Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 170—182

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.977

Траектории импульсных режимов управляемых систем *

В. И. Гурман
Институт программных систем имени А. К. Айламазяна РАН

Ни Минь Кань
Восточно Китайский педагогичекий университет, Шанхай, КНР

Аннотация. Рассматриваются дифференциальные системы, линейные относительно управлений, описывающие, в частности, поведение управляемых систем при импульсных (практически — достаточно больших) управляющих воздействиях. Предлагается конструктивная схема исследования управляемости и построения траекторий, ее реализующих, на основе последовательного преобразования к эквивалентным системам понижающегося порядка, называемых производными системами. Изложение иллюстрируется наглядными примерами.

Ключевые слова: управляемые системы, импульсные режимы, линейные управления.

1. Введение

Модели управляемых систем, содержащие импульсные воздействия или допускающие такие воздействия при отсутствии ограничений на те или иные управляющие переменные, привлекают внимание многих исследователей в области теории оптимального управления благодаря их большой теоретической и прикладной значимости. Представление об этом дают, например, монографии [1, 2], где содержатся ссылки на многочисленные отечественные и зарубежные публикации с комментариями. При всем различии методов и подходов к исследованию таких систем и даже самой терминологии их объединяет так или иначе необ-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00170. Supported in part by E-Institutes of Shanghai Municipal Eduction Commission (N. E03004). Supported by Shanghai Leading Academic Discipline Project, Project №г B407

ходимость исследования специфического поведения систем как реакции на импульсные (практически — достаточно большие) управляющие воздействия. Это поведение описывается вспомогательными системами, линейными относительно управлений, называемыми *предельными системами* которые возникают естественным образом не только из исходных управляемых систем с линейно входящими управлениями (наиболее популярных у исследователей импульсных режимов), но и из моделей гораздо более общего вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbf{U}(t, x) \subset \mathbb{R}^k, \tag{1.1}$$

с неограниченным годографом (множеством скоростей) $\mathbf{V}(t, x) = f(t, x, \mathbf{U}(t, x))$. Их систематическое изучение берет начало от работы В. Ф. Кротова [3], посвященной основной задаче вариационного исчисления для случаев линейной и асимптотически линейной индикатрисы, когда решение в обычном смысле отсутствует и речь идет об обобщенных решениях типа импульсного или импульсного скользящего режима. Показаны специфические конструкции таких решений и предложен эффективный метод их поиска. На пути обобщения этих результатов в [4-6] были сформулированы достаточные условия, при которых система (1.1) произвольного порядка сводится к эквивалентной в интегральном смысле системе меньшего порядка, называемой *производной системой.* Основным условием выступала полная управляемость предельной системы на своих интегральных многообразиях (инвариантах). Подобные системы, имеющие самостоятельное теоретическое и прикладное значение, интенсивно изучаются в геометрической теории управления (см, например [7]). Известно, что если размерность инварианта равна числу линейных управлений, то полная управляемость этой системы реализуется достаточно просто, например, при постоянных значениях управлений. Иначе процедура построения соответствующих траекторий существенно усложняется (что как раз связано с «дефицитом» располагаемых линейных управлений) и может приводить к весьма сложным, экзотическим решениям. Возникает проблема поиска возможно более простых решений, представляющих особую ценность при реализации обобщенных решений типа импульсных или импульсных скользящих режимов, когда движение по траекториям предельной системы и близких к ним требуется повторять многократно.

Цель данной работы – предложить подход, основанный на представлении предельной системы как управляемой с неограниченными линейными управлениями и ее последовательном преобразовании к эквивалентным производным системам понижающегося порядка.

2. Предельная система как система, линейная по управлениям, и ее свойства

Относительно системы (1.1) будем предполагать, что ее правая часть, как и правые части систем, получаемых из нее далее в процессе преобразований, — непрерывные и достаточно гладкие функции. Предельная система строится следующим образом [8]. Рассматривается множество последовательностей $\{v_q\} \subset \mathbf{V}$, на которых $v_q|v_q|^{-1} \to e$ при $|v_q| \to \infty$. Каждому пределу e сопоставляется продолжающий его луч l. Предельной названа система

$$\frac{dx}{d\tau} = l, \quad l \in \mathbf{K}\,(t, x)\,, \tag{2.1}$$

где t — параметр, $\mathbf{K}\,(t, x)$ — объединение указанных лучей (конус). В общем случае имеем t-параметрическое семейство управляемых систем (с новым аргументом (τ) в форме дифференциального включения.

