Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 37—51

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.97, 519.7

Неотрицательная управляемость интервальной линейной дискретной системы *

Л. Т. Ащепков
Институт прикладной математики ДВО РАН

Аннотация. Рассматривается задача Коши для системы линейных рекуррентных уравнений с интервальными коэффициентами. Вводится понятие точного решения (траектории) и приближенного решения (внешней интервальной аппроксимации траектории). Выясняется вопрос о существовании ограниченного управления, переводящего неотрицательную траекторию системы из одного заданного бруса в другой за конечное число шагов. Показано, что существование управления эквивалентно разрешимости системы неравенств с модульными нелинейностями. С использованием внешней аппроксимации траектории получены достаточные условия управляемости системы в терминах разрешимости задачи линейного программирования.

Ключевые слова: интервальная линейная дискретная система, управляемость.

Введение

Задачи управления объектами в условиях неопределенности рассматривались рядом авторов (см., например, [1]–[6]). Обзор методов, результатов и основную библиографию работ с интервальными неопределенностями можно найти в [7]. Непосредственно проблеме управляемости интервальных систем посвящены работы [8]–[11]. В [8], [9] исследована задача стабилизации управляемой линейной непрерывной системы с интервальными коэффициентами. При определенных условиях на коэффициенты доказано существование детерминированного управление типа обратной связи, которое обеспечивает асимптотическое притяжение всех траекторий замкнутой системы к положению равновесия. Показана возможность локального перенесения результатов на нелинейные системы.

* Работа выполнена при финансовой поддержке ДВО РАН (грант № 09-01-ОМН-04)

В работе [10] рассмотрено обобщение классической двухточечной проблемы управляемости [12]–[14] на случай интервальной дискретной системы. Последняя понимается как совокупность дискретных систем, коэффициенты которых принимают значения из заданных интервалов. Такая трактовка позволяет обходить ограничения классической интервальной арифметики, связанные с неассоциативностью и недистрибутивностью арифметических операций, но требует точных оценок матричных полиномов. Найти точные оценки достаточно сложно, а использование приближенных оценок неизбежно приводит к потере необходимых условий управляемости. Аналогичная “представительная” трактовка использована в статье [11] для исследования управляемости непрерывной линейной интервальной системы в классе кусочно постоянных ограниченных управлений. Полученные достаточные условия управляемости сформулированы в терминах линейного программирования.

В данной работе интервальная дискретная система рассматривается в как объект интервального анализа в рамках классической интервальной арифметики. В этих рамках удается получить точный интервальный аналог формулы Коши [12]–[14] для неотрицательной траектории системы и сформулировать критерий неотрицательной управляемости. Для траектории произвольного знака классическая интервальная арифметика дает приближенную формулу Коши (внешнюю интервальную аппроксимацию траектории) и, в конечном счете, позволяет получить лишь достаточные условия управляемости.

1. Вспомогательные результаты

1.1. Задача Коши. Рассмотрим в стандартных обозначениях интервального анализа задачу Коши

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \qquad t = 0, 1, \ldots, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.1}$$

для системы рекуррентных уравнений. Здесь $t = 0, 1, \ldots$ – дискретное время, $\mathbf{A}(t) \in \mathbf{IR}^{n\times n}$, $\mathbf{b}(t)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{IR}^n$ – известные интервальные матрицы и векторы, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{IR}^n$ – неизвестные интервальные векторы. Арифметические операции в (1.1) и далее понимаются в смысле классической интервальной арифметики (см., например, [15]).

Решением или траекторией (1.1) назовем последовательность интервальных векторов

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{A}(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}(0), \quad \ldots, \tag{1.2}$$
$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \ \ \ldots \ .$$

Поскольку арифметические операции определяют интервальные векторы (1.2) однозначно, то задача Коши (1.1) имеет единственное решение.

1.2. Фундаментальная матрица. Обозначим символами $O, E \in \mathbf{R}^{n\times n}$ нулевую и единичную матрицу соответственно. Для целых t, τ положим

$$\mathbf{F}(t,\tau) = O, \quad t < \tau, \quad \mathbf{F}(t,t) = E, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{F}(t,\tau) = \mathbf{A}(t-1)\mathbf{A}(t-2)\ \ldots\ \mathbf{A}(\tau), \quad t > \tau. \tag{1.4}$$

Умножение матриц в (1.4) выполняется слева направо. Последнее уточнение важно вследствие неассоциативности произведения интервальных матриц. Матрицу $\mathbf{F}(t,\tau) \in \mathbf{IR}^{n\times n}$, заданную формулами (1.3), (1.4), назовем фундаментальной матрицей системы (1.1). Из (1.4) следует эквивалентное определение фундаментальной матрицы как решения рекуррентного матричного уравнения

$$\mathbf{F}(t,\tau) = \mathbf{F}(t,\tau+1)\mathbf{A}(\tau), \quad 0 \le \tau < t, \quad \mathbf{F}(t,t) = E. \tag{1.5}$$

1.3. Формула Коши. Для решения (1.2) задачи (1.1) при любом фиксированном $t = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства

$$\mathbf{x}(\tau+1) = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{b}(\tau), \quad \tau = 0, 1, \ldots, t-1.$$

