Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 333—337

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.977

Достаточные условия оптимальности в задачах оптимального импульсного управления с промежуточными фазоограничениями *

О. Н. Самсонюк
Учреждение Российской академии наук
Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения РАН

Аннотация. Рассматривается нелинейная задача оптимального импульсного управления с траекториями ограниченной вариации при наличии промежуточных фазоограничений в конечном числе фиксированных моментов времени. Формулируются достаточные условия оптимальности импульсных процессов, базирующиеся на применении множеств сильно монотонных функций типа Ляпунова (идея подхода для классических задач оптимального управления изложена в [1]).

Ключевые слова: траектории ограниченной вариации, неравенство Гамильтона-Якоби.

1. Постановка задачи

Рассматриваются обобщенные (об.) траектории нелинейной динамической системы

$$\dot{x} = f(t,x,V,u) + G(t,x,V)v,\ \dot{V} = ||v||, \quad x(t_0) = x_0, \quad V(t_0) = 0, \quad (1.1)$$

$$u(t) \in U, \qquad v(t) \in K \qquad \text{п.в. на } T := [t_0, t_1]. \qquad (1.2)$$

Здесь $x(\cdot)$, $V(\cdot)$ — абсолютно непрерывные, $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ — измеримые ограниченные вектор-функции, $U \subset \mathbb{R}^{d(u)}$ — компактное множество, $K \subset \mathbb{R}^{d(v)}$ — выпуклый замкнутый конус, $||v|| = \sum_{i=1}^{d(v)} |v_i|$, $d(z)$ — размерность вектора z. Функции $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d(x)} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d(u)} \to \mathbb{R}^{d(x)}$, G :

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 07-01-00741 и финансовой поддержке СО РАН, интеграционный проект СО РАН-УрО № 85.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d(x)} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d(x)\times d(v)}$ непрерывны по всем переменным, по x липшицевы и удовлетворяют условиям роста.

Об. траектории системы (1.1), (1.2) являются непрерывными справа на $(t_0, t_1]$ вектор–функциями ограниченной вариации. Импульсным процессом системы (1.1), (1.2) будем называть набор $(x(\cdot), V(\cdot), u(\cdot), dw)$, в котором $(x(\cdot), V(\cdot))$ — об. траектория, соответствующая паре $(u(\cdot), dw)$, $u(\cdot) \in L_\infty(T, U)$ — обычное управление, $dw \in C^*(T, K)$ — импульсное управление.

Пусть $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_N = t_1$ — заданные моменты времени. Обозначим через b вектор, составленный из векторов односторонних пределов траекторий в моменты θ_j:

$$b := \Big(x(\theta_0-), \{x(\theta_j-), V(\theta_j-), x(\theta_j), V(\theta_j)\}_{j=\overline{1,N-1}}, x(\theta_N), V(\theta_N)\Big).$$

Заметим, что на отрезках $[\theta_{j-1}, \theta_j]$, $j = \overline{1,N}$ об. траектории понимаются в смысле работ [2, 3] и являются слабыми* пределами абсолютно непрерывных траекторий системы (1.1), (1.2).

На множестве импульсных процессов системы (1.1), (1.2) рассматривается задача P: $\qquad l(b) \to \inf, \qquad b \in C.$

2. Неравенства Гамильтона–Якоби и достаточные условия оптимальности

Зададим систему неравенств относительно липшицевых функций $\varphi(t, x, V)$, определенных при $t \in \Delta$, где $\Delta \subset T$ — заданный отрезок,

$$\varphi_t + \max_{u\in U} (\varphi_x, f(t,x,V,u)) \leqslant 0, \qquad \max_{\omega\in K_1} (\varphi_x, G(t,x,V)\omega) + \varphi_V \leqslant 0, \quad (2.3)$$

$$(t, x, V, \varphi_x) \in \{(t, x, V, \psi) \mid \text{достигаются максимумы в (2.3)}\},$$

где $K_1 = \{v \in K \mid ||v|| = 1\}$. Система неравенств (2.3) представляет собой обобщение классического неравенства Гамильтона–Якоби для системы (1.1), (1.2).

