Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 108—117

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

К устойчивости одного класса гибридных систем *

С. Н. Васильев
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Аннотация. Рассматриваются гибридные системы с переключением нелинейных векторных полей обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) подсистем. Для исследования свойств устойчивости и притяжения исходная задача сводится к выявлению аналогичной динамики ОДУ без переключений, но с разрывными решениями. Используются метод редукции и траекторный гомоморфизм из исходной модели во вспомогательную. Приводятся примеры.

Ключевые слова: гибридные системы, системы с переключениями, устойчивость, гомоморфизм, вектор-функция Ляпунова.

1. Введение

Содержание данной статьи мотивировано по меньшей мере тремя обстоятельствами: 1) повышенным интересом специалистов в области динамики систем и теории управления к исследованию математических моделей в форме семейства обыкновенных дифференциальных уравнений с переключаемыми векторными полями; такие модели именуются в литературе гибридными системами и активно исследуются с 1980-х годов (см. для ссылок [1]); 2) наличием методического багажа исследования динамики нелинейных систем в форме а) метода сравнения с векторными функциями Ляпунова, разработанного, прежде всего, в работах В.М. Матросова (см. для ссылок [2]), начатых им в Казанском авиационном институте, и б) метода редукции [3]; 3) тенденцией использования в исследованиях динамических систем таких модельных преобразований как морфизмы, более традиционных в алгебре.

* Работа выполнена при финансовой поддержке по Программе государственной поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1676.2008.1).

Успехам научной школы устойчивости и управления В.М. Матросова в иркутский период его деятельности (с 1975 г. по 1991 г.) во многом способствовало наличие в Иркутском госуниверситете математического факультета, организованного его первым деканом профессором В.В. Васильевым и развитого его сыном профессором О.В. Васильевым. Теплый прием Васильевыми в 1975 году В. М. Матросова, лидера нового коллектива математиков, механиков, управленцев, зарождавшегося в академической среде Восточно-Сибирского филиала СО АН СССР, и последующее многолетнее сотрудничество с деканом матфака О.В. Васильевым несомненно способствовали становлению школы В.М. Матросова и благотворно повлияли на формирование его учеников, многие из которых были выпусниками матфака ИГУ.

Светлой памяти и 70-летию Олега Владимировича Васильева, руководителя созданной им научной школы оптимального управления, талантливого организатора, педагога и прекрасного человека, данная статья посвящается.

2. Постановка задачи

Пусть $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots$ — строго возрастающая последовательность вещественных чисел, $\tau_i \to +\infty$, задающих отрезки $I_i = [\tau_{i-1}, \tau_i]$, $i \geq 1$, на каждом из которых задана пара обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathrm{x}} = F^i(t, \mathrm{x}),\ t \in I_i,\ \mathrm{x} \in R^n, \tag{1}$$

$$\dot{\mathrm{y}} = G^i(t, \mathrm{y}),\ t \in I_i,\ \mathrm{y} \in R^k \tag{2}$$

и функция $v^i : P^i \to R^k$, где $i = 1, 2, \dots,\ P^i \subset I_i \times R^n$, $F^i : I_i \times R^n \to R^n$, $G^i : I_i \times R^k \to R^k$, $F^i(t, 0) \equiv 0$, $G^i(t, 0) \equiv 0$. Будем предполагать существование и продолжимость решений каждого из уравнений на соответствующий отрезок I_i. Под $i(t)$ при $t \geq \tau_0$ будем понимать минимальный номер i отрезка I_i, которому принадлежит число t (таковых отрезков может быть два: если $t = \tau_i$, то $t \in I_i \cap I_{i+1}$). Через v обозначается функция $v : P \to R^k$, где $P = \cup\{P^i : i \geq 1\}$ и пусть по определению

$$v(t, \mathrm{x}) \overset{def}{=} v^{i(t)}(t, \mathrm{x}), \quad \forall (t, \mathrm{x}) \in P. \tag{3}$$

Далее считается, что $P^i = I_i \times O_\alpha$, $O_\alpha = \{\mathrm{x} \in R^n : ||\mathrm{x}|| < \alpha\}$, $\alpha > 0$ (фиксировано).

