Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 207—220

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

Метод внутренних точек в линейной оптимизации *

В. И. Зоркальцев
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск

Аннотация. Приводятся новые результаты в исследовании алгоритмов внутренних точек. Высказывается предположение о целесообразности обучения в базовых курсах университета для математиков и экономистов методу внутренних точек наряду с симплекс-методом.

Ключевые слова: линейное программирование, линейные неравенства, метод внутренних точек.

1. Введение

В 1972 г. на заседании специализированного Совета математического факультета Иркутского госуниверситета, возглавляемого профессором В.В. Васильевым, была защищена кандидатская диссертация И.И. Дикина [1] „Решение задачи линейного программирования и некоторых ее обобщений методом внутренних точек“, которая была выполнена в Сибирском энергетическом институте. Научный руководитель – академик, лауреат Нобелевской премии Л.В. Канторович. Один из оппонентов – доктор физико-математических наук, ныне академик, директор ЦЭМИ РАН В.Л. Макаров.

Длительное время представленные в диссертации И.И. Дикина алгоритмы внутренних точек активно развивались в России – в ВЦ АН СССР (в работах академика Ю.Г. Евтушенко, ныне директора ВЦ РАН и доктора физико-математических наук В.Г. Жадана [2]– [4] и в СЭИ СО АН СССР (ныне ИСЭМ СО РАН), где эти алгоритмы использовались при реализации нескольких моделей энергетики [5]–[7]. К настоящему времени получен ряд важных результатов в усовершенствовании и теоретическом обосновании алгоритмов внутренних точек как в ВЦ

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-01-00306а.

РАН, так и в ИСЭМ СО РАН. В частности, были разработаны полиномиальные алгоритмы внутренних точек для задач линейного программирования с наилучшими в настоящее время оценками максимально требуемого времени для получения решения [8]. Уместно отметить, что новые разработки алгоритмов внутренних точек, их экспериментальные исследования на моделях энергетики были представлены в кандидатской диссертации сотрудника ИСЭМ СО РАН А.Ю. Филатова [9], защищенной в 2001 г. на Совете ИМЭ ИГУ, возглавлявшимся профессором О.В. Васильевым.

В середине 80-х годов к алгоритмам внутренних точек возник повышенный интерес во всем мире. Были опубликованы тысячи работ в разных странах. К настоящему времени создано большое количество пакетов программ, реализующих метод внутренних точек. В итоге многих экспериментальных исследований было показано, что метод внутренних точек может быть более эффективным, чем широко используемый симплекс-метод.

В настоящее время в ИМЭИ ИГУ введено факультативное обучение алгоритмам метода внутренних точек в рамках курса по выбору. В частности, эти алгоритмы представлены в пособии по линейным неравенствам [10]. Одна из целей данной статьи состоит в пропаганде двух взаимосвязанных предложений по коррекции учебных планов по специальностям „Прикладная математика и информатика“ и „Математические методы в экономике“: 1) целесообразности введения курса „Теория линейных неравенств“, составной частью чего могла бы быть теория линейного программирования; 2) целесообразности введения в программу обучения алгоритмов внутренних точек наряду с традиционно изучаемым симплекс-методом.

2. Некоторые свойства задач линейного программирования

Особое место в линейном программировании занимают теоремы двойственности. Они служат теоретическим фундаментом для всей теории линейного программирования, являются основой для разработки и обоснования алгоритмов оптимизации, играют большую роль при экономической интерпретации получаемых решений. Ниже приводится теорема, содержащая основные факты теории двойственности линейного программирования даже в несколько большем объеме, чем обычно дается в учебниках по линейному программированию. А именно, в приводимой здесь теореме представлены конструктивные критерии для выявления случаев отсутствия решений и для выявления относительно внутренних точек оптимальных решений. Причем доказательство этой теоремы легко осуществить, как это продемонстрировано в [10], на базе теорем об альтернативных системах линейных неравенств, являющихся обобщением на линейные неравенства известной теоремы об альтернативах Фредгольма для систем линейных уравнений. Это иллюстрирует идею целесообразности изложения линейного программирования в виде составной части теории и алгоритмов решения систем линейных неравенств, которую в свою очередь целесообразно рассматривать как развитие и обобщение теории и алгоритмов решения систем линейных уравнений.

