Серия «Математика»
2017. Т. 19. С. 129—135

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.97
MSC 49J15
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.19.129

О существовании решения задачи оптимального управления гибридной системой*

Н. С. Малтугуева
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

Н. И. Погодаев
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления гибридной динамической системой достаточно общего вида. В литературе подобные системы также часто называют дискретно-непрерывными или логико-динамическими. Они возникают при математическом моделировании целого ряда технических процессов. С помощью гибридных систем можно, к примеру, описать функционирование коробки передач в автомобиле, работу автоматической системы климат-контроля, некоторые процессы с эффектом гистерезиса, динамические системы с соударениями и кулоновским трением, а также многие другие. Математической теории оптимального управления такими системами посвящено большое число статей, в частности, к настоящему времени получены необходимые и достаточные условия оптимальности, а также разработаны итерационные процедуры последовательного улучшения. Однако авторам не известно о существовании каких-либо работ, посвящённых вопросам существования оптимальных управлений. Отчасти восполнить этот пробел призвана данная статья. Напомним, что для классической задачи оптимального управления основной способ доказательства существования решения состоит в том, чтобы установить эквивалентность этой задачи некоторой задаче математического программирования, состоящей в минимизации непрерывной функции на множестве достижимости рассматриваемой управляемой системы. Тогда, в силу классической теоремы Вейерштрасса, условия компактности множества достижимости и будут условиями существования оптимального управления. В данной работе мы показываем, что для рассматриваемой в статье гибридной системы подобный подход также может быть применён. Эквивалентная задача математического программирования

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 16-31-00184, при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-8081.2016.9).

оказывается несколько сложнее, а доказательство компактности множества её допустимых значений требует уже знания свойств интегральной воронки управляемой системы, а не её множеств достижимости.

Ключевые слова: гибридные системы, дискретно-непрерывные системы, оптимальное управление, теоремы существования.

1. Постановка задачи

Гибридные или, в другой терминологии, дискретно-непрерывные системы широко применяются для моделирования различных технических процессов; с рядом примеров можно ознакомиться, например, в книге [6]. Математической теории оптимального управления такими системами посвящено большое число статей. Среди них мы выделим работы [1; 2; 3; 4], которые позволяют кратко ознакомиться с последними результатами, относящимися к ключевым вопросам теории оптимального управления — поиску необходимых и достаточных условий оптимальности и построению численных методов.

Гибридная система, рассматриваемая в данной работе, состоит из параметризованного семейства обыкновенных систем

$$\dot{x} = f(t, x, y, u), \quad u \in U, \tag{1.1}$$

многозначного отображения $(t, x, y) \mapsto Y(t, x, y)$ и множества Q. Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовая переменная, $y \in \mathbb{R}^m$ — параметр, $u \in U$ — управление, U — компактное подмножество $\mathbb{R}^l$, множество Q задаёт начальные условия, а Y определяет логику переключения параметра y.

Управлять такой системой можно как выбирая обычное управление $u(\cdot)$, так и изменяя значение параметра y. Покажем, как это делается.

Начальное состояние системы и начальное значение параметра выбираются из условия $(t_0, x_0, y_0) \in Q$. Затем фиксируется допустимое управление $u_0(\cdot)$ и до момента времени $t_1 \geq t_0$ траектория гибридной системы определяется уравнением

$$\dot{x} = f\left(t, x, y_0, u_0(t)\right).$$

В произвольный момент времени $t_1 \geq t_0$ значение параметра может быть изменено с y_0 на некоторое $y_1 \in Y(t_1, x(t_1), y_0)$. Затем выбирается новое допустимое управление $u_1(\cdot)$. Дальнейшая эволюция системы (1.1) определяется уравнением

$$\dot{x} = f\left(t, x, y_1, u_1(t)\right)$$

вплоть до момента времени $t_2 \geq t_1$ и т. д.

Будем предполагать, что число переключений параметра y конечно и равно N, момент последнего (по сути фиктивного) переключения t_N

фиксирован и равен T. Таким образом, управление в данной системе состоит из набора функций $u_0(\cdot), \dots, u_N(\cdot)$, моментов переключения $t_0, \dots, t_N$ и параметров $y_0, \dots y_N$. Пару, состоящую из управления и соответствующей ему траектории, будем называть процессом и обозначать его символом ς.

