Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 257—268

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

К оптимизации нелинейных волновых процессов *

В. А. Терлецкий, Е. А. Лутковская
Иркутский государственный университет

Аннотация. В статье для задачи оптимального управления нелинейным волновым уравнением приводятся необходимые условия оптимальности в виде вариационного, конечномерного и линеаризованного принципа максимума.

Ключевые слова: оптимальное управление, вариационный принцип максимума, волновое уравнение.

1. Постановка задачи

В области $\Pi = S' \times T,\ S' = (s_0, s_1),\ T = (t_0, t_1)$ рассмотрим управляемый процесс $\{u, v; x\}$ в котором функция $x = x(s,t)$ подчинена волновому уравнению

$$x_{tt} - a^2(s)x_{ss} = f(x, x_t, x_s, u, s, t), \tag{1.1}$$

начальным

$$x(s, t_0) = x^0(s),\ x_t(s, t_0) = x^1(s),\ s \in \overline{S}, \tag{1.2}$$

и граничным

$$x_t(s_0, t) = q^0(x, v^0, t), x_s(s_1, t) = q^1(x, v^1, t),\ t \in T, \tag{1.3}$$

условиям. Пусть требуется найти измеримые и ограниченные в области своего определения распределенное $u = u(s,t)$ и граничные $v^i = v^i(t)$ управления, удовлетворяющие ограничениям

$$u(s,t) \in U,\ (s,t) \in \Pi,\ v^i(t) \in V^i,\ i = 0, 1\ t \in T, \tag{1.4}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 08–01–00709-а, 08–01–98007-р_ сибирь_а.

и доставляющие минимум целевому функционалу

$$J(u,v) = \int_{\partial\Pi} \varphi(x, x_t, x_s, v, s, t) d\omega + \iint_{\Pi} \Phi(x, x_t, x_s, u, s, t) ds dt \qquad (1.5)$$

на решениях x начально-краевой задачи (1.1)–(1.3). Здесь $\partial\Pi$ – граница области Π, $d\omega = \sqrt{ds^2 + dt^2}$.

Будем предполагать, что гладкий коэффициент $a = a(s) \le \overline{a} > 0$, $s \in \overline{S} = [s_0, s_1]$, функции $f = f(x, x_t, x_s, u, s, t), q^i = q^i(x, v^i, t), i = 0, 1, \varphi = \varphi(x, x_t, x_s, v, s, t), \Phi = \Phi(x, x_t, x_s, u, s, t)$ непрерывны по совокупности своих переменных вместе со своими частными производными по x, x_t, x_s; функции $x^0 = x^0(s)$, $x^{0\prime} = \frac{d}{ds}x^0(s)$, и $x^1 = x^1(s)$ измеримы и ограничены в S, множества $U, V_i, i = 0, 1$ – замкнутые подмножества вещественной прямой.

2. Допустимый процесс

При сделанных предположениях на параметры задачи (1.1)–(1.5), как известно [1], классического решения x не существует. Введем в рассмотрение обобщенное решение x, воспользовавшись результатами работы [2]. Для этого определим характеристики $s = s^{\pm}(\xi, \tau; t)$ как семейство интегральных кривых дифференциальных уравнений $\frac{ds}{dt} = \pm a(s)$ соответственно, удовлетворяющих условию $s^{\pm}(\xi, \tau; \tau) = \xi$. Введем в рассмотрение производные $D^{\pm}$ по направлению характеристик, положив по определению

$$D^{\pm}x(s,t) = [\frac{d}{d\tau} x(s^{\pm}(s, t; \tau), \tau)]|_{\tau = t}.$$

В [3] доказано, что для любых допустимых управлений (1.4) обобщенное решение x существует и единственно в пространстве функций $\widetilde{W}^{1,1}_{\infty}(\Pi)$, снабженном нормой

$$\begin{gathered} ||x||_{L_\infty(\Pi)} + ||x_t||_{L_\infty(\Pi)} + ||x_s||_{L_\infty(\Pi)} + \\ + \|D^+(x_t - a x_s)\|_{L_\infty(\Pi)} + \|D^-(x_t + a x_s)\|_{L_\infty(\Pi)} \end{gathered}$$

