Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 283—294

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 519.583

Квазивыпуклое программирование

Р. Энхбат
Монгольский государственный университет

Аннотация. Эта статья посвящена проблемам максимизации и минимизации квазивыпуклой функции на произвольном множестве. В работе сформулированы условия глобальной оптимальности для этих задач и показано их применение.

Ключевые слова: невыпуклая оптимизация, глобальный поиск.

1. Введение

Рассмотрим две задачи максимизации и минимизации квазивыпуклой функции на произвольном множестве $D \subset R^n$:

$$f(x) \longrightarrow \max, \quad x \in D, \tag{1.1}$$

$$f(x) \longrightarrow \min, \quad x \in D. \tag{1.2}$$

Задачи (1.1) и (1.2) имеют важные применения в экономике и технологии. Квазивыпуклая функция как обобщение выпуклой функции часто фигурирует в экономической литературе. В работах [1, 4, 5, 6, 17, 20, 23, 25, 31] рассмотрены задачи оптимизации в микроэкономике. Выпуклость играет важную роль в экономической теории. Например, классическая теория предполагает вогнутой производственную функцию и функцию полезности. Функция спроса, полученная как решение задачи максимизации функции полезности на бюджетном ограничении, является также выпуклой функцией. В зависимости от экономических условий, рынков, а также предпочтений потребителей решается задача максимизации или минимизации квазивыпуклой функции.
Так называемая задача мультипликативного программирования [2, 8, 19] может быть сведена к задаче квазивогнутой минимизации[2, 8]:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{p} f_i \longrightarrow \min, \quad x \in D, \tag{1.3}$$

где $f_i : R^n \to R$ выпуклые функции, $i = 1, 2, ..., p$ $(p \geq 2)$, D выпуклый компакт на R^n, и $f_i(x) \geq 0$ для любых $x \in D$ и $j = 1, 2, ..., p$.

Задача D.C. программирования (разность двух выпуклых функции) [16]:

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x) \longrightarrow \min \qquad (1.4)$$
$$\text{subject to } \; h_i(x) \leq 0, \; i = 1, 2, ..., m,$$

также формулируется как задача квазивыпуклой минимизации, где g_1, g_2 и h_i $(i = 1, 2, ..., m)$ выпуклые функции на R^n.

В общем случае обе задачи (1.1) и (1.2) являются многоэкстремальными. Задача максимизации выпуклой функции или вогнутого программирования является частным случаем задачи (1.1) когда f – выпукла и D – многогранник. Для решения этой задачи существуют методы основанные на отсечениях и методе ветвей и границ [3, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 29, 30]. Условия глобальной оптимальности для вогнутого программирования получены впервые А.Стрекаловскими в 1987[27, 28]. Первая попытка построить численный алгоритм, основанный на этих условиях была предпринята в [7]. Другие условия глобальной оптимальности, использующие ϵ-субдифференциалы, получены в [9]. С другой стороны, задача минимизации квазивыпуклой функции на выпуклом множестве рассматривалась Канторовичем [18]. Как известно, классические условия оптимальности и алгоритмы не всегда являются успешными для невыпуклой задачи оптимизации в смысле нахождения глобального решения. Даже не существуют универсальных методов и алгоритмов для решения задачи глобальной оптимизации. В связи с этим глобальная оптимизация требует другой теории и методов, основанных на условиях глобальной оптимальности. Существующие глобальные методы и алгоритмы разработаны для задач специальных видов. Целью этой работы является получение условия глобальной оптимальности для задач (1.1) и (1.2) и их применение.

2. КВАЗИВЫПУКЛАЯ МАКСИМИЗАЦИЯ

2.1. Свойства квазивыпуклой функции

Рассмотрим определение и известные свойства квазивыпуклой функции.

Определение 1. Функция $f : \; R^n \to R$ называется квазивыпуклой если неравенство

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

выполняется для всех $x, y \in R^n$ and $\alpha \in [0, 1]$.