Будет изучаться поведение некоторым образом связанных решений уравнений семейства (1) вправо от начального момента t_0, $t_0 \geq \tau_0$. Пусть $t_0 \in I_i$. Для i-го уравнения (1) рассматривается решение $x(t)$ задачи Коши $x(t_0; t_0, \mathrm{x}_0) = \mathrm{x}_0$. Финальное значение $x(t)$ на I_i обозначается x_i. Начальное условие для $(i+1)$-го уравнения задается равенством

$x(\tau_i) = \mathrm{x}_i$, т.е. продолжение решения на отрезок I_{i+1} осуществляется по непрерывности. И т.д. вправо. Полученную динамическую модель назовем системой ОДУ с переключениями и именно ее будем понимать под "системой (1)". Она является частным случаем гибридной системы (hybrid system).

Обычно разнообразие функций F^i конечно, т.е. существует конечное семейство функций $\mathcal{F}$, такое, что $\forall i = 1, 2, \ldots\ \exists F \in \mathcal{F}\ F^i = F\big|_{I_i \times R^n}$. Здесь и далее $F\big|_M$ — сужение F на множество M. Без ограничения общности можно считать, что использование разнообразия всех функций из $\mathcal{F}$ исчерпывается до τ_p. Здесь $\tau_p < \infty$, если $|\mathcal{F}| < \infty$, иначе $\tau_p = \infty$ (p неограничено). Аналогично понимаются составные решения $y(t; t_0, \mathrm{y}_0)$ семейства уравнений (2), с тем же $t_0 \in I_i$, но продолжение решения вправо на интервал I_{i+1} осуществляется с привлечением другого начального условия: $y(\tau_i^+) = \mathrm{y}_i^+$, где y_i^+ задается и оно, вообще говоря, отлично от финального значения $\mathrm{y}_i = y(\tau_i)$ решения задачи Коши на интервале I_i с условием $y(t_0; t_0, \mathrm{y}_0) = \mathrm{y}_0$, а $y(\tau_i^+)$ — левый предел $y(t)$ на I_{i+1} в точке τ_i^+, т.е. $y(\tau_i^+) = \lim_{t \to \tau_i +} y(t)$ (существование $y(\tau_i^+)$ предполагается). Будем считать, что y_i^+ задается функцией разрывов $\Psi^i : R^k \to R^k$, а именно, $\Psi^i(0) = 0$, $\mathrm{y}_i^+ = \Psi^i(\mathrm{y}_i)$, т.е. y_i^+ зависит от финального состояния на предыдущем интервале, но не обязательно совпадает с ним. И т.д. Далее предполагается, что ОДУ (2) на разных отрезках I_i имеют функции разрывов, порождаемые общей функцией $G : [\tau_0, +\infty) \times R^k \to R^k$ так, что для любого $i = 1, 2, \ldots\quad G^i = G\big|_{I_i \times R^k}$, т.е. G^i — сужение функции G на множество $I_i \times R^k$. Полученная динамическая модель именуется "системой (2)" и, в отличие от (1), характеризуется возможным скачкообразным изменением состояния в моменты τ_i и относится к классу ОДУ с импульсными воздействиями (impulsive differential equations).

Изучается свойство устойчивости по Ляпунову тривиального решения $x(t) \equiv 0$ системы (1)

$$
\begin{aligned}
&\forall t_0 \in T_0\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall \mathrm{x}_0 \in R^n : ||\mathrm{x}_0|| < \delta \\
&\forall x(\cdot; t_0, \mathrm{x}_0)\ \ \forall t \geq t_0\ \ \forall \mathrm{x} = x(t)\ \ ||\mathrm{x}|| < \varepsilon,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $T_0 \subseteq T = [\tau_0, +\infty)$. В системе (2) рассматривается свойство $\mathcal{R}\mathcal{R}_0$-устойчивости решения $y(t) \equiv 0$