Умножим каждое равенство на соответствующую фундаментальную матрицу $\mathbf{F}(t,\tau+1)$ и сложим. Тогда

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{F}(t,\tau+1)\mathbf{x}(\tau+1) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{F}(t,\tau+1)(\mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{b}(\tau)).$$

Заменим в левой сумме τ на $\tau - 1$ и раскроем скобки в правой сумме. Учитывая (1.3), начальное условие (1.1) и субдистрибутивность операции умножения интервалов относительно сложения [15], получим

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{F}(t,\tau)\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t,0)\mathbf{x}(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{F}(t,\tau+1)(\mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{b}(\tau)) \subset$$

$$\subset \mathbf{F}(t,0)\mathbf{x}(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{F}(t,\tau+1)\mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(\tau) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{F}(t,\tau+1)\mathbf{b}(\tau).$$

Отсюда в силу (1.5) следует

$$\mathbf{x}(t) \subset \mathbf{F}(t,0)\mathbf{x}(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{F}(t,\tau+1)\mathbf{b}(\tau), \quad t = 1, 2, \ \ldots\ . \tag{1.6}$$

Включение (1.6) служит обобщением известной формулы Коши [12]–[14] на случай интервальной задачи (1.1).

1.4. Оценка точности приближенного решения. Интервальную функцию

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}(t,0)\mathbf{x}(0) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{F}(t,\tau+1)\mathbf{b}(\tau), \quad t = 1, 2, \ \ldots \tag{1.7}$$

назовем приближенным решением задачи Коши (1.1). Как видно, приближенное решение выражается через исходные данные задачи (1.1) и служит внешней аппроксимацией точного решения (1.2). Включение (1.6) становится равенством, если

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{F}(t,\tau+1)(\mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(\tau)+\mathbf{b}(\tau)) = \tag{1.8}$$

$$= \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{F}(t,\tau+1)\mathbf{A}(\tau)\mathbf{x}(\tau) + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{F}(t,\tau+1)\mathbf{b}(\tau).$$

Условие (1.8) верно, по крайней мере, в трех частных случаях: а) для $t=1$; б) для $\mathbf{b}(t)=0,\ t=0,1,\ \ldots$; в) для точечных (неинтервальных) матриц и векторов $\mathbf{A}(t)=A(t),\ \mathbf{b}(t)=b(t),\ t=0,1,\ \ldots$.

В случае а) из формулы (1.6) вытекает второй член последовательности (1.2). В случае б) получим точное решение

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t,0)\mathbf{x}_0,\ \ t=0,1,\ \ldots$$

однородной задачи Коши (1.1). В случае в) – точное решение (1.1) вида

$$\mathbf{x}(t)=F(t,0)\mathbf{x}_0+\sum_{\tau=0}^{t-1} F(t,\tau+1)b(\tau),\ \ t=0,1,;\ldots$$

с точечной фундаментальной матрицей $F(t,\tau)=A(t-1)A(t-2)\ldots A(\tau)$, $t>\tau$.

Сравним точное решение (1.2) с приближенным решением (1.7) в общем случае. Положим $\mathbf{x}(t)=[\underline{x}(t),\overline{x}(t)],\ \mathbf{y}(t)=[\underline{y}(t),\overline{y}(t)]$. Из включения $\mathbf{x}(t)\subset\mathbf{y}(t)$ вытекают понимаемые покоординатно векторные неравенства

$$\underline{y}(t)-\underline{x}(t)\le 0\le \overline{y}(t)-\overline{x}(t),\quad t=0,1,\ \ldots\ . \tag{1.9}$$

Интервальный вектор $\delta\mathbf{x}(t)\in\mathbf{IR}^n$, удовлетворяющий условиям

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{x}(t)+\delta\mathbf{x}(t),\quad t=0,1,\ \ldots\ , \tag{1.10}$$

примем за ошибку приближенного решения $\mathbf{y}(t)$. Из (1.10) находим

$$\delta\mathbf{x}(t)=[\underline{y}(t)-\underline{x}(t),\overline{y}(t)-\overline{x}(t)],\quad t=0,1,\ \ldots\ . \tag{1.11}$$

Отсюда в силу (1.9) заключаем, что $\delta\mathbf{x}(t)$ – правильный интервальный вектор. Кроме того, из (1.11) вытекают удобные расчетные формулы

$$\operatorname{mid}\delta\mathbf{x}(t)=\operatorname{mid}\mathbf{y}(t)-\operatorname{mid}\mathbf{x}(t),$$

$$\operatorname{rad}\delta\mathbf{x}(t)=\operatorname{rad}\mathbf{y}(t)-\operatorname{rad}\mathbf{x}(t),\quad t=0,1,\ \ldots$$

для центра и радиуса ошибки $\delta\mathbf{x}(t)$.