Очевидно, что любая выпуклая функция является квазивыпуклой, но обратное утверждение не всегда выполняется. Если f квазивыпуклая то $-f$ называется квазивогнутой.

Лемма 1. *Функция $f: R^n \to R$ квазивыпукла тогда и только тогда, когда множество*

$$L_c(f) = \{x \in R^n \mid f(x) \leq c\}$$

выпукло для всех $c \in R$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $c \in R$ есть произвольное число и $x, y \in L_c(f)$. Тогда по определению квазивыпуклой функции мы имеем

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq c \quad \text{для всех } \alpha \in [0,1],$$

Отсюда заключаем, что $L_c(f)$ выпукло.
Достаточность. Пусть $L_c(f)$ выпуклое множество для всех $c \in R$. Для произвольных $x, y \in R^n$, определим $c^o = \max\{f(x), f(y)\}$. Тогда $x \in L_{c^o}(f)$ и $y \in L_{c^o}(f)$. Следовательно, $\alpha x + (1-\alpha y) \in L_{c^o}(f)$, для всех $\alpha \in [0,1]$. □

Лемма 2. *Пусть $f: R^n \to R$ дифференцируемая и квазивыпуклая функция. Тогда из неравенства $f(x) \leq f(y)$ для всех $x, y \in R^n$ вытекает*

$$\langle f'(y), x-y \rangle \leq 0,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение двух векторов.

Доказательство. Так как f квазивыпукло,мы имеем

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} = f(y)$$

для всех $\alpha \in [0,1]$ и $x, y \in R^n$ таких что $f(x) \leq f(y)$. Разложим функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки y :

$$f(y + \alpha(x-y)) - f(y) = \alpha\left(\langle f'(y), x-y\rangle + \frac{o(\alpha\|x-y\|)}{\alpha}\right) \leq 0, \quad \alpha > 0.$$

Учитывая, что $\frac{o(\alpha\|x-y\|)}{\alpha} \xrightarrow{\alpha \to o} 0$, мы получаем $\langle f'(y), x-y\rangle \leq 0$. □

2.2. Условия глобальной максимизации

Рассмотрим задачу максимизации квазивыпуклой функции

$$f(x) \longrightarrow \max, \quad x \in D, \tag{2.1}$$

где $f: R^n \to R$ дифференцируемая и квазивыпуклая функция и $D \subset R^n$ произвольное непустое множества R^n. Условие глобальной оптимальности для задачи формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Пусть z решение задачи (2.1), и*

$$E_c(f) = \{y \in R^n \mid f(y) = c\}.$$

Тогда

$$\langle f'(y), x - y\rangle \leq 0 \text{ для всех} y \in E_{f(z)}(f) \text{ и } x \in D. \tag{2.2}$$

Если дополнительно $f'(y) \neq 0$ для всех $y \in E_{f(z)}(f)$, тогда условие (2.2) является достаточным для того, чтобы точка $z \in D$ была решением задачи (2.1).

Доказательство. Необходимость. Предположим, что z является решением задачи (2.1) и $y \in E_{f(z)}(f)$ и $x \in D$. Тогда очевидно $f(x) \leq f(y)$. Применяя результат леммы 2, получаем $\langle f'(y), x - y\rangle \leq 0$.
Достаточность. Предположим противное. Пусть z не является решением задачи (2.1), то есть существует точка $u \in D$ такая, что $f(u) > f(z)$. В силу леммы 1, замкнутое множество $L_{f(z)}(f) = \{x \in R^n \mid f(x) \leq f(z)\}$ выпукло. Пусть y проекция точки u на $L_{f(z)}(f)$ такая, что

$$\|y - u\| = \min_{x \in L_{f(z)}(f)} \|x - u\|.$$

Ясно, что

$$\|y - u\| > 0 \tag{2.3}$$

так как $u \notin L_{f(z)}(f)$. Более того, точка y может рассматриваться как решение следующей задачи выпуклого программирования:

$$g(x) = \frac{1}{2}\|x - u\|^2 \longrightarrow \min, \quad x \in L_{f(z)}(f).$$

Запишем условия оптимальности в точке y:

$$\begin{cases} \lambda_o \geq 0, \ \lambda \geq 0, \ \lambda_o + \lambda > 0 \\ \lambda_o g'(y) + \lambda f'(y) = 0 \\ \lambda(f(y) - f(z)) = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Если $\lambda_o = 0$, тогда из (2.4) вытекает, что $\lambda > 0, f(y) = f(z)$ и $f'(y) = 0$ которое противоречит условию теоремы. Если $\lambda = 0$, мы имеем $\lambda_o > 0$ и $g'(y) = y - u = 0$. Последнее тоже противоречит условию (2.3). Тогда не нарушая общности, мы можем положить $\lambda_o = 1$ и $\lambda > 0$ в (2.4).

$$y - u + \lambda f'(y) = 0, \quad \lambda > 0,$$
$$f(y) = f(z).$$

Отсюда заключаем $\langle f'(y), u - y\rangle > 0$, что противоречит (2.2) □

Замечание 1. Если $f(x)$ выпуклая, тогда условия глобальной оптимальности получены в [27] как:

Теорема 2. [27]. *Пусть D произвольное множество и точка $z \in D$ удовлетворяет условию*

$$-\infty < \inf_{R^n} f < f(z) < +\infty$$

и $L_{f(z)}(f) = \{x \in R^n \mid f(x) \leq f(z)\} \subset intdom\ f$ компакт. Тогда z является глобальным решением задачи (1.1) тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &\langle c, x-z\rangle \leq 0 \quad \textit{для всех } x \in \overline{conv}\ D \textit{ и } c \in \partial f(z), \\ &\langle v, x-z\rangle \leq 1 \quad \textit{для всех } x \in \overline{conv}\ D \textit{ и } v \in S(f,z), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned} S(f,z) &= \left\{ v \in R^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists y \in R^n:\ y \neq z,\ y \in E_{f(z)}(f), \\ \exists \alpha > 0:\ \alpha v \in \partial f(y),\ \langle v, y-z\rangle = 1. \end{array} \right\}, \\ \partial f(z) &= \{c \in R^n \mid f(x) - f(z) \geq \langle c, x-z\rangle, \quad x \in R^n\}, \\ intdom\ f &= \{x \in R^n \mid f(x) < +\infty\}, \end{aligned}$$

Здесь $\overline{conv}\ D$ замкнутая выпуклая оболочка множества D.

Если f дифференцируемая, то нетрудно убедиться что условие (2.2) для задачи (2.1) эквивалентно условию (2.5).

Замечание 2. Условие (2.5)дополнено следующей теоремой.

Теорема 3. [10]. *Предположим, что f выпукла и D – выпукло и замкнуто. Пусть точка $z \in D$ удовлетворяет условию $-\infty \leq \inf_D f < f(z)$. Тогда z является глобальным решением задачи (1.1) тогда и только тогда, когда*

$$\partial f(x) \subset N(x|D) \textit{ выполняется для всех } x \in D \textit{ и } x \in E_{f(z)}(f),$$

где $N(x|D)$ нормальный конус к множеству D в точке x :

$$N(x|D) = \{c \in R^n \mid \langle c, y-x\rangle \leq 0, \quad y \in D\}.$$

Замечание 3. Если D выпукло, тогда, полагая $y = z$, мы из (2.2) получаем хорошо известные условия локальной оптимальности [24] :

$$\langle f'(z), x-z\rangle \leq 0, \quad \forall x \in D.$$

Замечание 4. Для того чтобы утверждать, что точка z' в D не является решением задачи, достаточно найти пару $x, y \in R^n$ такую, что

$$\langle f'(y), x-y\rangle > 0, \quad f(y) = f(z'), \quad x \in D.$$

Пример 1.

$$f(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2 - 1} \ ,$$
$$D = \{x \in R^2 \mid 0.6 \le x_1 \le 7; \ 0.6 \le x_2 \le 2\}.$$