Рассмотрим взаимно-двойственные задачи линейного программирования:

$$c^T x \to \min,\ x \in X, \tag{2.1}$$

$$b^T u \to \max,\ u \in U, \tag{2.2}$$

где

$$X = \{x \in R^n:\ Ax = b,\ x \geq 0\},$$

$$U = \{u \in R^m:\ g(u) \geq 0\}.$$

Здесь

$$g(u) = c - A^T u$$

– линейная вектор-функция с компонентами $g_j(u), j = 1, \ldots, n$. Переменные задач (2.1), (2.2) составляют векторы $x \in R^n, u \in R^m$ при некоторых $n \geq 1, m \geq 1$. Заданными являются векторы $c \in R^n,\ b \in R^m$, матрица A размера $m \times n$.

Векторы из $X,\ U$ будем называть допустимыми решениями задач (2.1), (2.2). Множество оптимальных решений этих задач обозначим

$$\overline{X} = Arg\min\left\{c^T x : x \in X\right\},$$

$$\overline{U} = Arg\max\left\{b^T u : u \in U\right\}.$$

Задачу (2.1) будем называть исходной задачей линейного программирования, задачу (2.2) – двойственной задачей линейного программирования.

Введем множества рецессивных направлений задач (2.1), (2.2):

$$\tilde{X} = \left\{s \in R^n:\ As = 0,\ s \geq 0,\ c^T s < 0\right\},$$

$$\tilde{U} = \left\{v \in R^m:\ A^T v \leq 0,\ b^T v > 0\right\}.$$

Множество $\tilde{X}$ состоит из направлений неограниченного убывания целевой функции задачи (2.1), не выводящих из множества ее допустимых решений. Если $x \in X,\ s \in \tilde{X}$, то вектор $x(\lambda) = x + \lambda s$ будет находиться в X при любом $\lambda \geq 0$ и $c^T x(\lambda) \to -\infty$ при $\lambda \to \infty$. Соответственно $\tilde{U}$ – множество направлений неограниченного возрастания целевой функции задачи (2.2), не выводящих из области ее допустимых решений.

Множества $\tilde{X}$, $\tilde{U}$ полезны для конструктивного выявления случаев несовместности ограничений задач (2.1), (2.2). Согласно теоремам об альтернативных системах линейных неравенств (см., например, [10, 11]) одно и только одно из двух множеств $X, \tilde{U}$ пусто. Это утверждение принято называть теоремой Фаркаша [11]. Таким образом, если найдется вектор $v \in \tilde{U}$, то, тем самым, будет установлена противоречивость ограничений задачи (2.1).

Также согласно теоремам об альтернативных системах линейных неравенств одно и только одно из множеств $U, \tilde{X}$ пусто. Это утверждение принято называть теоремой Гейла [11]. Поэтому, если найдется вектор $s \in \tilde{X}$, то, тем самым, будет установлена противоречивость ограничений задачи (2.2). С учетом этих фактов приходим [10] к следующей основополагающей теореме в линейном программировании.

Теорема 1. *Для задач (2.1), (2.2) возможны два случая.*

1. Хотя бы одна из задач не имеет допустимых решений. Тогда обе задачи не имеют оптимальных решений $\overline{X} = \emptyset$, $\overline{U} = \emptyset$. *Возможны три ситуации*

1.1 $X = \emptyset, U = \emptyset$. *Тогда и только тогда*

$$\tilde{X} \neq \emptyset, \tilde{U} \neq \emptyset. \tag{2.3}$$

1.2. $X = \emptyset, U \neq \emptyset$. *Тогда и только тогда*

$$\tilde{X} = \emptyset, \tilde{U} \neq \emptyset. \tag{2.4}$$

1. 3. $X \neq \emptyset, U = \emptyset$. *Тогда и только тогда*

$$\tilde{X} \neq \emptyset, \tilde{U} = \emptyset. \tag{2.5}$$

2. Обе задачи имеют допустимые решения $X \neq \emptyset, U \neq \emptyset$. *В этом и только этом случае они имеют оптимальные решения* $\overline{X} \neq \emptyset, \overline{U} \neq \emptyset$ *и*

$$\tilde{X} = \emptyset, \tilde{U} = \emptyset. \tag{2.6}$$

Для любых $x \in X$, $u \in U$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j g_j(u) \geq 0. \tag{2.7}$$

Для любых $x \in \overline{X}$, $u \in \overline{U}$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j g_j(\bar{u}) = 0. \tag{2.8}$$

Существуют $x \in \overline{X}$, $u \in \overline{U}$ *такие, что*

$$(\bar{x}_j + g_j(\bar{u})) > 0, \ j = 1, \ldots, n. \tag{2.9}$$

Условия (2.7), (2.8) позволяют выделять оптимальные решения из допустимых. Соотношение (2.8) принято называть условием дополняющей нежесткости. Выполнение обоих соотношений (2.8), (2.9) означает выполнение условий дополняющей нежесткости в строгой форме.

