Серия «Математика»
Том 2 (2009), № 1, С. 308—311

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.853.4

К решению задач о клике как задач с d.c. ограничением

Т. В. Груздева
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. Рассматриваются задачи поиска максимальной и максимальной взвешенной клик в неориентированном графе. Приведены новые непрерывные постановки задач о клике в виде задач оптимизации с невыпуклым ограничением. Для их решения применена теория глобального поиска [1], и построены приближенные алгоритмы нахождения максимальной и максимальной взвешенной клик.

Ключевые слова: максимальная клика, локальный поиск, d.c. программирование, алгоритм глобального поиска.

1. Введение

В работе рассматриваются известные в дискретной математике NP-трудные задачи поиска максимальной и максимальной взвешенной клик в простом неориентированном графе $G = (V, E)$, где $V = \{1, \ldots, n\}$ — множество вершин, E — множество ребер. Предположим, что для каждой вершины $i \in V$ определен вес $w_i > 0$, совокупность всех весов обозначим через вектор $w = (w_1, \ldots, w_n)^T$. Подмножество вершин C называется кликой, если каждая пара вершин является смежной, т.е. соединена ребром. Клика называется локально максимальной (максимальной по включению), если она не содержится в клике большей размерности. Ставится задача о нахождении клики максимального веса (ЗМВК). ЗМВК является обобщением классической задачи поиска клики максимальной мощности (ЗМК), т.к. она может быть получена из ЗМВК, когда все веса равны, скажем, $w = e$, где $e = (1, \ldots, 1)^T$.

В настоящей работе рассматривается подход, который использует сведение задач о клике к задачам минимизации выпуклой квадратичной функции на каноническом симплексе с дополнительным невыпуклым ограничением. При этом в постановке задачи участвуют матрицы смежности как исходного так и дополнительного графов. Алгоритмы решения ЗМК и ЗМВК основаны на условиях глобальной оптимальности для задач с d.c. ограничением и является реализацией стратегии глобального поиска [1], [2].

2. Непрерывные постановки задач о клике

Пусть $C \subset V$ — произвольная клика, и $W(C) = \sum_{i \in C} w_i$ — общий вес множества C.

Введем взвешенный характеристический вектор $z(C, w)$ множества C:

$$z(C, w)_i = \begin{cases} \frac{w_i}{W(C)}, & \text{если } i \in C, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим число $\omega_{ij} = \frac{1}{2w_i} + \frac{1}{2w_j}$ и построим квадратную матрицу $\overline{B} = ||\overline{b_{ij}}||_{(n \times n)}$ по следующему правилу:

$$\overline{b_{ij}} = \begin{cases} \omega_{ij}, & \text{если } i \neq j, \quad (i,j) \notin E; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее введем функцию, зависящую от параметров α и γ:

$$\Phi_{\alpha,\gamma}(x) \stackrel{\triangle}{=} \left\langle x, [\alpha \overline{B} + \gamma(B + D)]x \right\rangle - \gamma \langle d, x \rangle,$$

где $d \in I\!R^n$, $d_i = \frac{1}{w_i}$, $i = 1, \ldots, n$, $D = diag\{d_1, \ldots, d_n\}$ — диагональная матрица $(n \times n)$, а $B = ||b_{ij}||_{(n \times n)}$ построена по правилу:

$$b_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij}, & \text{если } (i,j) \in E; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Итак, рассмотрим задачу оптимизации с параметрами $\alpha \neq \gamma$:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{w_i} x_i^2 \downarrow \min, \quad x \in S, \\ sign(\alpha - \gamma)\Phi_{\alpha,\gamma}(x) \leq 0, \end{array} \right\} \qquad (\mathcal{P})$$

где $S \stackrel{\triangle}{=} \{x \in I\!R^n \mid x \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$.

Теорема 1. *[3] Пусть графу $G(V, E, w)$ в соответствие поставлена задача $(\mathcal{P})$, где $\alpha \neq \gamma$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

i) C — локально максимальная взвешенная клика веса W,
$z(C, w)$ — ее характеристический вектор;

ii) z — строгий локальный минимум в задаче $(\mathcal{P})$;

iii) z — локальный минимум в задаче $(\mathcal{P})$.

Из теоремы 1 вытекает, что любое глобальное решение z задачи $(\mathcal{P})$ позволяет определить соответствующую ему максимальную взвешенную клику по правилу: $C_* = \{i \in V : z_i > 0\}$.

В случае, когда $w = e$, $\overline{B}$ и B оказываются матрицами смежности графа G и дополнительного графа $\overline{G}$ соответственно, а решение задачи (P) позволяет определить максимальную клику в графе G.

3. Алгоритм глобального поиска

Нетрудно видеть, что задача $(\mathcal{P})$ является задачей с d.c. ограничением

$$f(x) \downarrow \min, \quad x \in S, \quad F(x) = h(x) - g(x) \leq 0,$$

и для ее решения применима стратегия глобального поиска [1], один из основных этапов которой — локальный поиск.

Представим процедуру локального поиска для задачи $(\mathcal{P})$, где $w_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$, т.е. процедуру поиска локально максимальной клики в графе G.