Мы легко вычисляем градиент функции:

$$f'(x) = \left(\frac{x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - x_2^2}{(x_1 + x_2 - 1)^2} \ , \ \frac{x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2 - x_1^2}{(x_1 + x_2 - 1)^2} \right).$$

Очевидно, что точка $x^o = (0.6, 0.6) \in D$ есть локальное решение. Рассмотрим точки $u = (5, 2) \in D$ и $y = (3, 3)$, удовлетворяющие условию $f(y) = f(x^o) = 3.6$. Тогда имеем $\langle f'(y), u - y \rangle = \frac{12}{25} > 0$. Отсюда заключаем, что точка x^o не является глобальным решением. На самом деле, глобальное решение есть точка $x^* = (7, 0.6)$.

Пример 2. Рассмотрим задачу D.C программирования

$$g(x) = g_1(x) - g_2(x) \longrightarrow \max$$
где x удовлетворяет условию $h_i(x) \le 0, \ i = 1, 2, ..., m,$

где g_1, g_2 и $h_i, \ i = 1, 2, ..., m$ выпуклые дифференцируемые функции в R^n. Эту задачу нетрудно свести к следующей задаче квазивыпуклой максимизации:

$$-g(x) = g_2(x) - g_1(x) \longrightarrow \min$$
$$h_i(x) \le 0, \ i = 1, 2, ..., m,$$

Тогда условия глобальной оптимальности записываются как

$$g_1(x) - x_{n+1} \longrightarrow \max$$
$$g_2(x) \le x_{n+1}, \ h_i(x) \le 0, \ i = 1, 2, ..., m,$$

где $(x, x_{n+1}) \in R^n \times R$. Используя (2.2), мы получаем

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial g_1(y)}{\partial x_i}(x_i - y_i) + y_{n+1} - x_{n+1} \le 0 \\ g_1(y) - y_{n+1} = g_1(z) \\ g_2(x) \le x_{n+1} \\ h_i(x) \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Пример 3. Рассмотрим задачу дробного программирования

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \longrightarrow \max, \quad x \in D,$$

где f_1 выпуклая дифференцируемая, и f_2 вогнутая дифференцируемая функции на R^n.

$$f_1(x) > 0, \quad f_2(x) > 0 \text{ для всех } x \in D \subset B.$$

Используя лемму 1, легко можно показать что $f(x)$ квазивыпуклая функция. Следовательно, условие глобальной оптимальности (2.2) можно записать в следующей форме:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1(y)}{\partial x_i} f_2(y) - \frac{\partial f_2(y)}{\partial x_i} f_1(y) \right) \frac{(x_i - y_i)}{f_2^2(y)} \leq 0, \ \forall y \in E_{f(z)}(f), \ \forall x \in D.$$

3. КВАЗИВЫПУКЛАЯ МИНИМИЗАЦИЯ

3.1. Условия глобальной минимизации

Рассмотрим задачу минимизации квазивыпуклой функции:

$$f(x) \longrightarrow \min, \quad x \in D, \tag{3.1}$$

где $f : R^n \to R$ непрерывная дифференцируемая квазивыпуклая функция и $D \subset R^n$ произвольное непустое множество. Условия глобальной оптимальности для задачи (3.1) даются следующей теоремой.

Теорема 4. *Если z является решением задачи (3.1). То*

$$\langle f'(x), x - y \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } y \in E_{f(z)}(f) \text{ и } x \in D, \tag{3.2}$$

где $E_c(f) = \{y \in R^n \mid f(y) = c\}$. Если, дополнительно

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty \text{ и } f'(x + \alpha f'(x)) \neq 0 \tag{3.3}$$

для всех $x \in D$ и $\alpha \geq 0$, тогда условие (3.2) является достаточным.

Доказательство. Необходимость. Пусть z решение задачи (3.1). Возьмём $x \in D$ и $y \in E_{f(z)}(f)$. Тогда мы имеем $0 \geq f(z) - f(x) = f(y) - f(x)$. В силу леммы 2, получаем $\langle f'(x), x - y \rangle \geq 0$.