Речь идет о полной управляемости системы (2.1) при каждом фиксированном t на том или ином m-мерном многообразии (инварианте) $y = \eta\,(x)$ этой системы, в частности на всем пространстве x $(m = n)$. С этой точки зрения она эквивалентна следующей системе, линейной относительно управлений :

$$\frac{dx}{d\tau} = h(x)u, \quad u \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^k, \tag{2.2}$$

где $h = h_1, \ldots, h_k$ — некоторый базис линейной оболочки $\mathbf{K}$. (присутствие параметра t в пределах данного раздела значения не имеет и этот символ опущен).

Напомним важные факты геометрической теории управления, где системы типа (2.2) изучаются как самостоятельные [7, 9].

1. Траектории и инвариант системы (2.2) в пространстве состояний (x) не зависят от конфигурации множества $\mathbf{U}$, если оно выпукло, замкнуто и содержит в своей относительной внутренности начало координат (0). Ограничения этого множества влияют лишь на скорость движения по траектории, так что если время не учитывается, то в этом случае множество $\mathbf{U}$ можно без ограничения общности считать пространством, либо достаточно произвольным, если необходимо из формальных соображений.

2. Пусть для определенности $\mathbf{U} = \mathbb{R}^k$. Пусть $[g_i, g_j] =$ обозначает коммутатор векторных полей: $[h_i, h_j] = h_{jx}h_i - h_{ix}h_j$ (здесь и далее выражения вида g_x обозначают матрицу частных производных $\left(\partial g^i / \partial x^j\right), i, j = 1, \ldots, n$). Если поля $h_1, \ldots, h_k$ линейно независимы и удовлетворяют условию Фробениуса $[h_i, h_j] = \sum_{l=1}^{k} c_{ij}^l h_l$ для некоторых функций $c_{ij}^l(x)$, и $m = k$ (размерность инварианта равна числу линейных управлений), то система (2.2) вполне управляема на инварианте, а переход из одной его точки в другую может быть выполнен «простейшим» способом —

при постоянном u. Например, это имеет место в случае, когда $k = 1$, а при $k > 1$ — когда векторные поля h_i коммутируют между собой, т.е. $[h_i, h_j] = 0$ для всех i, j. Следуя сложившейся терминологии (см [1]), такую систему назовем *корректной*.

2. Если $[h_i, h_j] \neq 0$, то строится алгебра Ли **Lie** $(h_1, \ldots, h_k)$, которая получается добавлением всех коммутаторов к $h_1, \ldots, h_k$, $[h_i, h_j]$, $[[h_i, h_j], h_l]$, $\ldots$, и их линейных комбинаций. Обозначим через $\mathbf{L}(x)$ линейную оболочку **Lie** $(h_1, \ldots, h_k)$. Если $\dim \mathbf{L} = m \leq n$, то система (2.2) вполне управляема на некотором связном m-мерном многообразии $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n$, называемом *орбитой* семейства $h_1, \ldots, h_k$, (теорема об орбите Нагано-Суссмана) и для любых точек $q_0, q_1 \in \mathbf{M}$ существуют кусочно-постоянные управления $u(\tau)$, переводящие эту систему из точки q_0 в q_1. В частности, при $m = n$ система (2.2) вполне управляема во всем пространстве $\mathbf{R}^n$.

Заметим, что условие, эквивалентное $\mathbf{U} = \mathbb{R}^k$ не является необходимым для полной (глобальной) управляемости (например, в случае периодичности решений системы (2.2)), однако если оно не выполняется, то глобальная управляемость не влечет локальной [10], а именно, существуют ситуации, когда из начальной точки в сколь угодно близкую конечную точку на интегральном многообразии предельной системы можно попасть лишь по траектория конечной длины.

При невыполнении условия корректности построение конкретных траекторий, соединяющих заданные точки существенно усложняется. В [11] представлена универсальная, но весьма сложная, схема, в которой траектория поля $h_r = [h_i, h_j]$ с любой точности аппроксимируется зигзагообразной последовательностью траекторий полей h_i, h_j, а аппроксимация траекторий последующих элементов алгебры Ли сводится к аппроксимации траекторий исходных рекурсивно. В [12] предложены и реализованы для систем небольшой размерности некоторые специальные схемы, основанные на нильпотентной аппроксимации системы (2.2). Однако, проблема сложности остается. В то же время, как показывают примеры, имеются резервы упрощения на пути расширения области поиска за счет преобразования системы (2.2) к производным системам меньшего порядка. Далее этот подход описывается в достаточно общем виде.