Алгоритм 3. $\overline{C}$-процедура.
Шаг 0. Выбрать $x^0 \in S$, положить $m := 0$.
Шаг 1. Построить множество $supp(x^m) = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid x_i^m > 0\}$.
Шаг 2. Если $supp(x^m)$ является кликой, т.е. $\Phi_{\alpha,\gamma}(x^m) = 0$, то положить $x := x^m$ и идти на Шаг 5.
Шаг 3. Выбрать две вершины q и p из $supp(x^m)$ такие, что

$$(q, p) \notin E, \quad \Phi_{\alpha,\gamma}(\overline{x}(q, p)) < \Phi_{\alpha,\gamma}(x^m),$$

где точка $\overline{x}(q, p)$ строится по правилу: $\overline{x}(q, p) \overset{\triangle}{=} x^m + x_p^m(e^q - e^p)$.
Шаг 4. Положить $x^{m+1} := \overline{x}(q, p)$, $m := m + 1$ и вернуться на Шаг 1.
Шаг 5. Найти локально максимальную клику $C \supset supp(x^m)$. Положить $\mathcal{K} := |supp(x)|$.
Шаг 6. Построить характеристический вектор $z(C)$.
STOP: $z(C)$ — локальный минимум в задаче $(\mathcal{P})$.

С учетом дискретной природы задач о клике стратегия глобального поиска для задач с d.c. ограничением [4] преобразуется в нижеследующий алгоритм. Для простоты приведем алгоритм решения ЗМК (решение задачи $(\mathcal{P})$ при $w_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$), где $f(x) = \| x \|^2$, $h(x) = \langle x, H_1 x \rangle - \gamma$, $g(x) = \langle x, H_2 x \rangle$; $H_1 = \alpha\overline{\Lambda} + \gamma(\Lambda + I)$, $H_2 = \alpha(\overline{\Lambda} - \overline{A}) + \gamma(\Lambda - A)$; A и $\overline{A}$ — матрицы смежности графов G и $\overline{G}$, а $\Lambda = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$; $\overline{\Lambda} = diag\{\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}\}$, $\overline{\lambda_i} = \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}$.

Алгоритм 4. $\mathcal{R}$-алгоритм для ЗМК
Шаг 0. Положить $k := 0$. Выбрать параметры $\alpha > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha \neq \gamma$. Начиная из точки x^0, $\overline{C}$-процедурой получить точку z^0 локального минимума задачи $(\mathcal{P})$.
Шаг 1. Положить $\beta_k := g(z^k),\ \ \rho_k := f(z^k)$. Построить множество

$$\mathcal{A}_k = \{y^i = \alpha_i e^i \mid g(y^i) = \beta_k,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Шаг 2. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ найти u^i — решение линеаризованной задачи

$$h(x) - \langle \nabla g(y^i), x \rangle \downarrow \min,\ \ x \in S,\ \ f(x) \leq \rho_k. \qquad (\mathcal{PL}_i)$$

Шаг 3. Начиная с точки $u^i \in S$ для каждого $i = 1, \ldots n$, получить $\overline{C}$-процедурой точку v^i локального минимума задачи (P).
Шаг 4. Выбрать точку $v^j:\ \ f(v^j) = \min\limits_{1 \leq i \leq n} f(v^i)$.
Шаг 5. Если $f(v^j) < f(z^k)$, то $z^{k+1} := v^j,\ k := k + 1$ и идти на Шаг 1. Иначе положить $z := z^k$.
STOP: $C := supp(z)$ — наилучшая найденная локально максимальная клика мощности $\mathcal{K} = |C|$.

Построенные на основе решения задачи $(\mathcal{P})$ алгоритмы для ЗМК и ЗМВК протестированы на задачах из библиотеки DIMACS. Результаты тестирования показали, что для решения задач о клике, а особенно ЗМВК большой размерности ($n \geq 800$), представляется выигрышным применять подход, основанный на решении задачи $(\mathcal{P})$.

Список литературы

1. Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации / А. С. Стрекаловский. — Новосибирск: Наука, 2003.
2. Груздева Т. В. Локальный поиск в задачах с невыпуклыми ограничениями / Т. В. Груздева, А. С. Стрекаловский // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2007. — Т. 47. — № 3. — С. 397–413.
3. Груздева Т.В. Решение задачи о клике сведением к задаче с d.c. ограничением / Т. В. Груздева // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Т. 15. — № 6. — С. 20–33.
4. Стрекаловский А. С. Минимизирующие последовательности в задачах с d.c. ограничениями / А. С. Стрекаловский // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2005. — Т. 45, № 3. — С. 435–447.

T. V. Gruzdeva
On Solving the Clique Problem via d.c. Constraint Problem.

Abstract. The Maximum Weighted Clique Problem (MWCP) and Maximum Clique Problem (MCP) are considered here as the problem with nonconvex quadratic constraint given by difference of two convex functions (d.c. function). For solving MWCP and MCP an algorithm based on Global Optimality Conditions is applied.

Keywords: global optimization, nonconvex constraint, clique, local search, global search algorithm.

Груздева Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 644033, Иркутск, ул. Лермонтова 134, тел.: (3952) 45-30-31, (gruzdeva@icc.ru)

Gruzdeva Tatyana, PhD, Institute for System Dynamics and Control Theory SB of RAS, Lermontov Str., 134, Irkutsk, 664033, Russia, Phone: (3952) 45-30-31, (gruzdeva@icc.ru)