Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 304—307

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
*Иркутского государственного университета*

УДК 518.977

# Численное решение задачи оптимального управления динамикой популяции на основе вариационного принципа максимума *

А. В. Букина
*Иркутский государственный университет*

**Аннотация.** Приводится алгоритм численного решения задачи оптимального управления интегро-дифференциальной моделью динамики популяции. Он основан на ранее полученном необходимом условия оптимальности в форме вариационного принципа максимума.

**Ключевые слова:** оптимальное управление интегро-дифференциальной системой, модель динамики популяции, вариационный принцип максимума.

Рассмотрим одну из версий интегро-дифференциальной модели динамики популяции, распределенной по адаптивным характеристикам [1]. В ней изменение численности особей $x = x(s,t)$ зависит от коэффициента рождаемости $r$, от конкуренции за ресурсы среды обитания $C(s,\xi)$ между особями с признаками $s$ и $\xi$, от емкости среды $K(s)$ и от внешнего воздействия $u = u(s,t) \in U = [0,1]$ (относительной скорости, например, вылова):

$$\begin{aligned} x_t = rx\Big(1 - \frac{y}{K(s)}\Big) - ux, \;\; x(s,0) = x^0(s), \\ y(s,t) = \int\limits_S C(s,\xi)x(\xi,t)d\xi, \end{aligned} \tag{1}$$

$s \in S = (s_0, s_1)$, $t \in T = (t_0, t_1)$. Будем искать кусочно-непрерывное управляющее воздействие u, доставляющее максимум функционалу

$$J(u) = \iint\limits_{TS} u(s,t)x(s,t)dsdt.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 08-01-98007-р_сибирь_а.

Решение интегро-дифференциальной системы (1) существует и единственно [2]. Сформулируем для исследуемой задачи необходимое условие оптимальности в форме вариационного принципа максимума [2]. Поскольку управление не входит в интегральное уравнение для фазового состояния $y$, данный принцип будет состоять только из одного семейства обыкновенных задач оптимального управления с параметром $\zeta \in S$. Пусть $(u^*; x^*, y^*)$ – оптимальный процесс, $(\psi^*, \theta^*)$ – соответствующее ему решение сопряженной задачи

$$\psi_t(s,t) = -H_x, \quad \psi(s,t_1) = 0, \quad \theta(s,t) = H_y, \tag{2}$$

где $H = H(\psi, \theta, x, y, u, s, t)$ – функция Понтрягина вида

$$H = \Big[\psi(f(y,s) - u) + A(\theta, s) + u\Big]x,$$

$f(y,s)$ и $A(\theta,s)$ – обозначения для $r(1 - y/K(s))$ и $\int\limits_S \theta(\xi,t)C(\xi,s)d\xi$ соответственно. Тогда управление $u^{\zeta *} = u^*(\zeta,t)$, $t \in T$ для каждого $\zeta \in S$ является решением задачи

$$J^\zeta(u) = \int\limits_T \Big(A(\theta^*, \zeta) + u^\zeta(t)\Big)x^\zeta(t)dt \to \max, \tag{3}$$

$$\dot{x}^\zeta = x^\zeta(t)\Big(f(y^*, \zeta) - u^\zeta(t)\Big), \quad x^\zeta(0) = x^0(\zeta), \ u(t) \in U.$$

Приведем схему нахождения управления $u^{k+1} = u^{k+1}(s,t)$, улучшающего допустимое управление $u^k = u^k(s,t)$, на основе данного условия. Пусть $x^k$, $y^k$, $\psi^k$, $\theta^k$ – решения фазовой и сопряженной задач (1), (2), соответствующие управлению $u^k$. Для каждого $\zeta \in S$ найдем вспомогательное управление $\bar{u}^{\zeta k}$ как решение задачи (3) при $y^* = y^k$, $\theta^* = \theta^k$. Это можно сделать аналитически, извлекая информацию о структуре решения из анализа соответствующих функции Понтрягина, фазовой и сопряженной задач. Очевидно, управление $\bar{u}^{\zeta k}(t)$ должно удовлетворять необходимому условию

$$H^{\zeta k}(\psi^{\zeta k}, x^{\zeta k}, \bar{u}^{\zeta k}, t) \geq H^{\zeta k}(\psi^{\zeta k}, x^{\zeta k}, u, t) \ \ \forall u \in U,$$
$$H^\zeta = \Big(\psi^\zeta(t)(f(y,\zeta) - u^\zeta(t)) + A(\theta,\zeta) + u^\zeta(t)\Big)x^\zeta(t),$$
$$\dot{\psi}^\zeta = -\psi^\zeta(t)(f(y,\zeta) - u^\zeta(t)) - A(\theta,\zeta) - u^\zeta(t), \quad \psi^\zeta(t_1) = 0.$$

В силу того что $x^\zeta(t) > 0$, управление, максимизирующее функцию $H^{\zeta k}$ , определяется знаком функции переключения $1 - \psi^{\zeta k}(t)$ и задается правилом

$$\bar{u}^{\zeta k}(t) = \begin{cases} 0, & \psi^{\zeta k}(t) > 1, \\ 1, & \psi^{\zeta k}(t) < 1, \\ [0,1], & \psi^{\zeta k}(t) = 1. \end{cases}$$