3. Преобразование к производной системе

Представим (2.2) в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = \overline{h}(x)\overline{u} + \widehat{h}(x)\widehat{u} = \sum_{i=r+1}^{m} h_i(x)u^i + \sum_{j=1}^{r} h_j(x)u^j, \tag{3.1}$$

$\tau \in [\tau_I, \tau_F]$, $\tau_I > t_i, \tau_F < t_F$, где без ограничения общности будем считать $h_j(x)$ такими, что при $u^i = 0$ система (3.1) корректна (это заведомо выполняется при $r = 1$)

Пусть $y = \eta(x)$ — $(n-r)$-мерный интеграл этой корректной системы, так что $\frac{dy}{d\tau} = \eta_x \widehat{h}(x) = 0$ для всех x. Рассмотрим систему, называемую *производной* по отношению к исходной (3.1):

$$\frac{dy}{d\tau} = \eta_x \overline{h}(x)\overline{u}, \quad y = \eta(t, x), \tag{3.2}$$

Тем самым вводится множество $\mathbf{E}_x$ кусочно-непрерывных функций $x(\tau)$ таких, что функции $y(\tau) = \eta(x(\tau))$ (кусочно-гладкие) удовлетворяют системе (3.2), где $w^i(\tau)$ — кусочно-непрерывны на $[\tau_I, \tau_F]$ функции.

Пусть $\mathbf{D}^x$ — множество всех решений $x(t)$ (кусочно-гладких) исходной системы (2.2). По построению $\mathbf{D}^x \subset \mathbf{E}^x$. Таким образом, производная дифференциальная система является ослабленной по отношению к исходной дифференциальной связи настолько, что она допускает разрывные решения $x(t)$, в то время как решения исходной системы непрерывны и, по крайней мере, почти всюду дифференцируемы. Тем не менее исходная и производная системы эквивалентны в том смысле, что любое решение производной системы (3.2) $x_*(t)$ аппроксимируется последовательностью решений исходной системы (3.1) по мере [6] (Теорема 2.2). Указанная последовательность строится следующим образом. Вводится в рассмотрение промежуточный между $\mathbf{D}^x$ и $\mathbf{E}^x$ класс кусочно-непрерывных функций $\tilde{\mathbf{D}}^x$ со следующими свойствами: на каждом интервале непрерывности функция $x(t) \in \tilde{\mathbf{D}}^x$ удовлетворяет системе (3.1); в каждой точке разрыва τ' правый и левый ее пределы принадлежат одному и тому же множеству $\mathbf{Q}(y) = \{x : y = \eta(x)\}$.

$$x(\tau' + 0) \in \mathbf{Q}(y(\tau')), \quad x(\tau' - 0) \in \mathbf{Q}(y(\tau')).$$

Из элементов этого класса строится последовательность, аппроксимирующая $x(\tau)$, а каждый элемент этой последовательности, в свою очередь, аппроксимируется последовательностью из исходного класса $\mathbf{D}^x$.

Однако, если речь идет о траектории $x_*(\tau)$ в пространстве x, то с учетом свойства 1 она может быть реализована в исходном классе непосредственно и при заданном общем времени. Рассмотрим преобразование $y = \eta(x)$, $z = \zeta(x)$, где z — вектор криволинейных координат на интегральном многообразии, так что существует обратное преобразование $x = \xi(y, z)$. Исходная система преобразуется к системе из уравнения (3.2) и уравнения

$$\frac{dz}{d\tau} = \zeta_x \left(\overline{h}^z(x)\overline{u} + \widehat{h}(x)\widehat{u} \right), \quad x = \xi(y, z), \tag{3.3}$$

Функция $x_*(\tau)$ преобразуется к паре $(y_*(\tau), z_*(\tau))$, где $z_*(\tau)$ — кусочно-непрерывна с возможными точками разрыва $\tau_0 = \tau_I, \tau_1, \ldots \tau_p = \tau_F$, так что (τ_i, τ_{i+1}) — интервалы непрерывности. Это значит, что имеется упорядоченная последовательность точек $z^-_{*0} = z_I$, $(z^+_0, z^-_1, z^+_1, \ldots z^-_p)_*$, $z^+_{*p} = z_F$, где z^-_* и z^+_* — левый правый пределы в точке разрыва.