если функция f удовлетворяет условию Липшица по переменным x, x_t, x_s. Кроме того, результаты работы [3] позволяют установить оценки приращения $\Delta x = \widetilde{x} - x$ и его частных производных $\Delta x_t = \widetilde{x}_t - x_t$, $\Delta x_s = \widetilde{x}_s - x_s$ для двух произвольных допустимых процессов $\{\widetilde{u}, \widetilde{v}; \widetilde{x}\}$ и $\{u, v; x\}$. Данные оценки имеют вид

$$
\begin{gathered}
|\Delta x(s,t)| \le K\{\int\limits_{T\cap\partial G(s,t)} |\Delta_{\widetilde{v}} q[t]|dt + \iint\limits_{G(s,t)} |\Delta_{\widetilde{u}} f[s,t]|dsdt\},\\
|\Delta x_t(s,t) \pm \Delta x_s(s,t)| \le K\{|\Delta_{\widetilde{v}} q[\check{t}^{\pm}(s,t)]| +\\
+\int\limits_{\check{t}^{\pm}(s,t)}^{t} |\Delta_{\widetilde{u}} f[s^{\pm}(s,t;\tau),\tau)]|d\tau +\\
+\int\limits_{T\cap\partial G(s,t)} |\Delta_{\widetilde{v}} q[t]|dt + \iint\limits_{G(s,t)} |\Delta_{\widetilde{u}} f[s,t]|dsdt\}.
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Здесь K – положительная константа, не зависящая от выбора допустимых процессов; $G(s,t)$ – область определенности (см. [1, с.47]) решения x в точке (s,t), $G(s,t) = \{(\xi,\tau) \in \Pi : \max\{s_0, s^+(s,t;\tau)\} < \xi < \min\{s_1, s^-(s,t;\tau)\},\ \tau < t\}$, $\partial G(s,t)$ – ее граница; $\Delta_{\widetilde{u}} f[\xi,\tau] = f(x,x_t,x_s,\widetilde{u},\xi,\tau) - f(x,x_t,x_s,u,\xi,\tau)$ – частное приращение функции f по управлению, вычисленное в точке (ξ,τ); $\Delta_{\widetilde{v}} q[\tau] = \sum\limits_{i=0}^{1}(q^i(x,\widetilde{v}^i,\tau) - q^i(x,v^i,\tau))$ – частное приращение одной из функций q^i, вычисленное в момент τ на соответствующей границе; $\check{t}^{\pm}(s,t)$ – момент начала характеристики $s^{\pm}(s,t;\cdot)$, проходящей через точку (s,t), причем $\check{t}^{\pm}(s,t) < t$.

3. Эквивалентная задача оптимального управления

Исследование задачи (1.1)–(1.5) проведем с помощью эквивалентной ей задачи оптимального управления. Введем в рассмотрение инварианты Римана $r^{\pm}$ для волнового уравнения (1.1), положив по определению $r^{\pm} = x_t \mp a x_s$. Очевидно, что обратная замена имеет вид

$$x_t = (r^- + r^+)/2,\ x_s = (r^- - r^+)/2a. \tag{3.1}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что функции x, x_t, x_s удовлетворяют уравнению (1) тогда и только тогда, когда функции $x, r^{\pm}$ удовлетворяют гиперболической системе

$$D^{\pm}x = r^{\mp},\ D^{\pm}r^{\pm} = \widetilde{f}(x, r^+, r^-, u, s, t), \tag{3.2}$$

где $\widetilde{f} = f(x, (r^- + r^+)/2, (r^- - r^+)/2a, u, s, t) - a'(r^- - r^+)/2$.

Нетрудно видеть, что начальные условия (1.2) совпадают с равенствами

$$x(s,t_0) = x^0(s),\ r^{\pm}(s,t_0) = x^1(s) \mp a(s)x^{0\prime}(s),\ s \in S, \tag{3.3}$$

а граничные условия (1.3) переписываются в форме

$$
\begin{aligned}
&r^+(s_0,t) = -r^-(s_0,t) + 2q^0(x(s_0,t),v^0,t),\\
&r^-(s_1,t) = r^+(s_1,t) + 2a(s_1)q^1((x(s_1,t),v^1,t),\ t \in T.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Понятно, что замена начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) на дифференциальную систему (3.2) со смешанными граничными условиями (3.3)–(3.4) не затрагивает множества допустимых управлений (1.4) и сохраняет фактически неизменным целевой функционал (1.5) ввиду взаимной однозначности между функциями x_t, x_s $r^{\pm}$. Далее везде, где аргументы исходной функции заменены на $r^{\pm}$ по правилу (3.1) над функцией будем использовать знак $\tilde{}$.