1.5. Критерий неотрицательности решения. Для многих приложений важен критерий неотрицательности решения задачи (1.1). Введем необходимые понятия. Символом $\mathbf{IR}^n_+$ обозначим множество правильных интервальных векторов $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbf{IR}^n_+$, левые концы которых удовлетворяют неравенству $\underline{x} \geq 0$. Интервальные векторы $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}^n_+$ будем называть неотрицательными и писать $\mathbf{x} \geq 0$. Решение (1.2) задачи Коши (1.1) считаем неотрицательным, если $\mathbf{x}(t) \geq 0, \quad t = 0, 1, \ \ldots \ .$

Установим критерий неотрицательности решения. Пусть задача (1.1) имеет неотрицательное решение (1.2). Зафиксируем любое $t = 0, 1, \ldots$ и запишем равенство (1.1) в координатной форме

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij}(t)\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{b}_i(t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.12}$$

По предположению $\underline{x}_j(t) \geq 0, \ j = 1, \ \ldots \ , n$, поэтому

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \sum_{j=1}^{n} [\underline{a}_{ij}(t), \overline{a}_{ij}(t)][\underline{x}_j(t), \overline{x}_j(t)] + \mathbf{b}_i(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \Big[\min\{\underline{a}_{ij}(t)\underline{x}_j(t), \underline{a}_{ij}(t)\overline{x}_j(t)\}, \max\{\overline{a}_{ij}(t)\underline{x}_j(t), \overline{a}_{ij}(t)\overline{x}_j(t)\}\Big] + \mathbf{b}_i(t) =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n} \underline{a}_{ij}(t) \ \mathrm{mid}\, \mathbf{x}_j(t) - \sum_{j=1}^{n} |\underline{a}_{ij}(t)| \,\mathrm{rad}\, \mathbf{x}_j(t) + \underline{b}_i(t), \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}(t) \,\mathrm{mid}\, \mathbf{x}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} |\overline{a}_{ij}(t)| \,\mathrm{rad}\, \mathbf{x}_j(t) + \overline{b}_i(t)\right], \quad i = 1, \ldots, n,$$

или в векторной записи

$$\mathbf{x}(t+1) = [\underline{A}(t) \,\mathrm{mid}\, \mathbf{x}(t) - |\underline{A}(t)| \,\mathrm{rad}\, \mathbf{x}(t) + \underline{b}(t), \tag{1.13}$$

$$\left.\overline{A}(t) \,\mathrm{mid}\, \mathbf{x}(t) + |\overline{A}(t)| \,\mathrm{rad}\, \mathbf{x}(t) + \overline{b}(t)\right], \quad t = 0, 1, \ \ldots \ .$$

Здесь $|\underline{A}(t)|, |\overline{A}(t)|$ – матрицы, составленные из модулей соответствующих элементов матриц $\underline{A}(t), \overline{A}(t)$. Из формулы (1.13) вытекают рекуррентные соотношения

$$s(t+1) = \ \mathrm{mid}\, \mathbf{A}(t)s(t) + 0.5\left(|\overline{A}(t)| - |\underline{A}(t)|\right) r(t) + \ \mathrm{mid}\, \mathbf{b}(t), \tag{1.14}$$

$$r(t+1) = \ \mathrm{rad}\, \mathbf{A}(t)s(t) + 0.5\left(|\underline{A}(t)| + |\overline{A}(t)|\right) r(t) + \ \mathrm{rad}\, \mathbf{b}(t), \tag{1.15}$$

$$t = 0, 1, \ \ldots \ , \quad s(0) = \ \mathrm{mid}\, \mathbf{x}_0, \quad r(0) = \ \mathrm{rad}\, \mathbf{x}_0 \tag{1.16}$$

для центров $s(t) = \operatorname{mid}\mathbf{x}(t)$ и радиусов $r(t) = \operatorname{rad}\mathbf{x}(t)$ интервальных векторов $\mathbf{x}(t)$. Следовательно, неравенства

$$s(t) - r(t) \geq 0, \quad t = 0, 1, \ \dots\ , \tag{1.17}$$

необходимы для неотрицательности решения задачи (1.1). Достаточность условий (1.14)–(1.17) докажем индукцией по t. Предположим, функции $s(t), r(t)$ удовлетворяют (1.14)–(1.17). При $t = 0$ из (1.16), (1.17) следует

$$\mathbf{x}(0) = [s(0) - r(0), s(0) + r(0)] \geq 0, \quad r(0) \geq 0.$$

Допустим, при некотором целом $t \geq 0$ уже установлены соотношения

$$\mathbf{x}(t) = [s(t) - r(t), s(t) + r(t)] \geq 0, \quad r(t) \geq 0. \tag{1.18}$$

Тогда в силу (1.15) имеем $r(t+1) \geq 0$. По условию (1.17) разность $s(t+1) - r(t+1) \geq 0$, значит $s(t+1) \geq r(t+1) \geq 0$ и

$$\mathbf{q} = [s(t+1) - r(t+1), s(t+1) + r(t+1)]$$

– правильный неотрицательный интервальный вектор. С использованием (1.14), (1.15) представим вектор $\mathbf{q}$ в виде

$$\mathbf{q} = [\underline{A}(t)s(t) - |\underline{A}(t)|r(t) + \underline{b}(t), \overline{A}(t)s(t) + |\overline{A}(t)|r(t) + \bar{b}(t)]. \tag{1.19}$$