Для выпуклого множества Y подмножество его относительно внутренних точек, следуя Рокафеллару [12], будем обозначать riY. Область riY состоит из внутренних точек Y относительно минимального линейного многообразия, содержащего Y. Если Y – множество решений системы линейных неравенств, то подмножество riY состоит из решений системы с минимальным набором активных ограничений [10]. Выполнение для векторов $x \in X$, $u \in U$ условий дополняющей нежесткости в строгой форме, т.е. соотношений (2.8), (2.9) означает, что эти векторы имеют максимальные наборы неактивных ограничений среди всех оптимальных решений исходной и двойственной задач линейного программирования. Следовательно, в этом и только этом случае $x \in ri\overline{X}, u \in ri\overline{U}$.

Рассматриваемые далее алгоритмы внутренних точек позволяют получать именно относительно внутренние точки множества оптимальных решений, что очень полезно во многих приложениях. Например, это позволяет эффективно описывать множество оптимальных решений. Если имеем произвольное оптимальное решение задачи (2.1) $\bar{x} \in \overline{X}$, то множество оптимальных решений задается путем добавления к ограничениям задачи одного ограничения, фиксирующего на оптимальном уровне значение целевой функции:

$$\overline{X} = \{x \in R^n : Ax = b,\ (c, x) = (c, \bar{x}),\ x \geq 0\}.$$

Если же известно, что полученное решение является относительно внутренней точкой множества оптимальных решений, то для описания множества оптимальных решений нет необходимости вводить дополнительное ограничение. При $\bar{x} \in ri\overline{X}$ множество $\overline{X}$ определяется следующим образом

$$\overline{X} = \{x \in R^n : Ax = b,\ x \geq 0, \bar{x}_j = 0,\ j \in J_0(\bar{x})\},$$

где $J_0(\bar{x})$ – множество номеров компонент вектора $\tilde{x}$, имеющих нулевые значения. Таким образом просто исключаются из рассмотрения компоненты вектора переменных x, имеющие у вектора $\tilde{x}$ нулевые значения. Такое описание множества оптимальных решений более удобно, чем приведенное ранее описание, так как не увеличивается набор ограничений равенств и при этом сокращается набор переменных. В частности, такое представление очень полезно для решения многокритериальных задач лексикографической оптимизации, в которых из множества $\overline{X}$ требуется выбирать решение, оптимальное по какому-то дополнительному критерию.

Условия (2.3)–(2.6) могут служить в качестве конструктивных критериев для выявления случая отсутствия оптимальных решений. Для этого достаточно установить, что вырабатываемые в процессе решения соответствующие векторы находятся в $\overline{X}$ или в $\overline{U}$, что будет означать непустоту $\tilde{X}$ или $\tilde{U}$ и в силу (2.3)–(2.5) отсутствие оптимальных решений у задач (2.1), (2.2).

3. Методика Л.В. Канторовича формирования цен при неоптимальном плане

У истоков разработок рассматриваемых ниже алгоритмов внутренних точек находилась идея Л.В. Канторовича оценки методом наименьших квадратов приближенного решения двойственной задачи при неоптимальном плане исходной задачи. Эту идею Л.В. Канторович предложил для исследования аспиранту И.И. Дикину применительно к проблеме формирования рентных оценок сельскохозяйственных земель. Эта идея Канторовича представляет и самостоятельный интерес.

Если задача (2.1) является моделью выбора интенсивностей технологий $x_j,\ j = 1, \ldots, n$, производящих и использующих ресурсы в заданных объемах $b_i, i = 1, \ldots, m$, то задача (2.2) будет моделью определения „объективно обусловленных оценок“ ресурсов $u_i, i = 1, \ldots, m$, интерпретируемых как цены оптимального плана (или более романтично как „цены, зовущие к оптимуму“). Большую роль в такой экономической интерпретации взаимосвязей исходной и двойственной задач линейного программирования играют условия дополняющей нежесткости (2.8).