4. Сопряженная задача

Для задачи (3.2)–(3.4)определим функцию Понтрягина

$$\begin{gathered} H = H(\psi^+, \psi^-, \zeta^+, \zeta^-, x, r^+, r^-, u, s, t) = \\ = \psi^+ r^- + \psi^- r^+ + (\zeta^+ + \zeta^-)\widetilde{f}(x^+, x^-, r^+, r^-, u, s, t,) - \\ -\widetilde{\Phi}(x^+, x^-, r^+, r^-, u, s, t) \end{gathered} \tag{4.1}$$

с функциями $\psi^{\pm}, \zeta^{\pm}$, удовлетворяющими на допустимом процессе $\{u, v; x,\ r^{\pm}\}$ сопряженной задаче

$$\begin{gathered} D^{\pm}\psi^{\pm} + a'\psi^{\pm} = -H_x;\ D^{\pm}\zeta^{\pm} + a'\zeta^{\pm} = -H_{r^{\pm}},\ (s,t) \in \Pi, \\ \psi^{\pm}(s, t_1) = -\widetilde{\varphi}_x[s, t_1];\ \zeta^{\pm}(s, t_1) = -\widetilde{\varphi}_{r^{\pm}}[s, t_1], s \in S, \\ \psi^-(s_0, t) = \psi^+(s_0, t) - (k_0(t)(q^0_x(x(s_0, t), v^0, t) - \widetilde{\varphi}_x[s_0, t])/a(s_0), \\ \zeta^-(s_0, t) = -\zeta^+(s_0, t) - (\widetilde{\varphi}_{r^-}[s_0, t] - \widetilde{\varphi}_{r^+}[s_0, t])/a(s_0), \\ \psi^+(s_1, t) = \psi^-(s_1, t) + (k_1(t)(q^1_x(x(s_1, t), v^1, t) - \widetilde{\varphi}_x[s_1, t])/a(s_1), \\ \zeta^+(s_1, t) = \zeta^-(s_1, t) - (\widetilde{\varphi}_{r^-}[s_1, t] + \widetilde{\varphi}_{r^+}[s_1, t])/a(s_1),\ t \in T, \\ k_0(t) = -2(a(s_0)\zeta^+(s_0, t) + \widetilde{\varphi}_{r^+}), \\ k_1(t) = 2a(s_1)(a(s_1)\zeta^-(s_1, t) - \widetilde{\varphi}_{r^-}). \end{gathered} \tag{4.2}$$

5. Вариационный принцип максимума

Предположим для определенности, что время t_1 не превосходит времени $\bar{t}$, которое необходимо для прохождения характеристикой интервала S. Очевидно, значение $\bar{t}$ одновременно является корнем уравнений $s^+(s_0, t_0; \bar{t}) = s_1,\ s^-(s_1, t_0; \bar{t}) = s_0$, а также удовлетворяет $\bar{t} = \int\limits_{s_0}^{s_1} \frac{d\eta}{a(\eta)}$.

Данное ограничение означает, что любая характеристика $s^+(s_0, \tau; \cdot)$ $(s^-(s_1, \tau; \cdot))$, начинаясь на левой (правой) границе прямоугольника Π, заканчивается на его верхней границе $t = t_1$, «не успевая» дойти до противоположной боковой границы $s = s_1$ $(s = s_0)$ (см. рис. 1).

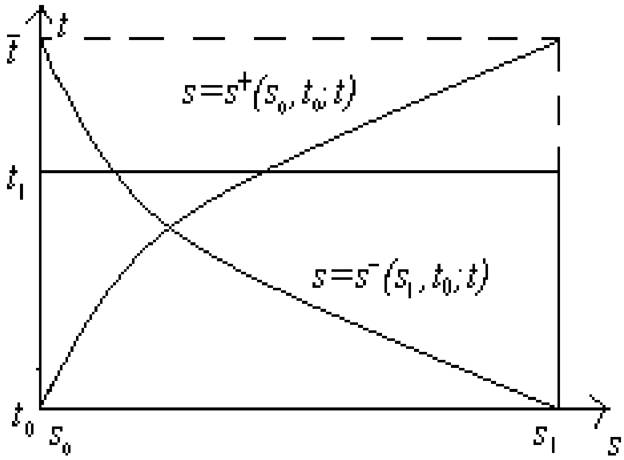

Рис. 1.

