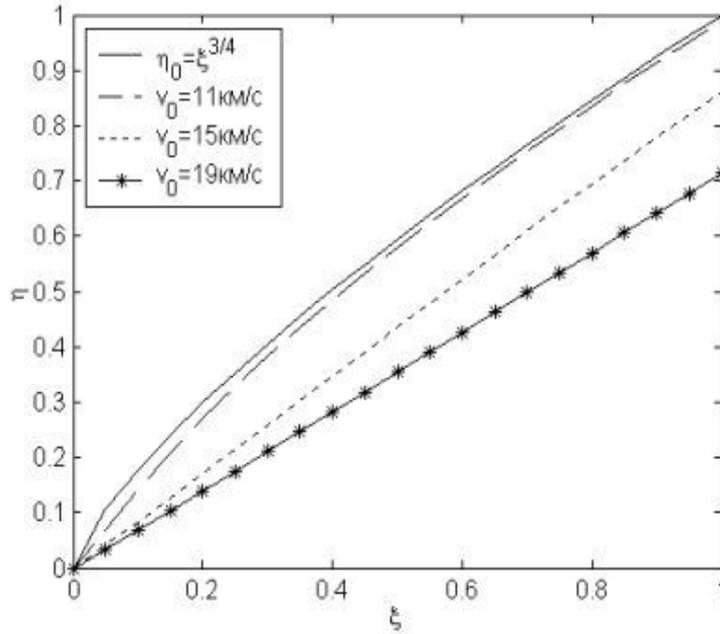


Рис. 1.

В конце процедуры вычислялось значение суммарного радиационного нагрева поверхности вдоль траектории полета Q_R (10). Затем задавался шаг варьирования h по ординате η из условия [12]: $\Delta\xi \rightarrow 0$, $h/(\Delta\xi)^2 \rightarrow 0$, необходимого для сходимости метода локальных вариаций. Процесс варьирования ординат $\eta_0^0(\xi_j)$ заключался в следующем: значения $\eta_0^0(\xi_j)$ последовательно заменялись на $(\eta_0^0(\xi_j) \pm h)$. Для новых точек находились приближенные значения функционалов сопротивления и массы (5), (8), проверялось условие (9) на массу аппарата, интегрировалась система уравнений (1)–(2), и находилось значение целевого функционала Q_R (10). Если значение функционала Q_R уменьшалось, то в таблицу решений записывалось соответствующее значение ординаты $(\eta_0^0(\xi_j) \pm h)$. Таким образом, проводился полный перебор точек $(\xi_j, \eta_0^0(\xi_j) \pm h)$, $j = 0, 1, \dots, m$, и находилось первое приближение экстремали $\{\eta_0^1\}$, целевой функционал которого не больше вычисленного на предыдущем приближении.

В процессе счета итерации с фиксированными h и $\Delta\xi$ проводились до тех пор, пока в результате очередной итерации не изменялось ни одно из значений $\{\eta_0^k(\xi_j)\}$. Затем шаг h уменьшался вдвое, и процесс варьирования продолжался. Уменьшение h при фиксированном $\Delta\xi$ проводилось до тех пор пока не удовлетворялось неравенство $h \leq 10^{-10}$. Затем рассматривалось решение задачи на более мелкой сетке, т.е. чис-

ло разбиений m удваивалось. Функция $\eta = \eta(\xi)$ во вновь образованных точках находилась интерполяцией по соседним узлам. Процесс варьирования продолжался до тех пор, пока не выполнялось неравенство $\Delta\xi \leq 10^{-5}$.

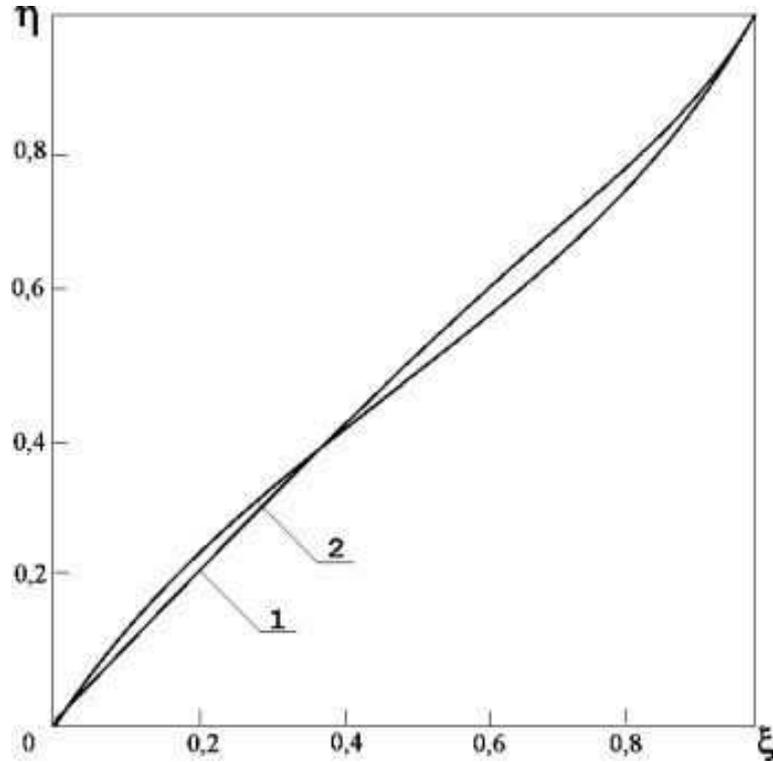


Рис. 2.