По каким-то причинам, в том числе например из-за несовершенства линейной детерминированной модели, может быть выбран неоптимальный для задачи (2.1) план. Для случая, когда принятое решение $\tilde{x} \in X$ неоптимально, Л.В. Канторович предложил методику формирования приближенных оценок ресурсов, основанную на минимизации суммы квадратов отклонений в условиях дополняюшей нежесткости (2.8). А именно, он рассматривал проблему формирования квазирациональной системы рентных оценок земель для задачи планирования земледелия.

Пусть $\tilde{x_j} > 0$ для $j = 1, \ldots, n$. Для такого решения было предложено вектор оценок ресурсов $\tilde{u} \in R^m$ определять как результат решения задачи

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j \left(g_j(u)\right)^2 \to \min,\ u \in R^m.$$

Как видим, если интенсивность технологии j невелика, величина $\tilde{x}_j$ близка к нулю, то компонента j будет играть меньшую роль в формировании вектора цен $\tilde{u}$. Существенную роль будут играть компоненты $\tilde{x}_j$, сильно отличающиеся от нуля.

Если вектор $\tilde{x}$ был неоптимальным решением задачи (2.1), то у вектора $g(\tilde{u})$ будут как положительные, так и отрицательные компоненты. По экономическим соображениям, если $-g_j(\tilde{u}) > 0$, то технология j имеет положительную эффективность. В этом случае в целях уменьшения затрат $c^T x$ следует увеличивать интенсивность использования технологии j. Если $-g_j(\tilde{u}) < 0$, то технология j имеет отрицательную рентабельность и интенсивность ее использования целесообразно сократить.

На основе приведенных соображений можно убедиться, что вектор $s \in R^n$ с компонентами $\tilde{s}_j = -\tilde{x}_j g_j(\tilde{u})$ будет направлением уменьшения значения целевой функции задачи (2.1), т.е. $c^T \tilde{s} < 0$. При этом в силу известных свойств метода наименьших квадратов выполняется равенство $A\tilde{s} = 0$. Поэтому из равенства $A\tilde{x} = b$ следует, что $A(x+\lambda s) = b$ при любом вещественном λ. Это позволяет использовать вектор $\tilde{s}$ в качестве направления улучшения решения $\tilde{x}$.

В изложенной методике при формировании решения двойственной задачи могут использоваться и другие способы задания весов, вместо весов, равных $\tilde{x}_j$. Главное, чтобы эти веса стремились к нулю с уменьшением значения $\tilde{x}_j$. В частности, такую же роль могут играть квадраты интенсивностей, т.е. веса равные $(\tilde{x}_j)^2$.

4. Оптимизация в области допустимых решений

Задано исходное приближение $x^0 \in riX$. Считаем, что все компоненты векторов из riX положительные, $x_j^0 > 0$ для $j = 1, \ldots, n$. В излагаемом вычислительном процессе вырабатывается последовательность векторов $x^k \in riX$ по правилу

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k, \; k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.1}$$

Здесь s^k – вектор R^n направления корректировки решения, λ_k – положительная величина шага корректировки на итерации k.

Пусть имеется некоторый способ определения весовых коэффициентов $d_j^k > 0, \; j = 1, \ldots, n$, при котором выполняются неравенства

$$\overline{\sigma}(x_j^k) \geq d_j^k \geq \underline{\sigma}(x_j^k), \; j = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Здесь $\overline{\sigma}, \; \underline{\sigma}$ – функции от положительного аргумента, удовлетворяющие условиям

$$\infty \geq \overline{\sigma}(\alpha) \geq \underline{\sigma}(\alpha) > 0, \; \forall \alpha > 0, \tag{4.3}$$

$$M\alpha \geq \overline{\sigma}(\alpha), \; \forall \alpha \in (0, \epsilon) \tag{4.4}$$

при некоторых $M > 0, \epsilon > 0$.