$$
\begin{aligned}
&\forall t_0 \in T_0\ \ \forall P \in \mathcal{R}\ \ \exists P_0 \in \mathcal{R}_0\ \ \forall \mathrm{y}_0 \in R^k : \mathrm{y}_0 \in P_0(t_0) \\
&\forall y(\cdot; t_0, \mathrm{y}_0)\ \ \forall t \geq t_0\ \ \forall \mathrm{y} = y(t)\ \ \mathrm{y} \in P(t),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $\mathcal{R}, \mathcal{R}_0$ — семейства (непустые) оценочных множеств P и P_0 текущих и начальных состояний соответственно, $\emptyset \neq P \subset T \times R^k$, $\emptyset \neq P_0 \subset T \times R^k$. Получим условия на функцию v, при которых (5) $\to$ (4).

3. Устойчивость ОДУ с переключениями векторных полей в заданные моменты времени

Сформулируем критерий, обеспечивающий переносимость свойства устойчивости из (2) в (1), для чего на функцию $v(t,x)$ вида (3) наложим требование частичного траекторного гомоморфизма (пока $x(t;t_0,\mathrm{x}_0)$ остаются в O_α)

$$\begin{gathered}\forall t_0 \in T_0 \ \ \forall \mathrm{x}_0 \in Q_\alpha \ \ \forall \mathrm{y}_0 \in O_{\alpha'} : v(t_0,\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0 \\ \forall x(\cdot;t_0,\mathrm{x}_0) \ \ \exists y(\cdot;t_0,\mathrm{y}_0) \ \ \forall t \in T(x,O_\alpha) \ \ \forall \mathrm{x} = x(t) \\ \forall \mathrm{y} = y(t) \ \ v(t,\mathrm{x}) = \mathrm{y},\end{gathered} \tag{6}$$

где $Q_{\alpha'}$ определяется как Q_α ($\alpha' > 0$ и фиксировано), а $T(x,O_\alpha) = \{t \in T_{t_0} : \forall \tau \in [t_0,t] \ \ \tau \in \mathrm{dom}\ x \ \ \& \ \ ||x(\tau)|| < \alpha\}$, $T_{t_0} = \{t \in T : t \geq t_0\}$. Будем считать, что $v(t,0) \equiv 0$, $\cup\{v(t_0,Q_\alpha) : t_0 \in T_0\} \subset Q_\alpha$. Существование решений $y(\cdot;t_0,\mathrm{y}_0)$ при $t_0 \in T_0$ и $\mathrm{y}_0 \in v(t_0,Q_\alpha)$ вытекает из наших общих предположений, а условие $v(t,x(t)) = y(t)$ для решений x и y с соответствующими друг другу начальными условиями при небольшом разнообразии функций F^i (т.е. $|\mathcal{F}| << \infty$) может обеспечиваться не менее эффективно. Так, в случае дифференцируемости всех $v^i(t,\mathrm{x})$, очевидно, достаточно чтобы для любых i таких, что $F^i \in \mathcal{F}$ выполнялись два условия:

$$1) \ \forall (t,\mathrm{x}) \in P^i \ \ \dot v^i(t,\mathrm{x})\big|_{(1)} = G(t, v^i(t,\mathrm{x})), \tag{7}$$

$$2) \ \forall \mathrm{x} \in O_\alpha \ \ v^{i+1}(\tau_i,\mathrm{x}) = \Psi^i(v^i(\tau_i,\mathrm{x})), \tag{8}$$

где $\dot v^i(t,\mathrm{x})\big|_{(1)} = \dfrac{\partial v^i(t,\mathrm{x})}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial v^i(t,\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}_j} F^i_j(t,\mathrm{x})$ (полная производная от v^i по t в силу (1)). В случае, если непрерывная функция v^i недифференцируема, но удовлетворяет локальному условию Липшица по x, то условие (7) можно заменить [4, 5] на

$$\overline{\lim_{h\to 0+}} \frac{1}{h}[v^i(t+h,\mathrm{x}+hF^i(t,\mathrm{x})) - v^i(t,\mathrm{x})] = G(t,v^i(t,\mathrm{x})),$$

где слева — верхняя правая производная v^i по t в силу (1).