Из (1.18) находим $s(t) = \operatorname{mid}\mathbf{x}(t), r(t) = \operatorname{rad}\mathbf{x}(t)$. Подставляя эти значения в (1.19), получим

$$\mathbf{q} = [\underline{A}(t)\operatorname{mid}\mathbf{x}(t) - |\underline{A}(t)|\operatorname{rad}\mathbf{x}(t) + \underline{b}(t), \tag{1.20}$$
$$\overline{A}(t)\operatorname{mid}\mathbf{x}(t) + |\overline{A}(t)|\operatorname{rad}\mathbf{x}(t) + \bar{b}(t)].$$

Равенство (1.20) установлено в предположении $\mathbf{x}(t) \geq 0$. Сравнивая правые части (1.20) и (1.13), приходим к выводу

$$0 \leq \mathbf{q} = \mathbf{x}(t+1).$$

Значит, в соответствии с методом математической индукции условия (1.14)–(1.17) действительно обеспечивают неотрицательность решения задачи (1.1). Подведем итоги.

Теорема 1. *Интервальная задача Коши (1.1) имеет неотрицательное решение* $\mathbf{x}(t), \ t = 0, 1, \dots,$ *в том и только в том случае, если решение* $s(t), r(t), \ t = 0, 1, \dots,$ *неинтервальной задачи Коши (1.14)–(1.16) удовлетворяет условию (1.17), при этом*

$$[s(t) - r(t), s(t) + r(t)] = \mathbf{x}(t), \quad t = 0, 1, \ \dots\ . \tag{1.21}$$

Рассмотрим два частных случая.

Пример 1. Пусть в условиях (1.1) точечные матрица $\mathbf{A}(t) = A$ и вектор $\mathbf{b}(t) = b$ не зависят от t и покомпонентно неотрицательны: $A \geq 0,\ \ b \geq 0$. Тогда задача Коши (1.14)–(1.16) примет вид

$$s(t+1) = As(t) + b, \quad r(t+1) = Ar(t), \ \ t = 0, 1, \ \dots \ ,$$

$$s(0) = \operatorname{mid} \mathbf{x}_0, r(0) = \operatorname{rad} \mathbf{x}_0$$

и имеет очевидное решение

$$s(t) = A^t \operatorname{mid} \mathbf{x}_0 + \sum_{\tau=0}^{t} A^{t-\tau-1} b, \quad r(t) = A^t \operatorname{rad} \mathbf{x}_0, \ \ t = 0, 1, \ \dots \ .$$

Подставив это решения в условие (1.17), получим

$$A^t \underline{x}_0 + \sum_{\tau=0}^{t} A^{t-\tau-1} b \geq 0, \ \ t = 0, 1, \ \dots \ .$$

Как видно, критерием неотрицательности решения задачи Коши (1.1) в данном случае будет неравенство $\mathbf{x}_0 \geq 0$.

Пример 2. Пусть в задаче Коши (1.1) симметричный матричный интервал $\mathbf{A}(t) = [-A, A],\ A \geq 0$, и точечные векторы $\mathbf{b}(t) = b$ не зависят от t. Выясним, при каких условиях на $A, b, \mathbf{x}_0$ решение задачи (1.1) будет неотрицательным. Условия (1.14)–(1.16) запишутся в виде

$$s(t+1) = b, \quad r(t+1) = Ar(t), \ \ t = 0, 1, \dots, s(0) = \operatorname{mid} \mathbf{x}_0, r(0) = \operatorname{rad} \mathbf{x}_0$$

и удовлетворяются, если

$$s(0) = \operatorname{mid} \mathbf{x}_0, \ \ r(0) = \operatorname{rad} \mathbf{x}_0, \ \ s(t) = b, \ \ r(t) = A^t \operatorname{rad} \mathbf{x}_0, \ \ t = 1, 2, \ \dots \ . \tag{1.22}$$

Подставив (1.22) в (1.17), получим

$$\mathbf{x}_0 \geq 0, \ \ b - A^t \operatorname{rad} \mathbf{x}_0 \geq 0, \ \ t = 1, 2, \ \dots \ .$$

Следовательно, критерием неотрицательности решения рассматриваемой задачи Коши (1.1) служат неравенства $\mathbf{x}_0 \geq 0, \quad b \geq A^t \operatorname{rad} \mathbf{x}_0 \geq 0, \ \ t = 1, 2, \ \dots$.

2. Управляемость интервальной системы

2.1. Неотрицательная управляемость. Рассмотрим задачу Коши

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)u(t), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \ \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.1}$$

с дополнительными условиями

$$\mathbf{x}(t) \geq 0, \ \ t = 0, \ldots, T, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{x}(T) \subset \mathbf{x}_1. \tag{2.3}$$

Здесь T – заданное натуральное число, $t = 0, 1, \ldots, T$ – дискретное время, $\mathbf{A}(t) \in \mathbf{IR}^{n \times n}$, $\mathbf{B}(t) \in \mathbf{IR}^{n \times m}$ – известные интервальные матрицы, $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbf{IR}^n$ – известные интервальные векторы, $u(t)$ – искомое управляющее воздействие со значением в заданном множестве $U \subset \mathbf{R}^m$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{IR}^n$ – искомый интервальный вектор. Как и прежде, арифметические операции в (2.1) и далее понимаются в классическом смысле.