Функции φ (функции Ляпунова), удовлетворяющие (2.3) при $t \in \Delta = [\theta_{j-1}, \theta_j]$, обладают свойством монотонного невозрастания вдоль импульсных процессов системы (1.1), (1.2) на Δ_j. Наборы таких функций при $j = \overline{1,N}$ задают внешние оценки множеств достижимости управляемой импульсной системы и оценки снизу для функционала задачи P. Применение составных (разрывных) функций Ляпунова позволяет лучше учесть импульсную структуру процессов и присутствие в задаче промежуточных фазоограничений.

Зафиксируем произвольное упорядоченное по возрастанию множество моментов времени $\{s_0, \ldots, s_n\} \supseteq \{\theta_0, \ldots, \theta_N\}$, $s_0 = \theta_0$, $s_n = \theta_N$.

Введем обозначения:
$\Delta_i := [s_{i-1}, s_i]$, $i = \overline{1,n}$; $I := \{i \mid s_i \in \{\theta_1, \ldots, \theta_{N-1}\}\}$;
$b_i^0 := (x(s_i-), V(s_i-))$, $b_i^1 := (x(s_i), V(s_i))$, $i = \overline{0,n}$.

Зафиксируем множества $Q_{\Delta_i} = \{(t,x,V) \mid t \in \Delta_i,\ (t,x,V) \in Q\}$, $i = \overline{1,n}$, где $Q \subset \mathbb{R}^{d(x)+2}$ — заданное множество, выбор которого определяет тип локального минимума для задачи P. Обозначим $Q_T := \cup_{i=1}^n Q_{\Delta_i}$.

Пусть $\Phi(Q_{\Delta_i})$, $i = \overline{1,n}$ — произвольные множества решений неравенств (2.3) на соответствующих множествах Q_{Δ_i}. Чтобы учесть возможный разрыв об. траектории в моментах s_i, сопоставим каждому такому моменту множество $R_{s_i}(Q_{\Delta_i}, Q_{\Delta_{i+1}})$ — множество пар точек $b^0 := (z_0, z_{V0})$, $b^1 := (z_1, z_{V1})$, таких, что $(s_i, b^0) \in Q_{\Delta_i}$, $(s_i, b^1) \in Q_{\Delta_{i+1}}$ и точки соединимы траекториями предельной системы, описывающей эволюцию скачка об. траектории в «быстром времени»,

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = G(s_i, z(\tau), z_V(\tau))\omega(\tau), \quad \frac{dz_V(\tau)}{d\tau} = 1, \quad \omega(\tau) \in K_1, \ \tau \in [0,d],$$

$z_0 := z(0)$, $z_{V0} := z_V(0)$, $z_1 := z(d)$, $z_{V1} := z_V(d)$, $d := z_{V1} - z_{V0}$.

Пусть $P(Q_T)$ — сужение задачи P на множество Q_T, $\bar{e} = (\bar{x}(\cdot), \bar{V}(\cdot), \bar{u}(\cdot), d\bar{w})$ — допустимый импульсный процесс в задаче $P(Q_T)$. Тогда свойство монотонности функций $\varphi^i \in \Phi(Q_{\Delta_i})$ позволяет рассмотреть следующую конечномерную многоточечную задачу

$$l(b) \to \inf, \qquad b \in C, \qquad b := (b_0^0, \left\{b_i^0, b_i^1\right\}_{i \in I}, b_n^1), \tag{2.4}$$

$$\varphi^i(s_i, b_i^0) - \varphi^i(s_{i-1}, b_{i-1}^1) \leqslant 0 \quad \forall\, \varphi^i \in \Phi(Q_{\Delta_i}), \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.5}$$

$$(b_i^0, b_i^1) \in R_{s_i}^*, \quad i = \overline{0,n}. \tag{2.6}$$

Здесь $R_{s_i}^* \supseteq R_{s_i}(Q_{T_i}, Q_{T_{i+1}})$.

Теорема 1. *Если вектор*

$$\bar{b} = \Big(\bar{x}(\theta_0-), \{\bar{x}(\theta_j-), \bar{V}(\theta_j-), \bar{x}(\theta_j), \bar{V}(\theta_j)\}_{j=\overline{1,N-1}}, \bar{x}(\theta_N), \bar{V}(\theta_N)\Big)$$

оптимален в задаче (2.4)–(2.6)*, то процесс* $\bar{e}$ *оптимален в задаче* $P(Q_T)$.