Пример 1. Пусть $\mathcal{F} = \{F^1, F^2\}$, $F^1(t,\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x}\cos t}{2+\sin t}$, $F^2(t,\mathrm{x}) \equiv 0$,

$F^{2l+1} = F^1$, $F^{2m} = F^2$, $G(t,\mathrm{y}) = -\dfrac{\mathrm{y}}{t}$, $v^1(t,\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x}}{t(2+\sin t)}$,

$v^2(t,\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x}}{t}$, $v^{2l+1} = v^1$, $v^{2m} = v^2$, α — произвольное, $\tau_0 > 0$,

$\Psi^{2s+1}(\mathrm{y}) = \mathrm{y}(2+\sin\tau_{2s+1})$, $\Psi^{2(s+1)}(\mathrm{y}) = \dfrac{\mathrm{y}}{2+\sin\tau_{2(s+1)}}$, где $l, m = 1, 2, \ldots$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ Нетрудно проверить, что условия (7) и (8) выполнены, и потому выполнено условие гомоморфизма (6).

Теорема 1. *Если система (1) (с переключениями без разрывов $x(t)$) и система (2) (без переключений векторного поля $G(t, \mathrm{y})$, но с разрывными решениями $y(t)$) связаны в области $[\tau_0, +\infty) \times O_\alpha$ условием гомоморфизма (6) и для любых $t_0 \geq \tau_0$ выполнены условия*

1) для любых i таких, что $i = i(t_0)$ и $F^i \in \mathcal{F}$ (т.е. $i \leq p$ или $i = 1, 2, \ldots$)

$$\forall P_0 \in \mathcal{R}_0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; v^i(t_0, O_\delta) \subseteq P_0(t_0) \tag{9}$$

(типа непрерывности функций $v^i(t_0, \cdot)$) в точке $\mathrm{x} = 0$ относительно семейств множеств $\{O_\delta\}_{\delta>0}$ и $\mathcal{R}_0(t_0) = \{P_0(t_0)\}_{P_0 \in \mathcal{R}_0}$),

2) $$\begin{gathered}\forall \varepsilon \in (0, \alpha) \;\; \exists P \in \mathcal{R} \;\; \forall t \geq t_0 \;\; \forall i = i(t) : F^i \in \mathcal{F} \\ v^i(t, R^n \backslash O_\varepsilon) \subseteq R^k \backslash P(t)\end{gathered} \tag{10}$$

или, в случае существования обратных функций $(v^i)^{-1}(t, \cdot)$,

$$\forall \varepsilon \in (0, \alpha) \;\; \exists P \in \mathcal{R} \;\; \forall t \geq t_0 \;\; \forall i = i(t) : F^i \in \mathcal{F} \;\; (v^i)^{-1}(t, P(t)) \subseteq O_\varepsilon \tag{11}$$

(типа непрерывности $(v^i)^{-1}(t, \cdot)$ по y относительно семейств множеств $\mathcal{R}(t)$ и $\{O_\varepsilon\}_{\varepsilon=0}$ равномерно по t), то (5) $\to$ (4) (из $\mathcal{R}\mathcal{R}_0$-устойчивости решения $y(t) \equiv 0$ системы (2) следует устойчивость решения $x(t) \equiv 0$ системы (1)).

Доказательство. Наличие свойства (4) определяется поведением решений вблизи тривиального решения и поэтому (4) эквивалентно следующему свойству:

$$\begin{gathered}\forall t_0 \in T_0 \;\; \forall \varepsilon \in (0, \alpha) \;\; \exists \delta \in (0, \alpha) \;\; \forall \mathrm{x}_0 \in R^n : ||\mathrm{x}_0|| < \delta \\ \forall x(\cdot; t_0, \mathrm{x}_0) \;\; \forall t \in T(x, O_\alpha) \;\; \forall \mathrm{x} = x(t) \;\; ||\mathrm{x}|| < \varepsilon.\end{gathered}$$