Сопоставим этой последовательности разбиение заданного отрезка времени $[t_I, t_F]$ точками $t^-_0 = t_I$, $t^+_0, t^-_1, t^+_1, \ldots t^-_p$, $t^+_p = t_F$ так, что $t^-_{i+1} - t^+_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, а интервалы (t^-_i, t^+_i) — произвольного размера в пределах разбиения. При этом на каждом интервале (t^-_i, t^+_i), соответствующем «бывшей» точке разрыва $z_*(\tau)$ положим в системе (3.3) $\overline{u} = 0$. тогда $y_*(t) = \mathrm{const} = y_*(\tau_i)$,

$$\dot{z} = v = \zeta_x \widehat{h}(x)\widehat{u}, \quad x = \xi(y, z), \quad z(t^-_i) = z^-_i,\ z(t^+_i) = z^+_i. \tag{3.4}$$

Это — двухточечная краевая задача для корректной системы (порядок совпадает с числом линейных управлений (k)). Она имеет бесчисленное множество решений (траекторий, соединяющих точки z^-_* и z^+_*), простейшие из которых — прямые (при постоянном v), либо некоторые кривые (при постоянном $\widehat{u}$).

На каждом интервале (t^+_i, t^-_{i+1}), соответствующем участку непрерывности $z_*(\tau)$ из уравнения (3.3) находится $\widehat{u}_*(\tau)$ и далее соответствующая зависимость $\widehat{u}_*(t)$ простым пересчетом к новому аргументу:

$$t = \tau + t^+_i - \tau_i \quad \tau \in (\tau_{i+1}, \tau_i) \quad t^+_{i+1} = t^-_{i+1} + \tau_{i+1} - \tau_i + t^+_i - t^-_i. \tag{3.5}$$

В целом получается конечная итерационная процедура преобразований. На каждой итерации рассматривается задача управления для системы типа (2.2) — перевода ее из одной точки в другую на заданном отрезке времени $[t_I, t_F]$ (без ограничения общности можно принять $t_I = 0$) сводится к аналогичной задаче для производной системы типа (3.2) меньшего порядка, $(n - r)$ с тем же числом управлений (m), из которых $m - r$ — линейные. Если она решается и притом достаточно просто, например, с помощью постоянных или кусочно-постоянных управлений z, u, то восстанавливается решение исходной системы посредством описанных операций, и на этом процедура заканчивается. Иначе, учитывая что производная система имеет неограниченное множество скоростей (пучок гиперплоскостей с параметром z), выполняется следующая итерация — переход к следующей производной системе и т.д. до тех пор пока не будет найдено подходящее решение. Некоторые важные детали этого перехода описаны в [13].

Практически задачу управления для производной системы можно решать и без явного преобразования к переменным y, z, т.е. считать, что имеется смешанное ограничение $\eta(x) = y$. Заданные граничные точки должны принадлежать одной и той же орбите исходной системы. Она может быть выявлена заранее, путем построения упомянутой выше алгебры Ли и соответствующей корректной виртуальной системы

$$\frac{dx}{d\tau} = h_j(x)u^j, \quad j = 1, 2, \ldots, q,$$

где $h_j(x)$ — базисный набор элементов алгебры Ли. Однако, это не обязательно, орбита естественным образом выявится в процессе преобразований [13].

4. Примеры

Пример 1.

$$\dot{x}^1 = u^1 \cos x^3, \quad \dot{x}^2 = u^1 \sin x^3, \quad \dot{x}^3 = u^2. \tag{4.1}$$

Это упрощенная модель движения мобильного робота [7], где $x^1,\ x^2$ — координаты положения u^1 — модуль вектора скорости x^3 — угол направления движения. Здесь

$$h_1 = (\cos x^3, \sin x^3, 0),\ h_2 = (0,0,1),\ [h_1, h_2] = (\sin x^3, -\cos x^3, 0),$$

$\dim\mathbf{Lie}(h_1, h_2) = 3$. Система вполне управляема в рассматриваемом трехмерном пространстве состояний. Требуется перейти из начальной точки $x(0) = 0$ в конечную x_F за заданное время t_F. Для определенности положим $t_F = 1,\ x_F = (1,2,3)$. Найдем первые интегралы системы при $u^1 = 0$. Это, очевидно, $x^1,\ x^2$. Разделим отрезок $[0, t_F]$ на три участка произвольной продолжительности (для определенности одинаковыми) точками $t_1,\ t_2$. Производная система состоит из первых двух уравнений (4.1), u^1 и x^3 — управления. Примем их постоянными на $(t_1,\ t_2)$. Тогда

$$\cos x_*^3 = \frac{x_F^1}{\sqrt{(x_F^1)^2 + (x_F^2)^2}},\ \ \sin x_*^3 = \frac{x_F^2}{\sqrt{(x_F^1)^2 + (x_F^2)^2}},$$