Достаточность. Предположим противное. Пусть точка z не является решением задачи (3.1). Тогда существует точка $u \in D$ такая, что $f(u) > f(z)$. Построим луч y_α для $\alpha > 0$ как

$$y_\alpha = u + \alpha f'(u).$$

Покажем, что $f(y_\alpha) > f(u)$ для всех α. По формуле Тейлора мы имеем

$$f(u+\alpha f'(u)) - f(u) = \alpha\left(\|f'(u)\|^2 + \frac{o(\alpha\|f'(u)\|)}{\alpha}\right)$$

для всех $\alpha > 0$, $\lim\limits_{\alpha\to\, 0+} \frac{o(\alpha\|f'(u)\|)}{\alpha}$=0. Отсюда существует $\alpha_o > 0$, такое что $f(y_\alpha) - f(u) > 0$ выполнены для всех $\alpha \in (0, \alpha_o)$. Так как $f'(u) \neq 0$, $f'(u+\alpha_o f'(u)) \neq 0$ в силу леммы 2, мы имеем

$$\langle f'(u+\alpha_o f'(u)), f'(u)\rangle \geq 0.$$

Заметим, что для всех $\gamma > 1$, а также $f(u+\gamma\alpha_o f'(u)) > f(u+\alpha_o f'(u))$ выполняется. В противном случае, мы имеем $f(u+\gamma\alpha_o f'(u)) \leq f(u+\alpha_o f'(u))$, следовательно, по лемме 2, $\langle f'(u+\alpha_o f'(u)), \alpha_o(\gamma-1)f'(u)\rangle \leq 0$, или $\gamma \leq 1$, что противоречит $\gamma > 1$. Более того, можно показать, что функция $f(u+\gamma\alpha_o f'(u))$ является возрастающей относительно аргумента $\gamma > 0$. Действительно, если $f(u+\gamma'\alpha_o f'(u)) < f(u+\gamma\alpha_o f'(u))$ выполняется для $\gamma' > \gamma$, тогда $\alpha_o(\gamma'-\gamma)\langle f'(u+\gamma\alpha_o f'(u)), f'(u)\rangle \leq 0$, которое противоречит условию $\gamma' > \gamma$. Следовательно, $f(y_\alpha) > f(u)$ выполняется для всех $\alpha > 0$.

Очевидно, что функция $\varphi : R^+ \to R$, определенная как

$$\varphi(\alpha) = f(y_\alpha)$$

непрерывна на $[0,\infty)$. В силу условия (3.3), $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\varphi(\alpha) = +\infty.$, Следовательно, существует $\hat\alpha$ такое, что $\varphi(\hat\alpha) > f(z)$. Используя непрерывность функции $\varphi(\alpha)$ и неравенства $\varphi(\hat\alpha) > f(z) > f(u)$, заключаем, что существует $\bar\alpha$ такое, что

$$f(y+\bar\alpha f'(u)) = f(z),$$

которое означает $y_{\bar\alpha} \in E_{f(z)}(f)$. С другой стороны, мы имеем $f'(u) = \frac{1}{\bar\alpha}(y_{\bar\alpha} - u)$. Таким образом получаем

$$\langle f'(u), u - y_{\bar\alpha}\rangle = \frac{1}{\bar\alpha}\langle y_{\bar\alpha} - u, u - y_{\bar\alpha}\rangle = -\frac{1}{\bar\alpha}\|y_{\bar\alpha} - y\|^2 < 0,$$

что противоречит (3.2). Отсюда следует, что z есть глобальное решение (3.1). □

Замечание 5. Если D выпукло, условия глобальной оптимальности впервые сформулированы Л.В. Канторовичем в следующем утверждении.