По алгоритмам метода редукции [3] получается следующее решение X логического уравнения X & (6) & (5) $\to$ (4):

$$\begin{gathered}\forall t_0 \in T_0 \;\; \forall \varepsilon \in (0, \alpha) \;\; \exists P \in \mathcal{R} \;\; \forall P_0 \in \mathcal{R}_0 \;\; \exists \delta \in (0, \alpha) \\ \forall \mathrm{x}_0 \in O_\delta \;\; \exists \mathrm{y}_0 \in P_0(t_0) : v(t_0, \mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0 \;\; \forall x(\cdot; t_0, \mathrm{x}_0) \\ \forall y(\cdot; t_0, \mathrm{y}_0) \;\; \forall t \in T(x, O_\alpha) \;\; \forall \mathrm{x} = x(t) \;\; \exists \mathrm{y} = y(t) \\ (\mathrm{y} \in P(t) \;\;\&\;\; v(t, \mathrm{x}) = \mathrm{y} \to ||\mathrm{x}|| < \varepsilon).\end{gathered} \tag{12}$$

Проверка того, что (12) & (6) & (5) $\to$ (4), осуществима непосредственно по кванторной структуре формулы (12). В свою очередь, условие (12) выполняется, если справедливы условия:

а) $\forall t_0 \in T_0 \ \ \forall P_0 \in \mathcal{R}_0 \ \ \exists \delta \in (0, \alpha) \ \ \forall \mathrm{x}_0 \in O_\delta \ \ \exists \mathrm{y}_0 \in P_0(t_0):$
$v(t_0, \mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0,$
б) $\forall t_0 \in T_0 \ \ \forall \mathrm{y}_0 \in v(t_0, O_\alpha) \ \ \forall y(\cdot; t_0, \mathrm{y}_0) \ \ \forall t \geq t_0 \ \ t \in \mathrm{dom} y,$
в) $\forall t_0 \in T_0 \ \ \forall \varepsilon \in (0, \alpha) \ \ \exists P \in \mathcal{R} \ \ \forall t \geq t_0$
$\forall \mathrm{x} \in R^m \backslash O_\varepsilon \ \ v(t, \mathrm{x}) \in R^k \backslash P(t).$

Очевидно, условия а) и в) эквивалентны соответственно условиям (9) и (10) теоремы 1, а условие б) обеспечивается предположением о продолжимости решений вправо, что и завершает доказательство. □

4. Асимптотическая устойчивость

Рассмотрим свойство асимптотической устойчивости (АУ) системы (1) как свойство (4) в совокупности с притяжением

$$\begin{gathered} \forall t_0 \in T_0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \mathrm{x}_0 \in R^n : ||\mathrm{x}_0|| < \delta \\ \forall x(\cdot; t_0, \mathrm{x}_0) \ \ \exists t_1 \geq t_0 \ \ \forall t \geq t_1 \ \ \forall \mathrm{x} = x(t) \ \ ||\mathrm{x}|| < \varepsilon \end{gathered} \tag{13}$$

и аналогичное свойство $\mathcal{R}\mathcal{R}_0$-АУ в системе (2).

Аналогично теореме 1 при условиях (6), (9) и следующем ослабленном варианте условия (10)

$$\begin{gathered} \forall t_0 \in T_0 \ \ \forall \varepsilon \in (0, \alpha) \ \ \exists P \in \mathcal{R} \ \ \exists t_1 \geq t_0 \ \ \forall t \geq t_1 \\ \forall i = i(t) : F^i \in \mathcal{F} \ \ v^i(t, R^n \backslash O_\varepsilon) \subseteq R^k \backslash P(t) \end{gathered} \tag{14}$$

или при том же кванторном префиксе и существовании обратных функций $(v^i)^{-1}$

$$(v^i)^{-1}(t, P(t)) \subseteq O_\varepsilon \tag{15}$$

(условие типа непрерывности $(v^i)^{-1}(t, \cdot)$ по y равномерно по t в пределе) из свойства $\mathcal{R}\mathcal{R}_0$-АУ в системе (2) следует (4) & (13). Поэтому с учетом импликации (9) $\rightarrow$ (14) (или (11) $\rightarrow$ (15)) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *При условиях теоремы 1*

$$\mathcal{R}\mathcal{R}_0\text{-}АУ \rightarrow (4)\&(13),$$

т.е. из $\mathcal{R}\mathcal{R}_0$-асимптотической устойчивости тривиального решения системы (2) следует асимптотическая устойчивость решения $x(t) \equiv 0$ в системе (1).