Последовательность управляющих воздействий $u(t) \in U(t)$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$, назовем управлением, соответствующее решение $\mathbf{x}(t)$, $t = 0, 1, \ldots, T$, задачи Коши (2.1) – траекторией, связанную пару из управления и траектории – процессом, процесс, удовлетворяющий условиям (2.2), (2.3) – допустимым процессом.

Задача состоит в выяснении условий существования допустимого процесса. Если допустимый процесс существует, то будем говорить о неотрицательной управляемости системы (2.1).

2.2. Критерий неотрицательной управляемости. Пусть

$$u = \{u(t) : \ \ t = 0, 1, \ldots, T-1\}, \ \ \mathbf{x} = \{\mathbf{x}(t) : \ \ t = 0, 1, \ldots, T\} \tag{2.4}$$

– некоторый (не обязательно допустимый) процесс. Обозначим

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{B}(t)u(t), \ \ t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{2.5}$$

По определению траектория $\mathbf{x}$ процесса (2.4) есть решение задачи Коши

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \ \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{2.6}$$

Перейдем в (2.5) к координатной форме и выполним необходимые арифметические операции. Возвращаясь к векторно-матричной записи, получим

$$\mathbf{B}(t)u(t) = [\,\mathrm{mid}\,\mathbf{B}(t)u(t) - \ \mathrm{rad}\,\mathbf{B}(t)|u(t)|, \mathrm{mid}\,\mathbf{B}(t)u(t) - \ \mathrm{rad}\,\mathbf{B}(t)|u(t)|\,], \quad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{2.7}$$

Здесь и далее для упрощения записи полагаем

$$\mathrm{mid}\,\mathbf{B}(t)u(t) = (\mathrm{mid}\,\mathbf{B}(t))u(t), \quad \mathrm{rad}\,\mathbf{B}(t)|u(t)| = (\mathrm{rad}\,\mathbf{B}(t))|u(t)|.$$

По аналогии с п. 1.5 введем соответствующую (2.6), (2.7) неинтервальную задачу Коши

$$s(t+1) = \operatorname{mid} \mathbf{A}(t)s(t) + 0.5\left(|\overline{A}(t)| - |\underline{A}(t)|\right)r(t) + \operatorname{mid} \mathbf{B}(t)u(t), \quad (2.8)$$

$$r(t+1) = \operatorname{rad} \mathbf{A}(t)s(t) + 0.5\left(|\underline{A}(t)| + |\overline{A}(t)|\right)r(t) + \operatorname{rad} \mathbf{B}(t)u(t), \quad (2.9)$$

$$t = 0, 1, \ldots, T-1,$$

$$s(0) = \operatorname{mid} \mathbf{x}_0, \quad r(0) = \operatorname{rad} \mathbf{x}_0. \quad (2.10)$$

Пусть

$$F(t,\tau) = \begin{pmatrix} F_{11}(t,\tau) & F_{12}(t,\tau) \\ F_{21}(t,\tau) & F_{22}(t,\tau) \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{mid} \mathbf{A}(t) & 0.5\left(|\overline{A}(t)| - |\underline{A}(t)|\right) \\ \operatorname{rad} \mathbf{A}(t) & 0.5\left(|\underline{A}(t)| + |\overline{A}(t)|\right) \end{pmatrix}$$

– точечные блочные матрицы с квадратными блоками порядка n. Потребуем, чтобы $F(t,\tau)$ удовлетворяла условиям

$$F(t,\tau) = 0, \ \ \tau < t,$$

$$F(t,\tau) = F(t,\tau+1)A(\tau), \ \ F(t,t) = E, \ \ 0 \le \tau < t \le T, \quad (2.11)$$

т.е. была фундаментальной матрицей системы (2.8), (2.9). Тогда по формуле Коши решение задачи (2.8)–(2.10) запишется в виде

$$s(t,u) = F_{11}(t,0) \operatorname{mid} \mathbf{x}_0 + F_{12}(t,0) \operatorname{rad} \mathbf{x}_0 +$$

$$+ \sum_{\tau=0}^{t-1} F_{11}(t,\tau+1) \operatorname{mid} \mathbf{B}(\tau)u(\tau) + \sum_{\tau=0}^{t-1} F_{12}(t,\tau+1) \operatorname{rad} \mathbf{B}(\tau)|u(\tau)|, \quad (2.12)$$

$$r(t,u) = F_{21}(t,0) \operatorname{mid} \mathbf{x}_0 + F_{22}(t,0) \operatorname{rad} \mathbf{x}_0 +$$

$$+ \sum_{\tau=0}^{t-1} F_{21}(t,\tau+1) \operatorname{mid} \mathbf{B}(\tau)u(\tau) + \sum_{\tau=0}^{t-1} F_{22}(t,\tau+1) \operatorname{rad} \mathbf{B}(\tau)|u(\tau)|, \quad (2.13)$$

$$t = 0, 1, \ldots, T.$$

Допустимость процесса (2.4) означает выполнение включения

$$u \in U = U(0) \times U(1) \times \ldots \times U(T-1) \quad (2.14)$$

для управления u и условий (2.2), (2.3) для траектории $\mathbf{x}$. По теореме 1 условия (2.2), (2.3) равносильны неравенствам

$$s(t,u) - r(t,u) \ge 0, \ \ t = 0, 1, \ldots, T,$$

$$s(T,u) - r(T,u) \ge \underline{x}_1, \ \ s(T,u) + r(T,u) \le \overline{x}_1. \quad (2.15)$$

Сформулируем конечные выводы.