Теорема 5. [18]. *Точка $z \in D$ есть решение задачи (1.2) тогда и только тогда, когда существует $c \in R^n$ такой, что*

$$\langle c, x\rangle \leq \langle c, z\rangle \quad \textit{для всех } x \in D,$$
$$\langle c, x\rangle \geq \langle c, z\rangle \quad \textit{для всех } x \in R^n \textit{ такой что } f(x) \leq f(z).$$

Замечание 6. Для того, чтобы утверждать, что $z \in D$ не является решением задачи (3.1), достаточно найти пару $u, y \in R^n$ такую, что $\langle f'(u), u - y\rangle < 0, f(y) = f(z)$ и $u \in D$.

Пример 4. Рассмотрим задачу:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \longrightarrow \min,$$

где

$$D = \{x \in R^2 : \ 5x_1^2 + 2x_2 + 3x_1 \leq 16, \quad x_1^2 + x_2 \geq 5\}.$$

Классическое условие оптимальности дают три стационарные точки $z^o = (1, 4)$, $z^1 = (0, 5)$ и $z^2 = (-2, 1)$. Чтобы проверить точку z^o на глобальную оптимальность, рассмотрим точки $u = (-1, 4) \in D$ и $y = (0, \sqrt{17})$ удовлетворяющие $f(y) = f(z^o) = 17$. Вычисляя $\langle f'(u), u - y\rangle$ мы имеем $\langle f'(u), u-y\rangle = 2(16-4\sqrt{17}) < 0$. Следовательно, z^o не является глобальным решением. Нетрудно убедиться, что z^2 есть глобальное решение с $f(z^2) = 5$.

Пример 5. Рассмотрим задачу D.C. программирования (1.4). Пусть g_1 и g_2 выпуклые функции. Тогда эта задача легко сводится к задаче минимизации выпуклой функции на невыпуклом множестве и условия оптимальности будут:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial g_1(y)}{\partial x_i}(x_i - y_i) + y_{n+1} - x_{n+1} \geq 0 \\ g_1(y) - y_{n+1} = g_1(z) \\ g_2(x) \geq x_{n+1} \\ h_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Пример 6. Рассмотрим задачу дробного программирования

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \ \longrightarrow \ \min, \quad x \in D, \tag{3.4}$$

где f_1 выпуклая дифференцируемая, и f_2 вогнутая дифференцируемая функции на R^n. Предположим, что

$$f_1(x) > 0, \quad f_2(x) > 0 \text{ для всех } x \in D.$$

Как известно, $f(x)$ квазивыпуклая функция. Тогда условия глобальной оптимальности записываются в виде :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} f_2(x) - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_i} f_1(x) \right) \frac{(x_i - y_i)}{f_2^2(x)} \geq 0, \, \forall y \in E_{f(z)}(f), \, \forall x \in D.$$

Рассмотрим специальный случай задачи (3.1):

$$f(x) \ \longrightarrow \ \min, \quad x \in D, \tag{3.5}$$

где $f:\ R^n \to R$ непрерывна дифференцируемая и выпуклая функция, и D произвольный компакт на R^n. В этом случае, условие (3.3) теоремы 4 можно ослабить с помощью следующего утверждения.

Теорема 6. *Предположим, что z есть глобальное решение задачи (3.5). Тогда*

$$\langle f'(x), x-y\rangle \geq 0 \ \text{выполняется для всех } y \in E_{f(z)}(f) \text{ и } x \in D. \quad (3.6)$$

Если, дополнительно

$$\min_{x\in D} \|f'(x)\| > 0 \quad (3.7)$$

выполняется, тогда условие (3.6) является достаточным.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что z есть решение задачи (3.5). Рассмотрим точки $x \in D$ и $y \in E_{f(z)}(f)$. Тогда в силу выпуклости f, мы имеем

$$0 \geq f(z) - f(x) = f(y) - f(x) \geq \langle f'(x), y-x\rangle.$$

Достаточность. Предположим противное. Пусть условие (3.6) выполняется и существует точка $u \in D$ такая, что

$$f(u) < f(z).$$

Ясно, $f'(u) \neq 0$ в силу (3.11). Для $\alpha > 0$ определим u_α как:

$$u_\alpha = u + \alpha f'(u).$$

Так как f выпукла, то мы имеем

$$f(u_\alpha) - f(u) \geq \langle f'(u), u_\alpha - u\rangle = \alpha \|f'(u)\|^2,$$