Поскольку существует много различных правил задания весовых коэффициентов, удовлетворяющих условиям (4.2) – (4.4), то излагаемый вычислительный процесс можно рассматривать как семейство алгоритмов. Особо выделим подмножество алгоритмов, для которых выполняется более сильное, чем (4.4) условие: при некоторых $\epsilon > 0, M > 0$ для всех $\alpha > 0, \beta > 0$ таких что $\alpha/\beta \leq \epsilon$ справедливо неравенство

$$\overline{\sigma}(\alpha)/\underline{\sigma}(\beta) \leq M(\alpha/\beta). \tag{4.5}$$

Из этого подмножества выделим еще более узкий набор алгоритмов, для которых при изменяющихся $\alpha > 0, \beta > 0$

$$\overline{\sigma}(\alpha)/\underline{\sigma}(\beta) \to 0 \text{ если } \alpha/\beta \to 0. \tag{4.6}$$

Пусть d^k – вектор R^n с компонентами $d_j^k, D_k = diag d^k$ – диагональная матрица порядка n, образованная вектором d^k. Вектор s^k определяется как результат решения вспомогательной задачи минимизации квадратичной функции от вектора переменных $s \in R^n$ при линейных ограничениях-равенствах:

$$s^k = arg\min\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j s_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{(s_j)^2}{d_j^k} : As = 0\right\}. \tag{4.7}$$

Используя для этой задачи метод множителей Лагранжа, получаем

$$s^k = -D_k g^k, \tag{4.8}$$

где

$$g^k = g(u^k), \tag{4.9}$$

$$u^k = arg\min\left\{\Phi_k(u) : u \in R^m\right\}. \tag{4.10}$$

Здесь

$$\Phi_k(u) = (g(u^k))^T D_k g(u^k) \tag{4.11}$$

– квадратичная выпуклая функция от вектора $u \in R^m$.

Заметим, что вычисляемое по указанным правилам направление корректировки решения будет нулевым вектором в том и только том случае, если любое допустимое решения является оптимальным, т.е. если $\overline{X} = X$. Это выявляется сразу на исходной итерации. Далее считаем, что $\overline{X} \neq X$ и, следовательно, $s^k \neq 0$. Это будет направлением улучшения решения, для которого $c^T s^k < 0$.

Шаг корректировки решения вычисляется по правилу

$$\lambda_k = \max\left\{\lambda : x^k + \lambda_k s^k \geq (1-\gamma_k)x^k\right\}, \tag{4.12}$$

где γ_k – параметр из интервала $[\gamma, 1)$ при некотором $\gamma \in (0,1)$. По указанному правилу нельзя вычислить шаг корректировки при $s^k \neq 0$

в том и только том случае, если $s^k \geq 0$. Поскольку $c^T s^k < 0$, то $s^k \in \tilde{X}$ и согласно теореме 1 у задач (2.1), (2.2) нет оптимальных решений.

Условие невырожденности. Вектор $x \in X$ назовем стационарным решением задачи (2.1), если при некотором $u \in R^m$ для него выполняется соотношение (2.8). Задачу (2.1) будем называть невырожденной, если для любого ее стационарного решения существует единственный вектор $u \in R^m$, при котором выполняется (2.8).

Анонсируемое ниже утверждение является развитием теорем, доказанных в [7].

Теорема 2. *Пусть $\overline{X} \neq \emptyset, \overline{X} \neq X$, задача (2.1) невырожденная. Тогда существуют векторы $\bar{x} \in ri\overline{X}, \bar{u} \in ri\overline{U}$ такие, что*

$$x^k \to \bar{x},\ u^k \to \bar{u} \text{ при } k \to \infty.$$

Если при определении весовых коэффициентов d_j^k выполняется условие (4.5), то $\bar{x} \in ri\overline{X}$, при некоторых $M_1 > 0, M_2 > 0, M_3 > 0, \alpha \in (0,1)$

$$\left\| u^k - \bar{u} \right\| \leq M_1 L_k, \tag{4.13}$$

$$L_k \leq M_2 T_k, \tag{4.14}$$

$$\left\| x^k - \bar{x} \right\| \leq M_3 T_k, \tag{4.15}$$

где

$$L_k = \max\left\{ d_j^k : j \in J_0(\bar{x}) \right\},\ T_k = \max\left\{ x_j^k : j \in J_0(\bar{x}) \right\}, \tag{4.16}$$

$J_0(\bar{x})$ – множество номеров нулевых компонент вектора $\bar{x}$.

Если при определении весовых коэффициентов d_j^k выполняется условие (4.6), то

$$\lambda_k \to \infty \text{ при } k \to \infty \tag{4.17}$$

и для некоторого $M_4 > 0$

$$T_{k+q+1} \leq M_4 T_k \max\left\{ (1-\gamma_\tau) : \tau \in \{k, \dots, k+q\} \right\}. \tag{4.18}$$

5. Обсуждение

Весовые коэффициенты, в частности, можно определять в виде функций от значений компонент вектора переменных. Тогда

$$d_j^k = \sigma(x_j^k),\ j = 1, \dots, n,\ k = 0, 1, 2, \dots, \tag{5.1}$$

где σ – функция от положительного аргумента. В этом случае функции $\overline{\sigma}$, $\underline{\sigma}$ будут совпадать с σ.