Введем в рассмотрение подмножества $\Pi_\varepsilon^i(\tau),\ i=0,1$ и $\Pi_\varepsilon^\pm(\xi)$ прямоугольника Π, представляющие собой полоски ширины порядка ε вдоль соответствующих характеристик:

$$\Pi_\varepsilon^i(\tau)=\{(s,t)\in\Pi:\ s\in\mathrm{co}\{s^\pm(s_i,\tau;t),s^\pm(s_i,\tau-\varepsilon;t\}\},\ \tau\in T,\ i=0,1;$$
$$\Pi_\varepsilon^\pm(\xi)=\{(s,t)\in\Pi:\ s\in\mathrm{co}\{s^\pm(\xi-\varepsilon,t_1;t),s^\pm(\xi,t_1;t\}\},$$

где $\xi\in(s^+(s_0,t_0;t_1),s_1)$ или, соответственно, $\xi\in(s_0,s^-(s_1,t_0;t_1))$ (см. рис. 2, рис. 3)

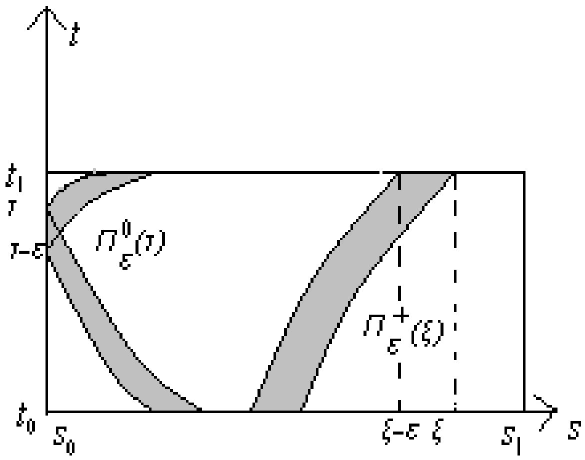

Рис. 2.

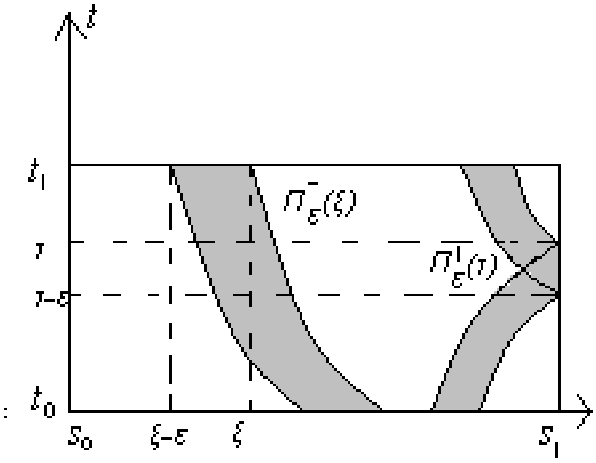

Рис. 3.

С помощью множеств $\Pi^i_\varepsilon(\tau)$ построим вариации Δu и Δv управлений u и v^i по правилу

$$
\begin{aligned}
&\Delta u(s,t) = \begin{cases} u(s,t)-\overline{u}(t), & (s,t)\in \Pi^i_\varepsilon(\tau), \\ \qquad 0, & (s,t)\in \Pi\backslash\Pi^i_\varepsilon(\tau), \end{cases}\\
&\Delta v^0(t) = \begin{cases} v^0(t)-\overline{v}^0, & t\in(\tau-\varepsilon,\tau), \\ \qquad 0, & t\in T\backslash(\tau-\varepsilon,\tau), \end{cases} \ \Delta v^1(t)\equiv 0, \text{ если } i=0,\\
&\Delta v^0(t)\equiv 0, \ \Delta v^1(t) = \begin{cases} v^1(t)-\overline{v}^1, & t\in(\tau-\varepsilon,\tau), \\ \qquad 0, & t\in T\backslash(\tau-\varepsilon,\tau), \end{cases} \text{ если } i=1.
\end{aligned}
$$

Аналогично с помощью множеств $\Pi^\pm_\varepsilon(\xi)$ (в том случае, когда они не пустые, т.е. при $t_1 < \overline{t}$) построим вариацию Δu управления u, положив

$$
\Delta u(s,t) = \begin{cases} u(s,t)-\overline{u}(t), & (s,t)\in \Pi^\pm_\varepsilon(\xi), \\ \qquad 0, & (s,t)\in \Pi\backslash\Pi^\pm_\varepsilon(\xi). \end{cases}
$$

В силу полученных оценок роста приращений (2.1) приращение Δx на каждой из перечисленных вариаций имеет порядок ε. В то же время приращение Δr^- (Δr^+_t) внутри характеристических полосок с отрицательным (положительным) наклоном от величины ε не зависит.