что влечёт

$$f(u_\alpha) \geq f(u) + \alpha\|f'(u)\|^2 > f(u).$$

Находим $\alpha = \bar\alpha$ такое, что

$$f(u) + \bar\alpha\|f'(u)\|^2 = f(z),$$

Следовательно,

$$\bar\alpha = \frac{f(z)-f(u)}{\|f'(u)\|^2} > 0.$$

Таким образом мы получаем

$$f(u_{\bar\alpha}) \geq f(u) + \bar\alpha\|f'(u)\|^2 = f(z) > f(u).$$

Определим функцию $h: R^+ \to\ R$ как

$$h(\alpha) = f(u + \alpha f'(u)) - f(z),$$

где $R^+ = \{\alpha \in R \mid \alpha \geq 0\}$. Очевидно, что h непрерывна на $[0, +\infty)$. Заметим, что $h(\bar{\alpha}) \geq 0$ и $h(0) < 0$. Рассмотрим два случая относительно значения $h(\bar{\alpha})$.

Случай a: $h(\bar{\alpha}) = 0$ (или $f(u + \bar{\alpha} f'(u)) = f(z)$), тогда

$$\langle f'(u), u - u_{\bar{\alpha}} \rangle = -\langle f'(u), \bar{\alpha} f'(u) \rangle = -\bar{\alpha} \|f'(u)\|^2 < 0,$$

которая противоречит (3.10).

Случай b: $h(\bar{\alpha}) > 0$ и $h(0) < 0$. Поскольку h непрерывна, то существует $\alpha_o \in (0, \bar{\alpha})$ такое, что $h(\alpha_o) = 0$ (or $f(u + \alpha_o f'(u)) = f(z)$). Тогда мы имеем

$$\langle f'(u), u - u_{\alpha_o} \rangle = -\alpha_o \|f'(u)\|^2 < 0,$$

и мы снова приходим к противоречию с (3.6).

Таким образом теорема доказана. □

Список литературы

1. Takayama A. Mathematical Economics / A. Takayama. — Cambridge University Press, 1985.
2. Jaumard B. Generalized Convex Multiplicative Programming via Quasiconcave Minimization / B. Jaumard, C. Meyer, H. Tuy // Journal of Global Optimization. — 1997. — № 10. — P. 229–256.
3. Bulatov V. P. The Embedding Methods in Extremum Problems / V. P. Bulatov. — Novosibirsk: Nauka, 1977.
4. Dixit A. K. Optimization in Economic Theory / A. K. Dixit. — Oxford University Press, 1976.
5. Katzner D. W. Static Demand Theory / D. W. Katzner. — Macmillian, London, 1970.
6. Katzner D. W. Walrasian Microeconomics / D. W. Katzner. — Addison-Wesley, New-York, 1988.
7. Enkhbat R. An Algorithm for Maximizing a Convex Function over a Simple Set / R. Enkhbat // Journal of Global Optimization. — 1996. № 8. — P. 379–391.
8. Harold P. B. An Outcome Space Branch and Bound-Outer Approximation Algorithm for Convex Multiplicative Programming / P. B. Harold // Journal of Global Optimization. — 1999. — № 15. — P. 315–342.
9. Hiriart-Urruty J. B. From Convex Optimization to Nonconvex Optimization / J. B. Hiriart-Urruty // Nonsmooth Optimization and Related Topics, Plenum. — 1989. — P. 219–239.
10. Hiriart-Urruty J. B. A Note on the Characterization of the Global Maxima of a (tangentially) Convex Function over a Convex Set / J. B. Hiriart-Urruty, J. S. Ledyaev // Journal of Convex Analysis. — 1996. — Vol. 3, № 1. — P. 55–61.
11. Horst R. On the Global Minimization of a Concave Function: Introduction and Servey / R. Horst // Operations Research Spectrum. — 1984. № 6. — P. 195–200.
12. Horst R. A General Class of Branch and Bound Methods in Global Optimization with some New Approaches for Concave Minimization / R. Horst // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1986. — № 51. P. 271–291.
13. Horst R. Outer Cut Methods in Global Optimization / R. Horst // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 1987. — Vol. 304. — P. 28–40.
14. Horst R. Outer Approximation by Polyhedral Convex Sets / R. Horst, N. V. Thoai, H. Tuy // Operations Research Spectrum. — 1987. — Vol. 9., № 3. — P. 153–159.