$$x_F^1 = (t_2 - t_1) u^1 \cos x_*^3,\ x_F^2 = (t_2 - t_1) u^1 \sin x_*^3.$$

На отрезках $[0, t_1],\ [t_2, t_F]$ положим $u^1 = 0,\ u^2 = \mathrm{const}$, при этом $x^{1-2}(t) = \mathrm{const}$. Тогда

$$x_*^{1-2}(t_1) = x_I^{1-2} = 0,\ x_*^{1-2}(t_2) = x_F^{1-2}.$$

$$x_*^3(t_1) = t_1 u^2(0), \quad (x^3(t_F) = x_*^3(t_2) + u^2(t_F)(t_2 - t_1).$$

Отсюда находятся u_*^1 на $(t_1,\ t_2)$ и u_*^2 на граничных отрезках. Конкретные значения представлены на рис. 1.

Решение имеет простой физический смысл: разворот аппарата с постоянной угловой скоростью при нулевой линейной скорости из начального направление на направление в заданную конечную точку на плоскости, равномерное движение в эту точку, останов при ее достижении и разворот в заданном конечном направлении.

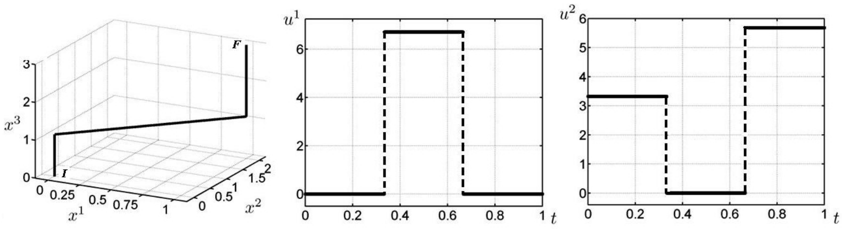

Рис. 1. Для примера 1.

Пример 2.

$$\dot{x}^1 = x^3u^1 - x^2u^2, \quad \dot{x}^2 = x^3u^1 + x^1u^2, \quad \dot{x}^3 = -x^1u^1 + x^2u^2 \tag{4.2}$$

Эта система вполне управляема в рассматриваемом трехмерном пространстве. Действительно, имеем:

$$h_1 = (x^3, x^3, -x^1),\ h_2 = (-x^2, x^1, x^2),$$
$$[h_1, h_2] = -(x^2 - x^3), x^1 + x^3, x^2 - x^1) \neq 0.$$

Рассмотрим задачу попадания из начальной точки в некоторую конечную (для определенности

$$x_I^1 = 1, \quad x_I^2 = 0, \quad x_I^3 = 0, \quad x_F^1 = 1, \quad x_F^2 = 2, \quad x_F^3 = 3).$$

на некотором отрезке времени $(0, t_F)$, t_F – не фиксирован. Найдем первые интегралы системы (4.1) при $u^1 = 0$ и перейдем к производной системе:

$$\frac{dy^1}{d\tau} = (-x^1 + x^3)u^1,\ \frac{dy^2}{d\tau} = x^3(x^1 + x^2)u^1,$$
$$y^1 = x^1 + x^3,\ y^2 = \frac{1}{2}((x^1)^2 + (x^2)^2).$$

Это система второго порядка, в которой управлениями наряду с u^1 служат x^1, x^2, x^3, связанные с y^1 и y^2 указанными конечными соотношениями. Фактически имеем две свободных управляющих переменных в системе второго порядка. Положим $x^1 = 0$ на (τ_I, τ_F) и найдем соответствующие траектории производной системы:

$$\left(\frac{dy^1}{dy^2} = \frac{1}{x^2}, \quad x^2 = \pm\sqrt{2y^2}\right) \Longrightarrow y^2 = \frac{(y^1 - c)^2}{2}$$

Проведем две кривые из этого семейства соответственно через начальную точку (при этом $c_1 = y_I^1 - \sqrt{2q_I} = 1 - 1 = 0$), и конечную:

$$y_F^1 = x_F^1 + x_F^3 = 4, \quad y_F^2 = \frac{1}{2}((x_F^1)^2 + (x_F^2)^2) = 2.5$$

(при этом $c_2 = y_F^1 + \sqrt{2q_F} = 4 + \sqrt{5}$) (рис. 2). Пересечение происходит в точке $y_d^1 = c_2/2,\ y_d^2 = (c_2)^2/8$. Это точка разрыва (переключения) «новых» управлений. Две другие получаются в граничных точках (y_I^1, y_F^1). Конкретно имеем:

$$x_*^1 = 0,\ y_*^1 \in (1, y_F^1), \quad x_{*F}^1 = x_F^1 = 1,\ x_*^3 = y^1,\ x_{*F}^2 = x_F^3 = 2,$$

$$x_*^2 = y_*^1 = x_*^3,\ y_*^1 \in [0, y_d^2), \quad x_*^2 = -c_2 + x_*^3,\ y_*^1 \in [y_d^1, y_F^1).$$

Переключения происходят при постоянных $y^1,\ y^2$: правые и левые пределы лежат на соответствующих интегральных кривых, иначе — на траекториях исходной системы при $u^1 = 0$.