Анализ приращения целевого функционала на соответствующих приращениях распределенного u и граничных v управлений по схеме работ [4-6] приводит к следующим четырем семействам задач оптимального управления с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Задача 1.

$$
\begin{gathered}
I(\overline{u},\overline{v}) = \widetilde{\varphi}(x, r^+, y, \overline{v}^0, s_0, \tau) - \widetilde{\varphi}(x, y, r^-, s^+(s_0, \tau; t_1), t_1)\cdot \\
\cdot a(s^+(s_0, \tau; t_1)) + \int\limits_{t_0}^{\tau} H(\psi^+, \psi^-, \zeta^+, 0, x, r^+, y, \overline{u}, \xi, \tau) a(\xi)\Big|_{\xi = s^-(s_0, \tau; t)} dt + \\
+ \int\limits_{\tau}^{t_1} H(\psi^+, \psi^-, 0, \zeta^-, x, y, r^-, \overline{u}, \xi, \tau) a(\xi)\Big|_{\xi = s^+(s_0, \tau; t)} dt \longrightarrow \max, \\
\dot{y} = \widetilde{f}(x, r^+, y, \overline{u}, s^-(s_0, \tau; t), t), \;\; t \in [t_0, \tau], \\
y(t_0) = (x^1(\xi) + a(\xi) x^{0\prime}(\xi))\Big|_{\xi = s^-(s_0, \tau; t_0)}, \\
\dot{y} = \widetilde{f}(x, y, r^-, \overline{u}, s^+(s_0, \tau; t), t), \;\; t \in (\tau, t_1], \\
y(\tau + 0) = -y(\tau) + 2q^0(r^-(s_0, \tau), \overline{v}^0, \tau), \\
\overline{u}(t) \in U, \;\; t \in T, \;\; \overline{v}^0 \in V^0, \;\; \tau \in T.
\end{gathered}
$$

Задача 2.

$$
\begin{gathered}
I(\overline{u},\overline{v}) = -\widetilde{\varphi}(x, y, r^-, \overline{v}^1, s_1, \tau) - \widetilde{\varphi}(x, r^+, y, s^-(s_1, \tau; t_1), t_1)\cdot \\
\cdot a(s^-(s_1, \tau; t_1)) + \int\limits_{t_0}^{\tau} H(\psi^+, \psi^-, 0, \zeta^-, x, y, r^-, \overline{u}, \xi, \tau) a(\xi)\Big|_{\xi = s^+(s_1, \tau; t)} dt + \\
+ \int\limits_{\tau}^{t_1} H(\psi^+, \psi^-, \zeta^+, 0, x, r^+, y, \overline{u}, \xi, \tau) a(\xi)\Big|_{\xi = s^-(s_1, \tau; t)} dt \longrightarrow \max, \\
\dot{y} = \widetilde{f}(x, y, r^-, \overline{u}, s^+(s_1, \tau; t), t), \;\; t \in [t_0, \tau], \\
y(t_0) = (x^1(\xi) - a(\xi) x^{0\prime}(\xi))\Big|_{\xi = s^+(s_1, \tau; t_0)}, \\
\dot{y} = \widetilde{f}(x, r^+, y, \overline{u}, s^-(s_1, \tau; t), t), \;\; t \in (\tau, t_1], \\
y(\tau + 0) = y(\tau) + 2a(s_1) q^1(r^+(s_1, \tau), \overline{v}^1, \tau), \\
\overline{u}(t) \in U, \;\; t \in T, \;\; \overline{v}^1 \in V^1, \;\; \tau \in T.
\end{gathered}
$$

Задача 3.