Конкретизацией (5.1) будет следующее правило вычисления весовых коэффициентов

$$d_j^k = (x_j^k)^p, \ j = 1, \ldots, n, \ k = 0, 1, \ldots \tag{5.2}$$

при заданном $p \geq 1$. При $p = 1$ выполняется условие (4.5). При $p > 1$ выполняется условие (4.6).

Наиболее известным является алгоритм внутренних точек с правилом вычисления весовых коэффициентов (5.2) при $p = 2$. Если при этом используется следующее правило вычисления шага

$$\lambda_k = \Big(\Phi_k(u^k)\Big)^{1/2},$$

то получим алгоритм внутренних точек Дикина [1]. Для такого алгоритма им было доказано при предположении о невырожденности задачи (2.1), что вырабатываемые векторы x^k сходятся линейно к точке из $ri\overline{X}$, если $\overline{X} \neq \emptyset$ [13]. При этом установлена линейная сходимость векторов u^k к оптимальному решению задачи (2.2).

Условия (4.3) позволяют использовать правила вычисления весовых коэффициентов, при которых эти коэффициенты не выражаются в виде функции от значений переменных x_j^k. При этом не обязательно даже иметь конкретные выражения для функций $\overline{\sigma}$ и $\underline{\sigma}$. Достаточно иметь доказательство существования таких функций и указанных их свойств. В частности, как показывают теоретические и экспериментальные исследования [7], [14], эффективны следующие правила выбора весовых коэффициентов для $k \geq 1$

$$d_j^k = \frac{x_j^k}{\max\left\{\epsilon, q_j^{k-1}\right\}}, \ j = 1, \ldots, n, \ \text{при} \ \ k = 1, 2, \ldots \tag{5.3}$$

при заданном $\epsilon > 0$. При этом выполняются условия (4.3) – (4.5).

Согласно теореме 2 для сходимости вычислительного процесса к оптимальному решению может быть достаточно выполнения при определении весовых коэффициентов только условия (4.4). Вместе с тем, чтобы гарантировать возможность достижения линейной скорости сходимости и получения относительно внутренней точки оптимальных решений, желательно выполнение условия (4.5).

Выполнение условия (4.6) позволяет надеяться на возможность достижения сверхлинейной скорости сходимости. Если значения параметра γ_k возрастают по итерациям и $\gamma_k \to 1$ при $k \to \infty$, то в силу (4.18) получим сверхлинейную скорость сходимости к нулю последовательности величин T_k

$$T_{k+q+1}/T_k \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Из (4.13) – (4.15) следует, что в этом случае будет сверхлинейная скорость сходимости к нулю последовательности величин $\left\|x^k - \bar{x}\right\|$ и $\left\|u^k - \bar{u}\right\|$.

Отметим еще одно важное свойство алгоритмов, удовлетворяющих условию (4.6). В этом случае

$$\frac{\left\|u^k - \bar{u}\right\|}{\|x^k - \bar{x}\|} \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{5.4}$$

Действительно, из (4.6) следует, что

$$T_k/L_k \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Так как $\left\|x^k - \bar{x}\right\| \geq T_k$, то из (4.13) – (4.15) получаем (5.4). Соотношение (5.4) означает, что векторы двойственных переменных u^k быстрее сходятся к своему оптимальному значению, чем векторы переменных исходной задачи x^k к оптимальному значению $\bar{x}$ задачи (2.1). Соотношение (5.4) теоретически подтверждает давно установленную эмпирическими наблюдениями более быструю сходимость векторов u^k к решению задачи (2.2), чем векторов x^k к решению задачи (2.1) для алгоритмов внутренних точек с весовыми коэффициентами (5.2) при $p = 2$. Отсюда вытекает одна важная рекомендация: если требуется получить быстрее решение исходной задачи (2.1) с заданной точностью, то лучше воспользоваться двойственными алгоритмами внутренних точек, осуществляющих итеративное монотонное улучшение решений по переменным двойственной задачи линейного программирования (2.2). Варианты двойственных алгоритмов внутренних точек, введенные в [14], подробно рассмотрены в [8].