Программы управления $u^i(t)$ (которые определяются неоднозначно) зададим следующим образом. Разделим отрезок времени на пять участков соответственно ситуациям разрывов (x^1, x^2, z) при фиксированных y^1, y^2 и ситуациям непрерывного изменения по траектории.

На участках, соответствующих «разрывам», положим $u^1 = 0$, а u^2 зададим постоянным и найдем из первых двух уравнений (4.2), полагая $x^1 = \sqrt{2y^2}\cos\theta, x^2 = \sqrt{2y^2}\sin\theta$. После подстановки получим

$$\dot\theta_* = -u_*^2 \Longrightarrow u_*^2 = -\frac{\theta_*^+ - \theta_*^-}{\Delta t},$$

где Δt — продолжительность соответствующего отрезка времени.

На участках непрерывного изменения из уравнений (4.3) с учетом найденных соотношений для траектории находим u^1, также считая его постоянным. Например, из уравнения относительно y^1 получаем:

$$\dot y_*^1 = y_*^1 u^1 \Longrightarrow u_{*k}^1 = \frac{\ln y_{*k+1}^1 - \ln y_{*k}^1}{t_{k+1}^- - t_k^+}$$

После этого находится соответствующее u^2 из уравнений (4.2). Например, из уравнения относительно x^3 при $x^2 = x^3 = y^1,\ x^1 = 0$ получим:

$$\dot x_*^3 = \dot y_*^1 = y_*^1 u_*^1 = y_*^1 u_*^2 \Longrightarrow u_*^2 = u_*^1.$$

Результаты расчетов представлены на рис. 2.

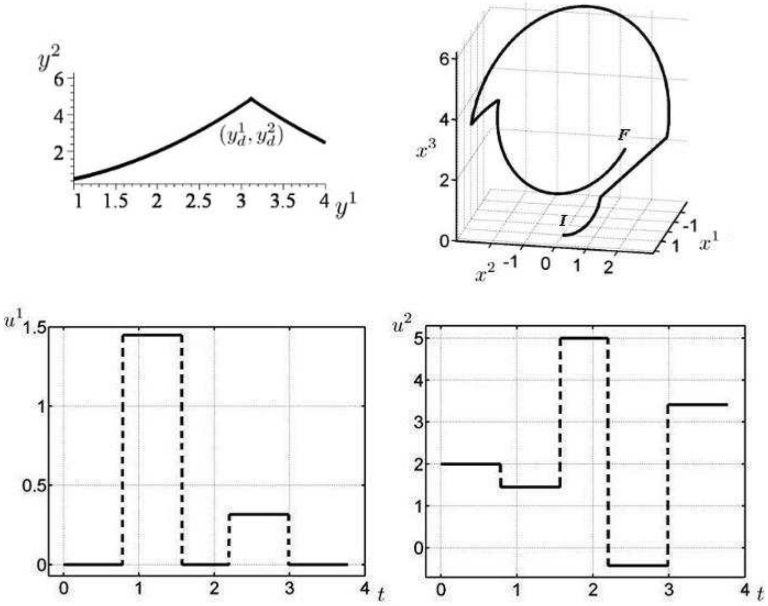

Рис. 2. Для примера 2.

Пример 3.

$$\dot{x}^1 = u^1, \quad \dot{x}^2 = x^1 u^2, \quad \dot{x}^3 = \frac{1}{2}(x^1)^2 u^2, \quad \dot{x}^4 = -2x^1 u^1, \quad \tau \in [\tau_I, \tau_F]. \quad (4.3)$$

В этом примере для каждой точки x существует орбита как 3-мерное многообразие в 4-мерном пространстве состояний. В данном случае она описывается как интеграл подсистемы из первого и четвертого уравнений системы (4.3):

$$(x^1)^2 + x^4 = y = (x_I^1)^2 + x_I^4. \quad (4.4)$$

Непосредственно проверяется, что это интеграл всей системы (4.3).