15. Horst R. A New Branch and Bound Approach for Concave Minimization Problems / R. Horst // Lecture Notes in Computer Science. — 1987. — Vol. 41. — P. 330–337.
16. Horst R. Global Optimization(Deterministic Approaches) / R. Horst, H. Tuy. — Springer, Berlin, 1990.
17. James M. H. Microeconomic theory: A Mathematical Approach / M. H. James, E. Q. Richard. — McGraw-Hill, 1971.
18. Kantorovich L. V. On an Effective Method for Solving some Classes of Extremum probelms / L. V. Kantorovich // Soviet Math. Doklady. — 1940. — Vol. 28, № 3. — P. 212–215.
19. Konno H. Multiplicative Programming Problems / H. Konno, T. Kuno // Handbook of Global Optimization. — Kluwer Dordrecht. — 1995. — P. 369–405.
20. Michael D. I. Mathematical Optimization and Economic Theory / D. I. Michael. — Prentice-Hall, 1971.
21. Pardalos P. M. Constrained Global Optimization: Algorithms and Applications / P. M. Pardalos, J. B. Rosen //Lecture Notes in Computer Science. — 1987.
22. Pardalos P. M. Methods for Global Concave Minimization: A Bibliographic Survey / P. M. Pardalos, J. B. Rosen // SIAM Review. — 1986. — № 28. — P. 367–379.
23. Madden P., Concavity and Optimization in Microeconomics / P. Madden. — Oxford University Press, 1986.
24. Rockafellar R. T. Convex Analysis / R. T. Rockafellar. — Princeton University Press, Princeton, 1970.
25. Weintraub R. E. Mathematics for Economists / R. E. Weintraub. — Cambridge University Press, 1982.
26. Schaible S. Invited Review: Fractional programming / S. Schaible, T. Ibaraki // European J. of Operational Research. — 1983. — № 12. — P. 325–338.
27. Strekalovsky A. S. On the Global Extremum Problem / A. S. Strekalovsky // Soviet Math.Doklady. — Vol. 292, № 5. — P. 1062–1066.
28. Strekalovsky A. S. Global Optimality Conditions for Nonconvex Optimization / A. S. Strekalovsky // Journal of Global Optimization. — 1998. — № 12. — P. 415–434.
29. Tuy H. Concave Programming under Linear Constraints / H. Tuy // Soviet Math.Doklady. — 1964. — Vol. 159, № 1. — P. 32–35.
30. Tuy H. Normal Conical Algorithm for Concave Minimization over Polytopes / H. Tuy // Mathematical Programming. — 1991. — № 51. — P. 229–245.
31. Varian H. R. Microeconomic Analysis / H. R. Varian. — Norton, New-York, 1984.
32. Vasiliev O. V. Optimization Methods / O. V. Vasiliev. — World Federation Publishers, Atlanta, 1996.

R. Enkhbat

Qausi-convex programming

Abstract. This paper considers problems of maximization and mininization of quasi-convex function at arbitrary set. Global optimality conditions are formulated.

Keywords: non-convex optimization, global searching.

Rentsen Enkhbat, Sc.D, Professor, National University of Mongolia, Head of Applied Mathematics Division of the Institute of Mathematics, Phone.: 976-11-99278403, (renkhbat46@yahoo.com)