$$
\begin{gathered}
I(\overline{u}) = -\widetilde{\varphi}(x, y, r^-, \xi, t_1) a(\xi) + \\
+ \int\limits_{t_0}^{t_1} H(\psi^+, \psi^-, 0, \zeta^-, x, y, r^-, \overline{u}, \eta, t) a(\eta)\Big|_{\eta = s^+(\xi, t_1; t)} dt \longrightarrow \max, \\
\dot{y} = \widetilde{f}(x, y, r^-, s^+(\xi, t_1; t), t), \\
y(t_0) = (x^1(\eta) - a(\eta) x^{0\prime}(\eta))\Big|_{\eta = s^+(\xi, t_1; t_0)}, \\
\overline{u}(t) \in U, \;\; t \in T, \;\; \xi \in (s^+(s_0, t_0; t_1), s_1).
\end{gathered}
$$

Задача 4.

$$I(\overline{u}) = -\widetilde{\varphi}(x, r^+, y, \xi, t_1)a(\xi) +$$
$$+\int_{t_0}^{t_1} H(\psi^+, \psi^-, \zeta^+, 0, x, r^+, y, \overline{u}, \eta, t)a(\eta)\Big|_{\eta=s^-(\xi,t_1;t)} dt \longrightarrow \max,$$
$$\dot{y} = \widetilde{f}(x, r^+, y, s^-(\xi, t_1; t), t),$$
$$y(t_0) = (x^1(\eta) + a(\eta)x^{0\prime}(\eta))\Big|_{\eta=s^-(\xi,t_1;t_0)},$$
$$\overline{u}(t) \in U,\ t \in T,\ \xi \in (s_0, s^-(s_1, t_0; t_1)).$$

Теорема 1. *Пусть управления u и v^i оптимальны в задаче (1.1)–(1.5), а функции $x, r^\pm$ и $\psi^\pm, \zeta^\pm$ являются решениями задач (3.2)–(3.4) и (4.2). Тогда*

1). для почти каждого $\tau \in T$ управления

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} u(s^-(s_0, \tau; t), t), & t \in (t_0, \tau), \\ u(s^+(s_0, \tau; t), t), & t \in (\tau, t_1), \end{cases} \quad \overline{v} = v(\tau),$$

оптимальны в задаче 1, а управления

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} u(s^+(s_1, \tau; t), t), & t \in (t_0, \tau), \\ u(s^-(s_1, \tau; t), t), & t \in (\tau, t_1), \end{cases} \quad \overline{v} = v(\tau),$$

оптимальны в задаче 2;

2). для почти каждого $\xi \in (s^+(s_0, t_0, t_1), s_1)$ управление $\overline{u}(t) = u(s^+(\xi, \tau; t), t)$ оптимально в задаче 3, а для почти всех $\xi \in (s_0, s^-(s_1, t_0; t_1))$ управление $\overline{u}(t) = u(s^-(\xi, t_1; t), t)$ оптимально в задаче 4.

6. Конечномерный и линеаризованный принцип максимума

Введем дополнительные предположения на параметры задачи (1.1)–(1.5). Будем считать, что каждая функция q^i дифференцируема по управлению v^i, а множества V^i –выпуклые, $i = 0, 1$. Тогда принцип максимума Понтрягина можно применить не только к задачам 3,4, но и к задачам 1,2. Итоговым результатом здесь будет

Теорема 2. *Пусть управления u и v^i оптимальны в задаче (1.1)–(1.5), а функции $r^\pm, r_t^\pm$ и $\psi^\pm, \zeta^\pm$ являются решениями задач (3.2)–(3.4) и (4.2). Тогда распределенное управление u почти всюду на* П *удовлетворяет принципу максимума Понтрягина*

$$H(\psi^+, \psi^-, \zeta^+, \zeta^-, r^+, r^-, r_t^+, r_t^-, u, s, t) =$$
$$= ytn?\max\nolimits_{\overline{u} \in U} H(\psi^+, \psi^-, \zeta^+, \zeta^-, r^+, r^-, r_t^+, r_t^-, \overline{u}, s, t),$$

а для граничных управлений v^i справедлив линеаризованный (дифференциальный) принцип максимума Понтрягина

$$\begin{array}{l} k_0(t)q^0_{v^0}(x(s_0,t),v^0,t)(\overline{v}^0 - v^0(t)) \le 0,\ \overline{v}^0 \in V^0, \\ k_1(t)q^1_{v^1}(x(s_1,t),v^1,t)(\overline{v}^1 - v^1(t)) \le 0,\ \overline{v}^1 \in V^1. \end{array} \tag{6.1}$$

Наконец, если допустить, что функция f дифференцируема по u, а множество U – выпуклое, то будет справедлива

Теорема 3. *Пусть управления u и v^i оптимальны в задаче (1.1)–(1.5), а функции $r^{\pm}, r^{\pm}_t$ и $\psi^{\pm}, \zeta^{\pm}$ являются решениями задач (3.2)–(3.4) и (4.2). Тогда распределенное управление u почти всюду на Π удовлетворяет линеаризованному (дифференциальному) принципу максимума*

$$H_u(\psi^+,\psi^-,\zeta^+,\zeta^-,r^+,r^-,r^+_t,r^-_t,u,s,t)(\overline{u} - u(s,t)) \le 0,\ \overline{u} \in U,$$

а для граничные управления v^i – условиям (6.1).