Теорема 2. *Неотрицательная управляемость интервальной системы (2.1) равносильна совместности системы условий (2.14), (2.15) с функциями вида (2.12), (2.13).*

Пример 3. Применим теорему 2 к задаче (2.1)–(2.3) с точечными матрицами $\mathbf{A}(t) = A$, $\mathbf{B}(t) = B$ и многогранным множеством $U(t) = U \subset \mathbf{R}^m$, которые не зависят от t. Из (2.11) находим

$$F(t,\tau) = \begin{pmatrix} A^{t-\tau} & 0 \\ 0 & |A|^{t-\tau} \end{pmatrix}, \ \ 0 \le \tau < t \le T.$$

В результате условия (2.14), (2.15) примут простой вид

$$\sum_{\tau=0}^{t-1} A^{t-\tau-1} B u(\tau) \ge -A^t \operatorname{mid} \mathbf{x}_0 + |A|^t \operatorname{rad} \mathbf{x}_0, \ \ t = 0, 1, \ldots, T,$$

$$\sum_{\tau=0}^{T-1} A^{T-\tau-1} B u(\tau) \ge -A^T \operatorname{mid} \mathbf{x}_0 + |A|^T \operatorname{rad} \mathbf{x}_0 + \underline{x}_1,$$

$$\sum_{\tau=0}^{T-1} A^{T-\tau-1} B u(\tau) \le -A^T \operatorname{mid} \mathbf{x}_0 - |A|^T \operatorname{rad} \mathbf{x}_0 + \overline{x}_1,$$

$$u(t) \in U, \ \ t = 0, 1, \ldots, T-1.$$

Проверку совместности этой системы условий можно выполнить средствами линейного программирования.

2.3. Достаточные условия управляемости. Рассмотрим в прежних обозначениях более простую задачу

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)u(t), \ t = 0, 1, \ldots, T-1, \ \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.16}$$

$$\mathbf{x}(T) \subset \mathbf{x}_1 \tag{2.17}$$

перевода траектории интервальной системы из одного заданного бруса в другой брус за конечное число шагов. Если задача разрешима, то будем говорить об управляемости системы (2.16).

В задаче (2.16), (2.17) отсутствуют ограничения на управляющие воздействия и требование неотрицательности траектории. Последнее обстоятельство упрощает постановку задачи, но затрудняет ее точное решение. Причина в том, что неотрицательность $\mathbf{x}(t)$ позволяла вычислить произведение $\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$ в явном виде и получить формулу (1.13). Сделать то же самое для произвольного векторного интервала $\mathbf{x}(t)$ в общем случае затруднительно.

Для вывода достаточных условий управляемости воспользуемся формулой Коши (1.6). Пусть $\mathbf{F}(t,\tau)$ – фундаментальная матрица системы (2.16), заданная формулами (1.4), (1.5). Если $u(t)$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$,

– некоторое управление и $\mathbf{x}(t)$, $t = 0, 1, \ldots, T$, – соответствующее решение (2.16), то по формуле (1.6) имеем

$$\mathbf{x}(T) \subset \mathbf{F}(T, 0)\mathbf{x}_0 + \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{F}(T, t+1)\mathbf{B}(t)u(t). \tag{2.18}$$

Обозначив

$$\mathbf{F}(T, 0)\, \mathbf{x}_0 = \mathbf{d}, \;\; \mathbf{F}(T, t+1)\, \mathbf{B}(t) = \mathbf{C}(t), \;\; t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{2.19}$$

представим включение (2.18) в виде

$$\mathbf{x}(T) \subset \mathbf{d} + \sum_{t=0}^{T-1} \mathbf{C}(t)u(t)$$

или с использованием (2.7) в равносильной форме

$$\mathbf{x}(T) \subset \left[\underline{d} + \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{mid} \mathbf{C}(t)u(t) - \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{rad} \mathbf{C}(t)|u(t)|, \right. \tag{2.20}$$

$$\left. \overline{d} + \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{mid} \mathbf{C}(t)u(t) + \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{rad} \mathbf{C}(t)|u(t)| \right].$$

В силу (2.20) включение (2.17) будет выполнено, если потребовать

$$\sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{mid} \mathbf{C}(t)u(t) - \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{rad} \mathbf{C}(t)|u(t)| \geq \underline{x}_1 - \underline{d}, \tag{2.21}$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{mid} \mathbf{C}(t)u(t) + \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{rad} \mathbf{C}(t)|u(t)| \leq \overline{x}_1 - \overline{d}. \tag{2.22}$$