5. Завершение примера

Пример 2. (продолжение примера 1) Системы (1), (2) и функции v^i, рассмотренные в примере 1, удовлетворяют условиям (6), (9), (11) теорем 1 и 2 при следующем выборе множеств $P, P_0 \in \mathcal{R} = \mathcal{R}_0$:

$$P(\varepsilon') = \left\{(t, \mathrm{y}) \in [\tau_0, +\infty) \times R^k : |\mathrm{y}| < \frac{\varepsilon'}{t(2+\sin t)}\right\}, \ \ \varepsilon' > 0. \qquad (16)$$

Тогда, если система (2) с правой частью G и функциями разрывов Ψ^i, определенными в примере 1, обладает $\mathcal{RR}_0$-устойчивостью нулевого решения, то по теореме 1 и в системе (1), конкретизированной в примере 1, решение $x(t) \equiv 0$ будет устойчиво. Если же указанная система (2) обладает и $\mathcal{RR}_0$-притяжением к началу координат, то на основе теоремы 2 делаем вывод, что система (1) с заданными в примере 1 векторными полями ОДУ и фиксированным там же порядком переключений, будет тоже асимптотически устойчивой. Наличие же устойчивости или притяжения в системе (2) зависит от выбора моментов $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ Так, если в примере 2 $\tau_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $\tau_i = \tau_0 + \pi \cdot i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то тривиальное решение системы (2) обладает $\mathcal{RR}_0$-асимптотической устойчивостью. Наоборот, если $\tau_0 = \dfrac{3}{2}\pi$, $\tau_i = \tau_0 + \pi \cdot i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то решение $y(t) \equiv 0$ в системе (2) $\mathcal{RR}_0$-неустойчиво.

6. Обобщение постановки задачи

Изложим более общий результат, когда нет привязки конкретных векторных полей ОДУ к конкретным отрезкам I_i, т.е. начальная правая часть и порядок смены правых частей ОДУ при переходе от отрезка I_i к отрезку I_{i+1} — произвольны. Обозначим через $j(t) : t \to \{1, 2, \ldots\}$ функцию-указатель номера j правой части $F^j \in \mathcal{F}(j = 1, 2, \ldots)$, определяющей динамику системы (1) на отрезке $I_i(t)$. При этом $j(t)$ не обязательно равно $i(t)$, $F^j : T \times R^n \to R^n$, а во вспомогательной системе (2) функции разрывов $\Psi^j : T \times R^k \to R^k$ априори тоже не привязаны к конкретным отрезкам I_i и, как раньше, $G : T \times R^k \to R^k$, $F^j(t, 0) \equiv 0$, $G(t, 0) \equiv 0$. Пусть функции $v^j(t, \mathrm{x})$ определены на множестве $P = T \times O_\alpha$, $v^j : P \to R^k$.

Снова предполагаем, что продолжение решений $x(t)$ на очередной отрезок осуществляется по непрерывности, а решения $y(t)$ могут быть разрывными и продолжение задается начальным условием $y(\tau_i^+) = \Psi^j(\tau_i, y(\tau_i))$ ($y(t)$ непрерывны слева и не обязательно $i = j$).

Полученные модели изучаемой и вспомогательной системы будем именовать системой $(1')$ и системой $(2')$, соответственно.