Отметим, что результаты теорем нетрудно переписать в терминах исходной задачи (1.1)–(1.5). Для этого достаточно учесть связь между функциями f, φ, Φ и $\widetilde{f}, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\Phi}$, а также замену переменных x, x_s и x_t на переменные $r^{\pm}, r^{\pm}$ в форме (3.1).

Подчеркнем, также, что вариационный принцип максимума является более сильным необходимым условием оптимальности, нежели чем принцип максимума конечномерный. Это можно доказать, приведя конкретные примеры задачи (1.1)–(1.5) с выпуклыми множествами V^i и гладкими по управлению функциями q^i, в которых управления u, v^i удовлетворяют конечномерному принципу максимума, но бракуются вариационным принципом максимума. В частности, для указанной цели подходит следующий

Пример.

$$\begin{gathered} x_{tt} - x_{ss} = u,\ (s,t) \in \Pi = S \times T, \\ x(s,0) = x_t(s,0) = 0,\ s \in \overline{S} = [0,3], \\ x_t(0,t) = x_s(3,t) = 0,\ t \in T = (0,1), \\ u(s,t) \in [-1,4],\ (s,t) \in \Pi, \end{gathered}$$

$$J(x) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^3 (x_t + x_s)^2 ds \longrightarrow \min.$$

Очевидно, что в силу независимости целевого функционала от состояния x, имеет смысл рассматривать систему (3.2) и сопряженную к ней систему (6.1) только для переменных $r^{\pm}$ и $\zeta^{\pm}$ соответственно.

Заметим, что $r^{\pm} = x_t \mp x_s$, и эквивалент задачи (3.2)–(3.4) имеет вид

$$\begin{gathered} (\tfrac{d}{dt}r^{\pm})_{\pm} = u,\ r^{\pm}(s,0) = 0,\ s \in \overline{S}; \\ r^+(0,t) = -r^-(0,t),\ r^-(3,t) = r^+(3,t),\ t \in T, \end{gathered}$$

$$J(u) = -\frac{1}{2}\int_0^3 (r^-(s,1))^2 ds \longrightarrow \min .$$

Решения $r^\pm$ для $u = const$ легко вычисляются по правилу

$$r^+(s,t) = \begin{cases} ut, \ s \geq t, \\ (2s-t)u, \ s < t, \end{cases} \quad r^-(s,t) = ut, \ (s,t) \in \Pi.$$

В этом случае

$$J(u) = -\frac{3}{2}u^2.$$

Нетрудно догадаться, что оптимальным управлением здесь служит $u(s,t) \equiv 4$.

Проверим принцип максимума Понтрягина для очевидно неоптимального управления $u = -1$. Здесь функция Понтрягина $H = (\zeta^+ + \zeta^-)u$. Решение сопряженной задачи

$$\frac{d}{dt}(\zeta^\pm)_\pm = 0, \ \zeta^+(s,1) = 0, \ \zeta^-(s,1) = r^-(s,1) = -1,$$
$$\zeta^-(0,t) = -\zeta^+(0,t), \ \zeta^+(3,t) = \zeta^-(3,t)$$

имеет вид

$$\zeta^+(s,t) = \begin{cases} 0, \ s \leq t+2, \\ -1, \ s > t+2, \end{cases} \quad \zeta^-(s,t) = \begin{cases} -1, \ s \geq 1-t, \\ 0, \ s < 1-t, \end{cases} \quad (s,t) \in \Pi.$$

Принцип максимума Понтрягина для распределенного управления $u(s,t)$ эквивалентен условию

$$(\zeta^-(s,t) + \zeta^+(s,t))(\overline{u} - u(s,t)) \leq 0, \ \overline{u} \in [-1, 4],$$

которое в силу равенства

$$\zeta^-(s,t) + \zeta^+(s,t) = \begin{cases} 0, \ s < 1-t, \\ -1, \ 1-t \leq s \leq t+2, \quad (s,t) \in \Pi \\ -2, \ s > -2, \end{cases}$$

для управления $u(s,t) = -1$ справедливо всюду в П. Другими словами, управление $u(s,t) = -1$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина.