Алгоритмы, удовлетворяющие условию (4.6), обладают не только дополнительными достоинствами по сравнению с алгоритмами, удовлетворяющими условию (4.5), но и одним существенным недостатком. Согласно (4.17) шаг улучшения решения неограниченно возрастает по итерациям, поэтому такие алгоритмы очень чувствительны к неизбежным погрешностям в решении вспомогательной задачи.

Поясним это. Пусть в начале k-ой итерации условие $Ax^k = b$ выполняется точно. При вычислении направления корректировки решения вместо условия $As^k = 0$ имеем $As^k = \Delta^k$, где Δ^k – вектор R^n, отражающий погрешности в решении вспомогательной задачи. Тогда после итеративного перехода для вектора x^{k+1} получим следующее выражение вектора невязок ограничений-равенств задачи (2.1)

$$A(x^k + \lambda_k s^k) - b = \lambda_k \Delta^k.$$

При увеличении λ_k малые абсолютные значения компонент вектора Δ^k будут приводить ко все большим нарушениям ограничений-равенств.

Этот факт действительно отмечается в расчетах по алгоритму внутренних точек с весовыми коэффициентами (5.2) при $p = 2$.

В этом отношении, как показывают теория и расчеты, преимущество имеет алгоритм с весовыми коэффициентами (5.2) при $p = 1$. Для такого алгоритма величина шага ограничена сверху: при $k \to \infty$

$$\lambda_k/\gamma_k \to 1/\max\{g_j(\bar{u}) : j \in J_0(\bar{x})\}.$$

Вместе с тем, такой алгоритм существенно уступает по скорости сходимости (времени счета) алгоритму с $p = 2$.

В этом отношении интерес представляет алгоритм внутренних точек с весовыми коэффициентами (5.3). Для такого алгоритма (при достаточно малом ϵ), как показано в [14] при условии невырожденности задачи (2.1), при $k \to \infty$

$$\lambda_k/\gamma_k \to 1.$$

Поэтому шаг ограничен сверху на всех итерациях. Этот алгоритм более устойчив к погрешностям решения вспомогательной задачи, что подтверждают экспериментальные расчеты. При этом имеет место хорошая скорость сходимости к решению, которая отмечается в экспериментальных расчетах и полученных теоретических оценках.

В [15] для данного алгоритма при условии невырожденности задачи (2.1) было доказано, что

$$\frac{\left\|x^{k+1} - \bar{x}\right\|}{\|x^k - \bar{x}\|} = O(1 - \gamma_k + O(\left\|x^k - \bar{x}\right\|)).$$

Это означает возможность достижения сверхлинейной скорости сходимости при $\gamma_k \to 1$ для $k \to \infty$.

Следует отметить еще одно направление повышения вычислительной эффективности алгоритмов метода внутренних точек за счет использования интервального определения весовых коэффициентов (4.3). Основной вычислительно проблемой в реализации алгоритма является решение на каждой итерации вспомогательной задачи поиска направления улучшения решения. Проблема определения s^k сводится к решению задачи безусловной минимизации квадратичной функции $\Phi_k(u)$ для определения вектора u^k. Стандартный путь состоит в том, что сначала задается вектор d^k, затем решается задача поиска вектора u^k. В таком случае вспомогательная задача сводится в результате приравнивания градиента $\Phi_k(u)$ нулевому вектору к решению системы линейных уравнений с симметричной неотрицательно определенной матрицей.

Можно воспользоваться иным путем – одновременно с поиском вектора u^k уточнять значения компонент вектора d^k из заранее заданных диапазонов их возможных значений с тем, чтобы ускорить процесс поиска u^k, доставляющего минимум функции Φ_k. Такой способ решения вспомогательной задачи одновременно с подбором минимизируемой функции Φ_k может быть эффективен при использовании итеративных методов решения вспомогательной задачи (4.10).