Итак, совместность неравенств (2.21), (2.22) достаточна для управляемости системы (2.16). Следуя [9], сформируем по условиям (2.21)–(2.22) задачу линейного программирования

$$||\varepsilon|| \to \min, \tag{2.23}$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{mid} \mathbf{C}(t)u(t) - \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{rad} \mathbf{C}(t)v(t) + \varepsilon \geq \underline{x}_1 - \underline{d}, \tag{2.24}$$

$$\sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{mid} \mathbf{C}(t)u(t) + \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{rad} \mathbf{C}(t)v(t) - \varepsilon \leq \overline{x}_1 - \overline{d}, \tag{2.25}$$

$$|u(t)| \leq v(t), \;\; t = 0, 1, \ldots, T-1, \;\; \varepsilon \geq 0 \tag{2.26}$$

с неизвестными векторами $u(t), v(t),\ t = 0, 1, \ldots, T-1,\quad \varepsilon$. Норму неотрицательного вектора $\varepsilon \in \mathbf{R}^n$ в (2.23) определим как сумму его координат.

В задаче (2.23)–(2.26) целевая функция ограничена снизу нулем и ограничения совместны, поэтому ее оптимальный план

$$u^*(t), v^*(t),\ \ t = 0, 1, \ldots, T-1,\ \ \varepsilon^* \tag{2.27}$$

существует [16]. Покажем, что равенство $\varepsilon^* = 0$ необходимо и достаточно для совместности системы неравенств (2.21), (2.22). Действительно, если в оптимальном плане (2.27) $\varepsilon^* = 0$, то на основании (2.24)–(2.26) можем записать

$$\sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{mid} \mathbf{C}(t) u^*(t) - \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{rad} \mathbf{C}(t) |u^*(t)| \geq$$

$$\geq \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{mid} \mathbf{C}(t) u^*(t) - \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{rad} \mathbf{C}(t) v^*(t) + \varepsilon^* \geq \underline{x}_1 - \underline{d}.$$

Точно так же

$$\sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{mid} \mathbf{C}(t) u^*(t) + \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{rad} \mathbf{C}(t) |u^*(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{mid} \mathbf{C}(t) u^*(t) + \sum_{t=0}^{T-1} \operatorname{rad} \mathbf{C}(t) v^*(t) - \varepsilon^* \leq \overline{x}_1 - \overline{d}.$$

Следовательно, управление $u^*(t),\ t = 0, 1, \ldots, T-1$, удовлетворяет системе неравенств (2.21), (2.22). Обратно, если система неравенств (2.21), (2.22) совместна и $u(t),\ \ t = 0, 1, \ldots, T-1$, – некоторое ее решение, то набор $u(t),\ v(t) = |u(t)|,\ t = 0, 1, \ldots, T-1,\quad \varepsilon = 0$ будет, очевидно, оптимальным планом задачи (2.23)–(2.26). Резюмируем.

Теорема 3. *Для управляемости системы (2.16) достаточно, чтобы оптимальный план (2.27) разрешимой задачи линейного программирования (2.23)–(2.26) имел составляющую* $\varepsilon^* = 0$. *В этом случае управление* $u^*(t),\ \ t = 0, 1, \ldots, T-1$, *переводит траекторию системы (2.16) из* $\mathbf{x}_0$ *в* $\mathbf{x}_1$.

2.4. Управление движением материальной точки. Проиллюстрируем применение теоремы 3 на модельном примере

$$\mathbf{y}_1((t+1)h) = \mathbf{y}_1(th) + h\mathbf{y}_2(th),$$

$$\mathbf{y}_2((t+1)h) = \mathbf{y}_2(th) + (h/\mathbf{m})f,\ \ t = 0, 1, \ldots, T-1$$

с параметром $h > 0$ и интервалом $\mathbf{m} = [1/3, 1]$. Уравнения модели являются разностной аппроксимацией дифференциальных уравнений $\dot{y}_1 = y_2$, $\dot{y}_2 = f/m$, описывающих прямолинейное движение материальной точки неизвестной массы $m \in \mathbf{m}$ под действием постоянной силы f без учета сопротивления среды. Полагая $\mathbf{y}_1(th) = \mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{y}_2(th) = \mathbf{x}_2(t)$, $f = u$, $1/\mathbf{m} = \mathbf{b} = [1, 3]$, перепишем условия примера в стандартной форме

$$\mathbf{x}_1(t+1) = \mathbf{x}_1(t) + h\mathbf{x}_2(t), \ \ \mathbf{x}_2(t+1) = \mathbf{x}_2(t) + h\mathbf{b}u, \ \ t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{2.28}$$

Выясним вопрос о переводе траектории системы (2.28) из начального положения $\mathbf{x}(0) = (0, 0)$ в положение $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_1 = ([0, 2], [1, 3])$ при постоянном управлении u и дополнительном предположении $(T-1)h = 1$. Здесь матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b}h \end{pmatrix}$$

постоянны. Фундаментальная матрица (1.4) вычисляется непосредственно

$$F(t, \tau) = A^{t-\tau} = \begin{pmatrix} 1 & (t-\tau)h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \le \tau < t \le T.$$

По формулам (2.19) находим

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}(t) = \mathbf{b}h \begin{pmatrix} 1 - th \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0, 1, \ldots, T-1.$$

Достаточные условия управляемости (2.21), (2.22) после очевидных преобразований примут вид

$$2u - |u| \ge 1/(Th), \ \ 2u + |u| \le 3/(Th). \tag{2.29}$$

Неравенства (2.29) определяют единственное управление $u^* = 1/(Th)$. На основании теоремы 3 постоянное управление $u^* = 1/(Th)$ переводит траекторию системы (2.28) из начала координат в прямоугольник $[0, 2] \times [1, 3]$ за $T \ge 2$ тактов с шагом $h = 1/(T-1)$.