Обратимся теперь к вариационному принципу максимума. Семейство задач 1 в силу того, что ему соответствуют тривиальные значения $\zeta^\pm$, а функция φ не зависит от y, является вырожденным, т.е. формально данному семейству задач удовлетворяет любое допустимое управление.

Семейства задач 2-4, построенные для управления $u(s,t) = -1$, выглядит следующим образом

Задача 2.

$$I(\overline{u}) = \frac{1}{2}y^2(1) - \int\limits_0^\tau \overline{u}(t)dt - \int\limits_\tau^1 \overline{u}(t)dt \longrightarrow \max,$$

$$\dot{y} = \overline{u},\ y(0) = 0,\ t \in [0,\tau],$$

$$\dot{y} = \overline{u},\ y(\tau+0) = y(\tau),\ t \in [\tau,1].$$

$$\overline{u}(t) \in [-1,4],\ t \in [0,1],\ \tau \in (0,1).$$

Задача 3.

$$I(\overline{u}) = -\int\limits_0^1 \overline{u}(t)dt \longrightarrow \max,$$

$$\dot{y} = \overline{u},\ y(0) = 0,\ \overline{u}(t) \in [-1,4],\ \xi \in (2,3).$$

Задача 4.

$$I(\overline{u}) = \frac{1}{2}y^2(1) - \int\limits_0^1 \overline{u}(t)dt \longrightarrow \max,$$

$$\dot{y} = \overline{u},\ y(0) = 0,\ \overline{u}(t) \in [-1,4],\ t \in [0,1],\ \xi \in (0,2).$$

Очевидно, что управление $\overline{u}(t) = -1$ доставляет максимум целевому функционалу, а следовательно, не бракуется только в семействе задач 3. Однако в целом вариационный принцип максимума неоптимальное управление $u(s,t) = -1$ отвергает, т.к. во втором и четвертом семействах максимизирующим управлением является $\overline{u}(t) = 4$, а не проверяемое управление.

Таким образом, доказано, что вариационный принцип максимума является более сильным необходимым условием оптимальности, нежели принцип максимума конечномерный.

Список литературы

1. Рождественский Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. А. Яненко. — М.: Наука, 1978. — 687 с.
2. Терлецкий В. А. Обобщенное решение одномерных полулинейных гиперболических систем со смешанными условиями / В. А. Терлецкий // Изв. вузов. Математика. — 2004. — № 12. — С.75–83.
3. Терлецкий В. А. Обобщенное решение нелинейного волнового уравнения с нелинейными граничными условиями первого, второго и третьего родов / В. А. Терлецкий // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45. — № 3. — С. 403–415.
4. Васильев О. В. Методы оптимизации и их приложения. Ч.2. Оптимальное управление / О. В. Васильев, В. А. Срочко, В. А. Терлецкий. — Новосибирск: Наука, 1990. — 151 с.

5. Терлецкий В. А. Вариационный принцип максимума в управляемых системах одномерных гиперболических уравнений / В. А. Терлецкий //Изв. вузов. Математика. — 1999. — № 12. — С. 82–90.
6. Терлецкий В. А. Вариационный принцип максимума для полулинейных гиперболических систем со смешанными условиями / В. А. Терлецкий // Методы оптимизации и их приложения. — Иркутск, 2005. — С. 201–205.

V. A. Terletsky, E. A. Lutkovskaya

On optimization of nonlinear wave processes

Abstract. We present necessary optimality conditions in form of variational, classical and linearized maximum principles for the problem of optimal control of non-linear wave equation with nonlinear boundary conditions of first, second and third types.

Keywords: optimal control, wave equation, variational maximum principle.

Терлецкий Виктор Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952) 24-22-16, (terletsky@math.isu.ru)

Лутковская Екатерина Александровна, старший преподаватель, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952) 24-22-16, (elut@math.isu.ru)

Terletsky Viktor, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 professor, Phone: (3952) 24-22-16, (terletsky@math.isu.ru)

Lutkovskaya Ekaterina, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 professor, Phone: (3952) 24-22-16, (elut@math1.isu.ru)