Внешние оценки для множества $R_{s_i}(Q_{\Delta_i}, Q_{\Delta_{i+1}})$ можно получить, в частности, при помощи решений второго из неравенств в (2.3) при $t = s_i$. В случае, когда матрица при импульсном управлении $G(t,x)$ не зависит от V и удовлетворяет так называемому условию Фробениуса, в (2.6) следует использовать явное описание скачка об. траектории [4].

Пример 1. Рассмотрим вариант задачи оптимизации расходов на рекламу двух взаимодополняющих товаров (подробнее о модели и ее исследовании принципом максимума см. в [5]).

$$J = V(T) - y(T) \to \inf, \qquad V(\theta-) \leqslant R, \quad \theta \in [0,T],$$

на множестве импульсных процессов системы

$$\dot{x}_1(t) = av_1(t)(1 - x_1(t)), \quad \dot{x}_2(t) = cv_2(t)\left(1 - \frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right),$$

$$\dot{y}(t) = px_1(t) + qx_2(t), \qquad \dot{V}(t) = v_1(t) + v_2(t),$$

$$x_1(0) = x_{10} \in (0,1), \qquad x_2(0) = x_{20} \in (0, x_{10}), \quad y(0) = 0, \quad V(0) = 0,$$

$$v_1(t) \geq 0, \qquad v_2(t) \geq 0 \qquad \text{п.в. на } [0,T].$$

Пусть начальные данные удовлетворяют условиям:

$$x_1^* < x_1^{**}, \quad cq(T-\theta)\left(1 - \frac{x_{20}}{x_1^{**}}\right) < 1, \quad cqT\left(1 - \frac{x_{20}}{x_1^*}\right) - \beta < 1,$$

где $x_1^* = 1 - (1 - x_{10})e^{-aR}$, $x_1^{**} = 1 - 1/ap(T-\theta)$, $\beta = p\theta a(1 - x_1^*)$.

Тогда установить оптимальность управления

$$d\overline{w}_1 = R\delta(t) + \Big(1/a \ln\left(ap(T-\theta)(1 - x_{10})\right) - R\Big)\delta(t-\theta), \quad d\overline{w}_2 \equiv 0$$

можно, например, при помощи следующих функций

а) при $t \in [0, \theta)$

$$\varphi^1 = -(1 - x_1)e^{aV} \qquad \Rightarrow\ x_1(\theta-) \leqslant x_1^*,$$

$$\varphi^2 = y - (1+\beta)V - \frac{1+\beta}{a}\ln(1 - x_1) - ptx_1 + q(T-t)x_2;$$

б) при $t \in [\theta, T]$

$$\varphi^3 = y - V - \frac{1}{a}\ln(1 - x_1) + p(\theta - t)x_1 + q(T-t)x_2.$$

Список литературы

1. Дыхта В. А. Неравенство Ляпунова-Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении / В. А. Дыхта // Итоги науки и техн. Совр. матем. и ее приложения. М.: ВИНИТИ. — 2006. — Т. 110. — С. 76–108.
2. Миллер Б. М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями / Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович. — М.: Наука, 2005.
3. Motta M. Space-time trajectories of nonlinear systems driven by ordinary and impulsive controls / M. Motta, F. Rampazzo // Differential and Integral Equations. — 1995. — V. 8, № 2. — P. 269–288.
4. Дыхта В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк. — М.: Физматлит, 2003.
5. Дыхта В. А. Принцип максимума для гладких задач оптимального импульсного управления с многоточечными фазоограничениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. — 2009. — № 6 (в печати).

O. N. Samsonyuk

Sufficient optimality conditions for impulsive optimal control problems with intermediate state constraints

Abstract. The paper contains sufficient optimality conditions for the impulsive optimal control problems with general terminal and intermediate state constraints. These conditions are based on using sets of the solutions of the Hamilton-Jacobi inequalities.
Keywords: trajectories of bounded variation,the Hamilton-Jacobi inequality.

Самсонюк Ольга Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Учреждение Российской академии наук Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134 , тел. (3952) 30-73-07,
(samsonuk.olga@rambler.ru)

Samsonyuk Olga, Institute of Systems Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontova St., Irkutsk,664033, Phone (3952) 30-73-07,
(samsonuk.olga@rambler.ru)