Используем условие траекторного гомоморфизма

$$\begin{aligned}
&\forall t_0 \in T_0 \ \ \forall j : T \to \{1, 2, \ldots\} \ \ \forall \mathrm{x}_0 \in Q_\alpha \ \ \forall \mathrm{y}_0 \in Q_{\alpha'} : \\
&v^{j(t_0)}(t_0, \mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0 \ \ \forall x(\cdot; t_0, \mathrm{x}_0) \ \ \exists y(\cdot; t_0, \mathrm{y}_0) \\
&\forall t \in T(x, Q_\alpha) \ \ \forall \mathrm{x} = x(t) \ \ \forall \mathrm{y} = y(t) \ \ v^{j(t)}(t, \mathrm{x}) = \mathrm{y}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Для удовлетворения этому условию можно использовать условия типа (7) и модификацию условия (8):

$$\forall i = 1, 2, \ldots \quad \forall \mathrm{x} \in O_\alpha \quad v^{j(\tau_{j+1})}(\tau_i, \mathrm{x}) = \Psi^{j(\tau_i)}(\tau_i, \mathrm{x}).$$

Будем считать, что

$$\cup \Big\{ v^{j(t_0)}(t_0, Q_\alpha) : t_0 \in T_0, \ j : F^j \in \mathcal{F} \Big\} \subset Q'_\alpha. \tag{18}$$

Снова предполагаем существование и продолжимость решений вправо в системах $(1')$, $(2')$.

Пример 3. Пусть $\mathcal{F} = \{F^1, F^2\}$ и, как в примере 1, $F^1(t, \mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x} \cos t}{2 + \sin t}$, $F^2(t, \mathrm{x}) \equiv 0$, $G(t, \mathrm{y}) = -\dfrac{\mathrm{y}}{t}$, но $\operatorname{dom} F^1 = \operatorname{dom} F^2 = T \times R^1$, $v^1(t, \mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x}}{t(2 + \sin t)}$, $v^2(t, \mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x}}{t}$, ($\alpha$ — произвольное) $\{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots\} = \{\dfrac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, \dfrac{5}{2}\pi, 3\pi, 4\pi, \tau_0 + 4\pi, \tau_1 + 4\pi, \tau_2 + 4\pi, \ldots\}$, $\Psi^1(t, \mathrm{y}) = \mathrm{y}(2 + \sin t)$, $\Psi^2(t, \mathrm{y}) = \dfrac{\mathrm{y}}{2 + \sin t}$.

При этом будем считать, что $j(t)$ — произвольное, но с обязательным переключением в точках $\tau_1, \tau_2, \ldots$ Нетрудно проверить, что условие (17) гомоморфизма выполнено.

Теорема 3. *Если системы $(1')$, $(2')$ удовлетворяют условиям (17), (18) и при любых $t_0 \in T_0$, $j : T \to \{1, 2, \ldots\}$ справедливо*

1) $\forall P_0 \in \mathcal{R}_0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ v^{j(t_0)}(t_0, O_\delta) \subseteq P_0(t_0)$,

2) $\forall \varepsilon \in (0, \alpha) \ \ \exists P \in \mathcal{R} \ \ \forall t \geq t_0 \ \ v^{j(t)}(t, R^n \backslash O_\varepsilon) \subseteq R^k \backslash P(t)$

или, в случае существования обратных функций $(v^{j(t)})^{-1}$

$$(v^{j(t)})^{-1}(t, P(t)) \subseteq O_\varepsilon,$$

то в системах $(1')$, $(2')$ имеют место импликации (5) $\to$ (4) и $\mathcal{R}\mathcal{R}_0$-АУ $\to$ (4) & (13).

Доказательство аналогично доказательству теорем 1, 2.

Пример 4. (продолжение примера 3) В системе ($2'$) имеется свойство $\mathcal{R}\mathcal{R}_0$-устойчивости решения $y(t) \equiv 0$ относительно семейств $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_0$ вида (16) и все условия теоремы 3 выполняются. Поэтому в исходной системе ($1'$) решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво. Свойством $\mathcal{R}\mathcal{R}_0$-притяжения, когда $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_0$ имеют вид (16), система ($2'$) (как и система ($1'$)) не обладает.