Заключение

Данная работа посвящена изучению управляемости интервальной системы линейных рекуррентных уравнений. Методической основой исследования служит интервальный анализ. Его изобразительные средства и технические возможности используются для формулировки задачи, проведения расчетов и представления результатов. Это, с одной стороны, обеспечивает цельность работы, но, с другой, накладывает свой отпечаток на характер полученных результатов. Он связан с определенной ограниченностью классической интервальной арифметики. В силу субдистрибутивности операции умножения интервалов относительно сложения [15] нельзя установить, например, точную зависимость решения интервальной системы от начальных значений и управлений типа формулы Коши [12]–[14]. Последнее обстоятельство сразу сказывается на общности выводов. Вместе с тем надо отметить, что некоторый аналог формулы Коши справедлив для неотрицательных решений интервальной системы. Благодаря этому появляется возможность детально исследовать неотрицательную управляемость интервальной системы, которая может иметь важные экономические и технические приложения. Критерием неотрицательной управляемости служит разрешимость конечной системы неравенств с модульными нелинейностями. В общем случае аппарат классической интервальной арифметики позволяет получить лишь приближенную формулу Коши – внешнюю интервальную аппроксимацию траектории. Ее использование приводит к достаточным условиям управляемости системы в терминах линейного программирования.

Список литературы

1. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А. Б. Куржанский. — М.: Наука, 1977.
2. Девис М. Х. А. Линейное оценивание и стохастическое управление / М. Х. А. Девис. — М.: Наука, 1984.
3. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем / Ф. Л. Черноусько. — М.: Наука, 1988.
4. Кирин Н. Е. Методы оценивания и управления в динамических системах / Н. Е. Кирин. — СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского гос. ун-та, 1993.
5. Балашевич Н. В. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью / Н. В. Балашевич, Р. Габасов, Ф. М. Кириллова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2004. — Т. 44. № 2. — С. 265–268.
6. Ащепков Л. Т. Модели и методы повышения живучести управляемых систем / Л. Т. Ащепков, У. Бадам. — Владивосток: Дальнаука, 2006.
7. Гусев Ю. М. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы) / Ю. М. Гусев , В. Н. Ефанов, В. Г. Крымский и др. // Изв. РАН. Техн. кибернетика. — 1991. — № 1. — С. 3–23.
8. Ащепков Л. Т. Стабилизация наблюдаемой линейной системы управления с постоянными интервальными коэффициентами / Л. Т. Ащепков, Д. В. Давыдов // Изв. вузов. Математика. — 2002. — № 2. — С. 11–17.
9. Ащепков Л.Т. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления / Л. Т.Ащепков, Д. В. Давыдов. — М.: Наука, 2006.
10. Ащепков Л. Т. Управляемость интервальной линейной дискретной системы управления / Л. Т.Ащепков // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 3. — С. 67–74.

11. Ащепков Л. Т. Внешние оценки и ступенчатая управляемость интервальной линейной системы / Л. Т.Ащепков // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 4. — С. 51-58.
12. Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. — М.: Мир, 1971.
13. Красовский Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М.: Наука, 1968.
14. Габасов Р. Ф. Оптимизация линейных систем / Р. Ф. Габасов, Ф. М. Кириллова. — Минск: Изд-во Белорусского гос. ун-та, 1973.
15. Шарый С. П. Конечномерный интервальный анализ / С. П. Шарый. — URL: http://www.nsc.ru/interval (дата обращения 04.02.2009).
16. Васильев Ф. П. Линейное программирование / Ф. П. Васильев, А. Ю. Иваницкий. — М.: Изд-во «Факториал», 1998.

L. T. Aschepkov

Nonnegative Controllability for Interval Linear Discrete System

Abstract. Cauchy problem for system of the linear recurrent equations with interval coefficients is considered. The “exact decision” (trajectory) and the “approached decision” (external interval approximation of a trajectory) concepts are defined. The question on existence of the bounded control that passes a non-negative trajectory of system from initial set bar to final set bar with finite number of steps is positively solved. It is proved in the paper, that existence of the control is equivalent to resolvability of system of inequalities with modular nonlinearity. The concept of external approximation of a trajectory gives the sufficient condition of controllability of the initial interval system in terms of resolvability of a linear programming problem.

Keywords: interval linear discrete system, controllability.

Ащепков Леонид Тимофеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математик ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7, каб. 306 тел.: (4232) 31-19-17, (`ltas@iam.dvo.ru`)

Aschepkov Leonid, doctor of science in mathematics, professor Institute for Applied Mathematics FEB RAS, 7, Radio st., of. 306, Vladivostok, Russia, 690041 Phone: (4232) 31-19-17, (`ltas@iam.dvo.ru`)