4. Анализ результатов расчетов

Была проведена серия расчетов оптимальных начальных форм осесимметричных тел в широком спектре условий входа в атмосферу Земли и заданных геометрических характеристиках тела. Например, на рис.2 представлены оптимальные начальные формы аблирующих тел при следующих параметрах входа в атмосферу Земли: $v_0 = 15$ км/с, $H_0 = 80$ км, $\gamma_0 = \pi/3$, $\rho_0 = 1.225$ г/м³, $\lambda^{-1} = 0.149$ км, $R_E = 6371$ км. Соответствующие заданные геометрические и теплофизические характеристики тел: $\tau = \{1. - 0.5; 2. - 0.8\}$, $\rho_T = 2200$ кг/м³, $H_{ef} = 2 * 10^7$ Дж/кг. В качестве минимально возможной массы аппарата M^* в ограничении (9) бралась масса конуса с теми же геометрическими характеристиками.

Сравнение полученных начальных форм тел с традиционными телами (степенными телами и острым конусом) показало, что использование

оптимальных форм тел позволяет снизить суммарный радиационный нагрев поверхности до 50 % и, соответственно, уменьшить унос массы теплозащитного покрытия тела. Полученные результаты подтверждают необходимость совместного решения задач оптимизации, обтекания и теплообмена при изучении движения тел, аблирующих вдоль траектории полета в атмосфере.

Список литературы

1. Лунев В. В. Некоторые свойства уравнения абляции / В. В. Лунев // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1977. — № 3. — С. 96–102.
2. Знаменский В. В. Численное решение уравнения уноса / В. В. Знаменский // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1978. — № 2. — С. 147–154.
3. Воронкин В. Г. О стационарной форме тел при их разрушении за счет аэродинамического нагрева / В. Г. Воронкин, В. В. Лунев, А. Н. Никулин // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1978. — № 2. — С. 138–146.
4. Мурзинов И. Н. Аналитическое решение о стационарных формах тел в условиях абляции / И. Н. Мурзинов // Газовая и волновая динамика. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. — С. 64–74.
5. Коняев В. Г. Аналитическое исследование изменения формы аблирующих тел при их движении в атмосфере со сверхзвуковыми скоростями / В. Г. Коняев // Уч. записки ЦАГИ. — 1974. — № 6. — С. 125–133.
6. Левин В. А. Форма тонких тел при уносе вещества под воздействием лучистого теплового потока из ударного слоя / В. А. Левин, В. П. Марков, Н. Н. Пилогин // Современные газодинамические и физико-химические модели гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена. Часть 2. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. — С. 100–106.
7. Апштейн Э. З. Стационарная форма тел при их разрушении под действием тепловых потоков, зависящих от локального угла наклона поверхности / Э. З. Апштейн, Н. Н. Пилогин // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1981. — № 6. — С. 137–143.
8. Апштейн Э. З. Унос массы и изменение формы трехмерного тела при движении по траектории в атмосфере Земли / Э. З. Апштейн, Н. Н. Пилогин, Г. А. Тирский // Космические исследования. — 1979. — № 2. — С. 246–255.
9. Аргучинцева М. А. Экстремальные задачи радиационной газовой динамики / М. А. Аргучинцева, Н. Н. Пилогин. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. — 197 с.
10. Пилогин Н. Н. Динамика ионизированного излучающего газа / Н. Н. Пилогин, Г. А. Тирский. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — 312 с.
11. Теория оптимальных аэродинамических форм. — М.: Мир, 1969. — 507 с.
12. Черноушко Ф. Л. Вариационные задачи механики и управления / Ф. Л. Черноушко, Н. В. Баничук. — М.: Наука, 1973. — 238 с.

M. A. Arguchintseva

Shape optimization of bodies subliming in a planet atmosphere

Abstract. In this paper it is considered the optimal shape problem for subliming bodies moving along a ballistic trajectory with minimal radiation surface heat.

Keywords: optimal aerodynamic design, integro-differential system.

Аргучинцева Маргарита Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952) 24-22-12, (marguch@math.isu.ru).

Arguchintseva Margarita, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003, Phone: (3952) 24-22-12, (marguch@math.isu.ru).