Критерии устойчивости ОДУ с импульсными воздействиями в терминах гомоморфизмов и вектор-функций сравнения предложены в [6].

7. Заключение

Новые практические применения теории управления нередко зависят от возможностей построения моделей физических и других систем и их исследования в нелинейной постановке. Применимы также структуры управления с семейством регуляторов, построенных для линейных описаний и переключаемых программно или по принципу обратной связи (по мониторинговым сигналам) [6–10]. Например, так в автомобилестроении моделируется динамика подвесок автомобиля, инжекторное управление горением и т.п. Соответственно в литературе изучаются возможности использования для анализа гибридных систем семейства функций Ляпунова — обычно по одной для каждого векторного поля. В данной работе мы рассматриваем, во-первых, нелинейные векторные поля переключаемых ОДУ. Во-вторых, мы сводим задачу анализа к аналогичной задаче для непереключаемой системы, хотя и с импульсными воздействиями на ее состояние, и используем при этом траекторный гомоморфизм, который может быть знакопеременным, разрывным вдоль траекторий исходной системы и без требования невозрастания вдоль них.

Список литературы

1. DeCarlo R. A. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems / R. A. DeCarlo, M. S. Branicky, S. Petterson // Proc. of the IEEE. — 2000. — Vol. 88, № 7. — P. 1069–1082.
2. Матросов В. М. Метод сравнения в математической теории систем / В. М. Матросов, Л. Ю. Анапольский, С. Н. Васильев. — Новосибирск: Наука, 1980.
3. Васильев С. Н. Метод редукции и качественный анализ динамических систем, I, II / С. Н. Васильев // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. — 2006. — № 1. — С. 21–29; № 2. — С. 5–17.
4. Персидский К. П. Ко второй методе Ляпунова / К. П. Персидский // Известия АН КазССР. Математика и механика. — 1947.— Т. 42, № 1. — С. 48–55.
5. Corduneanu C. Применение дифференциальных неравенств в теории устойчивости / Corduneanu C. // An. Sti. Univ. “Al. I. Cuza”, Iasi Sect. I a Mat. — 1960. — № 6. — P. 47–58 (на рус. яз.).

6. Vassilyev S. N. Homomorphisms of Impulsive Differential Equations with Impulses at Unfixed Times and Comparison Method / S. N. Vassilyev // Intern. J. of Hybrid Systems. — 2002. — Vol. 2, № 3. — P. 289–296.
7. Branicky M. Studies in hybrid systems : Modeling, analysis, and control : PhD thesis/ M. Branicky. — M.I.T., Cambridge, MA, 1995.
8. Sontag E. D. Nonlinear regulation : The piecewise linear approach / E. D. Sontag // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1981. — 26 (2). — P. 346–358.
9. Matveev A. Qualitative theory of hybrid dynamical systems / A. Matveev, A. Savkin. — Birkhauser, 2000.
10. Wicks M. A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stability switched systems / M. A. Wicks, P. Peleties, R. A. DeCarlo // Proc. of the 33rd CDC. — 1994. — P. 3492–3497.

S. N. Vassilyev
On stability of a subclass of hybrid systems

Abstract. Hybrid systems with switching nonlinear vector fields of ordinary differential equations (ODE) of subsystems in given instants are considered. The analysis of the dynamical properties of stability and attractivity in those models are reduced to a problem of analysis of analogous dynamics in usual ODE, but with discontinuous solutions. A reduction method with trajectory homomorphism from initial model to auxiliary one is used. Some examples are considered.
Keywords: hybrid systems, switched systems, stability, homomorphism, vector-Lyapunov function.

Васильев Станислав Николаевич, академик, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 117997, ГСП-7, В-342, г. Москва, Профсоюзная, 65, тел.: (495) 334-89-10, (snv@ipu.ru)

Vasiliev Stanislav Nikolaevich, academician, Institute of Control Sciences RAS, 65, Profsoyuznaya str., Moscow, Russia, 117997,
Phone.: (495) 334-89-10, (snv@ipu.ru)