Рассмотрим, как перевести систему (4.3) из точки x_I в некоторую точку на ее орбите x_F, где $x_F^4 = y - (x_F^1)^2$ для достаточно общего случая $x_I^{2-3} \neq x_F^{2-3}$. Время перехода не фиксировано. Перейдем в системе (4.3) к новым переменным x^{1-3}, y,что сводится к замене четвертого уравнения уравнением $\dot{y} = 0$. Исключив его, приходим к случаю полной управляемости в пространстве переменных x^{1-3}, рассмотренному в предыдущих примерах. Найдем первые интегралы системы, получающейся при $u^1 = 0$. Легко видеть, что это x^2, x^3. Производная система сводится к уравнениям относительно этих переменных в системе (4.3), где роль управлений играют x^1 и u^2.

$$\frac{dx^2}{d\tau} = x^1 u^2, \quad \frac{dx^3}{d\tau} = \frac{1}{2}(x^1)^2 u^2, \quad \tau \in [\tau_I, \tau_F]. \quad (4.5)$$

Функции $x^1(\tau)$ и $u^2(\tau)$, требуется подобрать такими, чтобы удовлетворялись краевые условия на $x^{2,\,3}$. Зададим эти функции как константы на некотором конечном интервале $(0, \tau_F)$. Тогда на этом интервале:

$$x^1_* = \frac{2b}{a}, \quad u^2_* = \frac{a^2}{2b}, \quad a = \frac{x^2_F - x^2_I}{t_F}, \quad b = \frac{x^3_F - x^3_I}{t_F},$$

$$x^2_*(t) = x^2_I + x^1_* u^2_* t, \quad x^3_*(t) = x^3_I + \frac{1}{2}(x^1_*)^2 u^2_* t,$$

Функции x^1_* и $x^4_*(t) = y - (x^1_*)^2$ разрывны в граничных точках.

Реализация этого решения в исходном классе выполняется так же как и в примере 1, с той лишь разницей, что t_F не фиксирован. Зададим t_F произвольно. Разделим отрезок $[0, t_F]$ на три участка произвольной продолжительности точками $t_1,\ t_2$. На отрезках $[0, t_1],\ [t_2, t_F]$ положим $u^2 = 0, u^1 = \text{const}$, при этом $x^{2-3}(t) = \text{const}$. Тогда

$$x^1(t) = tu^1(0), \quad x^1(t) = x^1_F + u^1(t_F)(t - (t_F)).$$

Отсюда находятся x^1 на $(t_1,\ t_2)$ и u^2 на граничных отрезках.

На рис. 3 представлены конкретные результаты для следующих граничных условий:

x^1_I	x^2_I	x^3_I	x^4_I	x^1_F	x^2_F	x^3_F	x^4_F
1	1	1	1	-1	2	$-1/2$	1

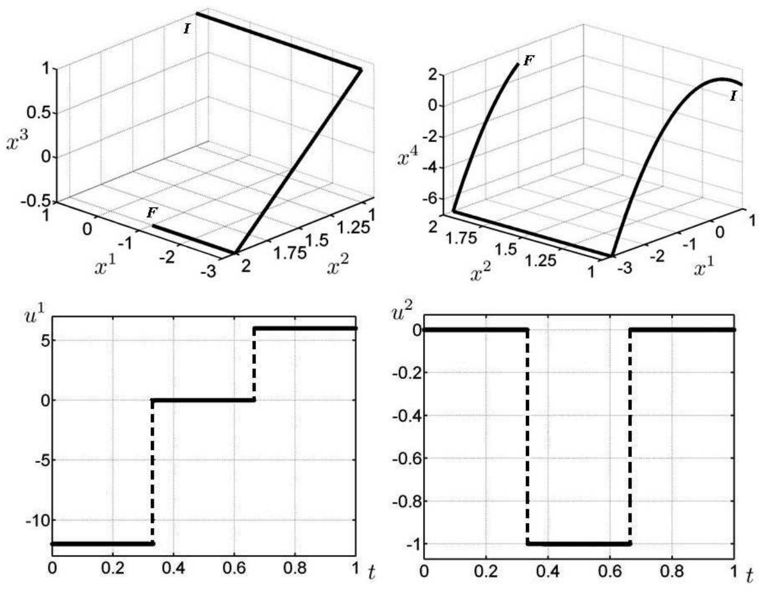

Рис. 3. Для примера 3.