Замечание 1. Изложенный в разделе 4 вычислительный процесс требует особого исходного приближения. Для получения исходного приближения x^0 из riX можно воспользоваться одним из вариантов рассмотренных выше алгоритмов, приводящих к относительно внутренним точкам оптимальных решений. Для этого можно взять любой вектор $y \in R^n$ с положительными всеми компонентами, $y_j > 0$ для $j = 1, \dots, n$. Вычислим вектор невязок

$$r = b - Ay,$$

а затем решаем задачу линейного программирования с $n + 1$-ой переменной:

$$\alpha \to \min$$

при ограничениях

$$Ax + \alpha r = b,\ x \geq 0, \alpha \geq 0.$$

Вектор $x = y$ и значение $\alpha = 1$ могут служить начальным приближением для процесса оптимизации в области допустимых решений этой задачи алгоритмом внутренних точек. Если полученное решение $\tilde{x}, \tilde{\alpha}$ данной задачи будет относительно внутренней точкой множества ее оптимальных решений и $\tilde{\alpha} = 0$, то вектор $\tilde{x}$ будет находиться в riX и может служить исходным приближением для процесса оптимизации в области допустимых решений задачи (2.1). В процессе решения указанной задачи ввода в область допустимых решений могут в результате выявления ситуации $\tilde{U} \neq \emptyset$ на основе условий (2.3), (2.4) определяться случаи несовместности ограничений задачи (2.1).

Список литературы

1. Дикин И. И. Решение задачи линейного программирования и некоторых ее обобщений методом внутренних точек: автореф. дис. ... к-та физ.-мат. наук / И. И. Дикин. — Иркутск: ИГУ, 1972.
2. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации / Ю. Г. Евтушенко. — М.: Наука, 1982.
3. Евтушенко Ю. Г. Релаксационный метод решения задач нелинейного программирования / Ю. Г. Евтушенко, В. Г. Жадан // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 1977. — Т. 17, № 4. — С. 890–904.
4. Жадан В. Г. Метод Ньютона с наискорейшим спуском для задач линейного программирования / В. Г. Жадан. — М.: ВЦ РАН, 1997.
5. Дикин И. И. Итеративное решение задач математического программирования (алгоритмы метода внутренних точек) / И. И. Дикин, В. И. Зоркальцев. — Новосибирск: Наука, 1980.

6. Дикин И. И. Применение метода внутренних точек при решении прикладных оптимизационных задач / И. И. Дикин // Методы оптимизации и их приложения. — Иркутск: СЭИ СО РАН, 1988. — С. 14–17.
7. Зоркальцев В. И. Методы прогнозирования и анализа эффективности функционирования системы топливоснабжения / В. И. Зоркальцев. — М.: Наука, 1988.
8. Зоркальцев В. И. Алгоритмы внутренних точек в линейном программированиии / В. И. Зоркальцев // Оптимизация, управление, интеллект. — 1995. — № 1. — С. 20–37.
9. Филатов А. Ю. Развитие алгоритмов внутренних точек и их приложение к системам неравенств : автореф. дис. . . . к-та физ.-мат. наук / А. Ю. Филатов. — Иркутск: ИГУ, 2001.
10. Зоркальцев В. И. Системы линейных неравенств: учеб. пособие / В. И. Зоркальцев, М. А. Киселева. — Иркутск: ИГУ, 2007. — 127 с.
11. Broyden C. G. On theorems of the alternative / C. G. Broyden // Optimization methods and software. — 2001. Vol. 16. — P. 101–111.
12. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. — М.: Мир, 1973.
13. Дикин И. И. О сходимости одного итерационного процесса / И. И. Дикин // Управляемые системы. — Новосибирск, 1974. — Вып. 12.
14. Зоркальцев В. И. Относительно внутренняя точка оптимальных решений / В. И. Зоркальцев. — Сыктывкар: Коми фил. АН СССР РАН, 1984.
15. Зоркальцев В. И. Проективные алгоритмы оптимизации, использующие множители предыдущей итерации / В. И. Зоркальцев // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. — 1994. — Т.34, № 7. — С. 943–950.

V. I. Zorkaltsev

Interior point method in linear optimization

Abstract. The new results in investigation of Interior point method algorithms are given. It is said the idea about including along with simplex-method Interior point method in the base courses of educational program for mathematicians and economists of Irkutsk State University.

Keywords: linear programming, linear inequalities, interior points method.

Зоркальцев Валерий Иванович, доктор технических наук, профессор, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, 664033, г. Иркутск, Лермонтова, 130, а/я 1274, тел.: (3952) 42-88-27, (zork@isem.sei.irk.ru)

Zorkaltsev Valery, The Institute of Energy Systems of SB RAS, 130, Lermontov Street, Irkutsk, 664033, professor, Phone: (3952) 42-88-27, (zork@isem.sei.irk.ru)