Так как $\psi^{\zeta k}(t_1) = 0$, то $\bar{u}^{\zeta k}(t) = 1$ на интервале $(\tau, t_1)$, $\tau$ – точка переключения: $\psi^{\zeta k}(\tau) = 1$. Слева от $\tau$ управление может быть особым или принимать одно из граничных значений. Если существует особый участок, на нем функция переключения должна быть равна нулю вместе со своей производной. Из сопряженной задачи для $\psi^{\zeta k}$ получаем $f(y^k, \zeta) = -A(\theta^k, \zeta)$. Поэтому, если в точке $\tau$ и на некотором интервале левее от нее выполняется данное тождество, то $\psi^{\zeta k}(t)$ равна единице на этом интервале. Управление на особом участке может быть любым. Если выбирать его из условия постоянства траектории, получим $\bar{u}^{\zeta k}(t) = f(y^k, \zeta)$. Левее особого участка или, если такого нет, левее точки $\tau$ знак $1 - \psi^{\zeta k}(t)$ и, соответственно, значение управления $\bar{u}^{\zeta k}(t)$ будут определяться знаком суммы $f(y^k, \zeta) + A(\theta^k, \zeta)$. Проводя описанный анализ от $t_1$ до 0, возможно определить поведение $\bar{u}^{\zeta k}(t)$ на всем интервале. Найдя $\bar{u}^{\zeta k}(t)$ для всех $\zeta \in S$, подсчитаем невязку $W_k(\zeta)$ и ее среднее значение $\mu_k$ :

$$W_k(\zeta) = J^\zeta(\bar{u}^{\zeta k}) - J^\zeta(u^k), \quad \mu_k = \int\limits_S W_k(\zeta) d\zeta / (s_1 - s_0).$$

Если $\mu_k = 0$, то управление $u^k$ удовлетворяет вариационному принципу максимума (3). Иначе ($\mu_k > 0$) построим $u^{k+1}$ на основе метода последовательных приближений. Введем множество $S_\varepsilon^k \subset S$, $mes S_\varepsilon^k = \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Положим

$$u^{k+1}(\zeta, t) = \begin{cases} \bar{u}^{\zeta k}(t), & \zeta \in S_\varepsilon^k, \ t \in T, \\ u^k(\zeta, t), & \zeta \in S \setminus S_\varepsilon^k, \ t \in T. \end{cases}$$

Условия

$$\varepsilon_k : \min_{\varepsilon_k \in (0.1)} J(u^k_{\varepsilon_k}), \quad S_\varepsilon^k : \int\limits_S W_k(\zeta) d\zeta \geq N \mu_k^\sigma \varepsilon, \ N > 0, \ \sigma \geq 1$$

обеспечивают релаксационность и сходимость в смысле $\mu_k \to 0$, $k \to \infty$ последовательности $\{u^k\}$. Способы построения множества $S_\varepsilon^k$, удовлетворяющего определяющему неравенству, можно найти в [3]. Описанный алгоритм был опробован с использованием следующих параметров модели:

$$T = [0, 10], \ S = [0.5, 1.5], \ x^0(s) = 1, \ r = 1,$$

$$K(s) = \frac{100}{0.5\sqrt{2\pi}} exp\Big[-\frac{(s-1)^2}{2 * 0.5^2}\Big], \quad C(s, \xi) = \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} exp\Big[-\frac{(s-\xi)^2}{2 * 0.5^2}\Big].$$

Для сравнения были применены также двухпараметрический метод на основе сильной и слабой вариаций управления и метод условного градиента. Во всех трех случаях функционал сходится к одному значению (примерно 170), и полученные управления имеют сходную структуру: в начале интервала они принимают значение 0, затем примерно 0,5 и на конечном отрезке 1, что, очевидно, можно интерпретировать как отказ от вылова в начальный период времени, чтобы позволить особям размножиться, затем поддержание его на некотором магистральном уровне и вылов всех особей на конечном этапе. При реализации методов экспериментально подбирались значения их параметров, обеспечивающие наибольшую скорость сходимости с критерием остановки – заданным значением $\theta^k$ близким к нулю. Самым эффективным оказался метод вариационного принципа максимума: 57 задач Коши, двухпараметрический метод – 65, метод условного градиента – 110.

## Список литературы

1. Семовский С. В. Видообразование в одномерной популяции: адаптивная динамика и нейтральная эволюция / С. В. Семовский, Ю. С. Букин, Д. Ю. Щербаков // Исследовано в России. — 2002. (http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/125.pdf).
2. Терлецкий В. А. Вариационный принцип максимума в задаче оптимального управления интегро-дифференциальной системой / В. А. Терлецкий, А. В. Букина // Вестник Бурятского университета. Серия 13: Математика и информатика, 2008. — Вып. 9. — С. 52–55.
3. Васильев О. В. Методы оптимизации и их приложения. Ч.2. Оптимальное управление / О. В. Васильев, В. А. Срочко, В. А. Терлецкий. — Новосибирск: Наука, 1990. — 151 с.

---

**A. V. Bukina**

**Numerical method for optimal control problem of a population dynamics model on the base of variational maximum principle**

**Abstract.** Numerical solution for optimal control problem of an integro-differential population dynamics model is considered. It is based on necessary optimality condition in the form of variational maximum principle, that was deduced earlier.

**Keywords:** optimal control for integro-differential system; population dynamics model; variational maximum principle

Букина Анна Викторовна, инженер НИЧ, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, (annabukina@mail.ru)

Bukina Anna, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003, (annabukina@mail.ru)