5. Заключение

Итак рассмотрена задача поиска целевых законов управления для специального класса систем — линейных относительно управлений, возникающих естественным образом как промежуточные при исследовании оптимизационных и других задач импульсного управления, но имеющих и самостоятельное значение. Основные трудности возникают здесь в случае когда число управлений меньше числа фазовых переменных, т.е. порядка системы. Предложен конструктивный подход, основанный на формальном представлении таких систем как систем с неограниченными управлениями и применении достаточно развитой на сегодня теории преобразования их к производным системам меньшего порядка. Идея состоит в последовательном понижении порядка системы при сохранении числа управлений, трансформируемых в линейные, что позволяет преодолеть изначальный «дефицит» линейных управлений. Эффективность этого подхода продемонстрирована на наглядных примерах.

Предложенный подход принципиально применим и к случаю ограниченной управляемости рассматриваемых систем, когда речь идет не просто о «хороших» траекториях, а и об оценке ее множества достижимости в пространстве или на орбитах, что также весьма актуально для практических приложений [14].

Описанные выше преобразования связаны с поиском интеграла (набора первых интегралов) некоторой, вообще говоря нелинейной, системы. Это не всегда можно сделать явно. Однако можно воспользоваться неявными процедурами их описания непосредственно в терминах исходной управляемой системы [8, 16], использующей факты дифференциальной геометрии и теории многомерных дифференциальных уравнений [17].

Список литературы

1. Дыхта В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк. — М.: Физматлит, 2000. — 256 с.
2. Миллер Б. М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями / Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович. — М.: Наука, 2005. — 400 с.
3. Кротов В. Ф. Разрывные решения вариационных задач / В. Ф. Кротов // Изв. вузов. Математика. — 1961. — № 1. — С. 86–98.
4. Гурман В. И. Об оптимальных процессах особого управления / В. И. Гурман // Автоматика и Телемеханика. — 1965. — Т. 26. — № 5. — С. 782–791.
5. Гурман В. И. Об оптимальных процессах с неограниченными производными / В. И. Гурман // Автоматика и Телемеханика. — 1972. — № 12. — С. 14–21.
6. Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления / В. И. Гурман. — М.: Наука, 1977. — 304 с.

7. Аграчев А. А. Геометрическая теория управления / А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков. — М.: Физматлит, 2005. — 392 с.
8. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления / В. И. Гурман. — М.: Наука, 1997. — 288 с.
9. Рашевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией / П. К. Рашевский // Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. К.Либкнехта. Сер. физ.-мат. — 1938. — Т. 3. — Вып. 2. — С. 83–94.
10. Bacciotti A. On the relationship between global and local controllability / A. Bacciotti, G. Stefani // Math. Systems Theory. — 1983. — Vol. 16. — P. 79–91.
11. Гурман В. И. Представление и реализация обобщенных решений управляемых систем с неограниченным годографом / В. И. Гурман, Ю. Л. Сачков //Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 4. — С. 79–87.
12. Сачкова Е. Ф. Решение задачи управления для нильпотентных систем / Е. Ф. Сачкова // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44. — № 12. — С. 1704–1707.
13. Моржин О. В. Построение минимизирующих последовательностей в системах с неограниченными управлениями / О. В. Моржин // Вестник Бурятского государственного университета. Вып. 9: Математика и информатика. — 2009.
14. Гурман В. И. Преобразования управляемых систем для исследования импульсных режимов / В. И. Гурман // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 4.
15. Колокольникова Г. А. Исследование обобщенных решений задач оптимального управления с линейными неограниченными управлениями на основе кратных преобразований / Г. А. Колокольникова // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28. — № 11. — С. 1919–1932.
16. Гурман В. И. Представление импульсных режимов - обобщенных решений управляемых дифференциальных систем / В. И. Гурман, Ни Минь Кань // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44. — № 5. — С. 1–8.
17. Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И. В. Гайшун. — Минск: Наука и техника, 1983. — 300 с.

V. I. Gurman, Ni Min Kan

Trajectories of impulse regimes for controlled systems

Abstract. In this paper linear differential systems are considered. A scheme for analysis of controllability and for trajectories construction is proposed.

Keywords: controlled systems, impulse regimes, linear controls.

Гурман Владимир Иосифович, доктор физико-математических наук, профессор, Директор исслед. центра, Институт программных систем имени А.К. Айламазяна РАН, 152020, Переславль-Залесский, м. Ботик, тел.: (08535) 98-053, (vlad@gurman.botik.ru)

Gurman Vladimir, professor, director of Research Center, Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalessky Yaroslavl Region Russia, 152020, Phone: (08535) 98-053, (vlad@gurman.botik.ru)