Цель данной заметки — доказать существование оптимальных управлений в задаче минимизации целевого функционала

$$J[\varsigma] = \sum_{i=0}^{N} \phi_i(t_i, x(t_i), y_i) \tag{1.2}$$

на множестве всех допустимых процессов системы (1.1).

2. Существование оптимальных управлений

Положим $F(t,x,y) = f(t,x,y,U)$. Всюду в дальнейшем предполагаем, что $F\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение с непустыми выпуклыми компактными значениями, удовлетворяющее условию подлинейного роста: для любого компактного $K \subset \mathbb{R}^m$ существует $C_K > 0$ такое, что

$$d_H(F(t,x,y), 0) \le C_K(1 + |x|) \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+ \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \;\; \forall y \in K,$$

где d_H — метрика Хаусдорфа. Будем считать, что значения многозначного отображения $Y\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ не пусты и компактны, график его замкнут, а само оно ограничено. Наконец, Q предполагаем непустым и компактным, а функции ϕ_i непрерывными.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x,y), \tag{2.1}$$

зависящее от параметра y. Обозначим его интегральную воронку, стартующую из точки (t,x), символом $S(t,x,y)$. Другими словами, $S(t,x,y)$ состоит из таких точек, которые можно соединить с (t,x) решением включения (2.1) при фиксированном y.

Зафиксируем числа $N \in \mathbb{N}$ и $T > 0$. При наших предположениях из стандартных теорем существования для дифференциальных включений вытекает, что множество $S(t,x,y)$ не пусто для любых t, x, y. Следовательно, всегда существует последовательность $\{(t_k, x_k, y_k)\}_{k=0}^{N}$, удовлетворяющая для всех k условиям

$$(t_0, x_0, y_0) \in Q. \tag{2.2}$$

$$t_k \le t_{k+1}, \quad t_N = T, \tag{2.3}$$

$$(t_{k+1}, x_{k+1}) \in S(t_k, x_k, y_k), \tag{2.4}$$

$$y_{k+1} \in Y(t_{k+1}, x_{k+1}, y_k). \tag{2.5}$$

Любую такую последовательность мы будем называть решением системы (2.2)–(2.5). Каждое решение $\sigma = \{(t_k, x_k, y_k)\}_{k=0}^N$ лежит в пространстве

$$([0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)^{N+1} \tag{2.6}$$

с нормой $\|\sigma - \sigma'\| = \sum_{k=0}^N \left(|t_k - t'_k| + |x - x'_k| + |y_k - y'_k|\right)$.

Лемма 1. *Множество решений задачи* (2.2)–(2.5) *компактно в пространстве* (2.6).

Доказательство. **1.** Докажем, что множество решений ограничено. Поскольку Y ограниченно, то существует компакт $K \subset \mathbb{R}^m$ такой, что

$$Y(t,x,y) \subseteq K \qquad \forall t \in [0,T] \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \;\; \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

K можно выбрать так, чтобы оно содержало множество

$$Q_y = \{y \, : \; (t,x,y) \in Q\}.$$

Тогда, каким бы ни было решение σ, мы имеем $y_k \in K$ для всех k. Кроме того, существует $C_K > 0$ такое, что

$$d_H(F(t,x,y), 0) \le C_K(1 + |x|) \qquad \forall t \in [0,T] \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \;\; \forall y \in K.$$

Следовательно, любое решение включения (2.1), соответствующее некоторому $y \in K$, будет также решением включения

$$\dot{x} \in B\left(0, C_K(1 + |x|)\right).$$

В частности, если обозначить через $S_B(t,x)$ интегральную воронку этого включения, выходящую из точки (t,x) и длящуюся вплоть до момента времени T, то $S(t,x,y) \subseteq S_B(t,x)$, $\forall t \in [0,T]$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall y \in K$. Отсюда вытекает, что для любого решения σ $(t_{k+1}, x_{k+1}) \in S_B(t_k, x_k)$, $\forall k$. В силу полугрупповых свойств интегральной воронки получаем, что

$$(t_k, x_k) \in S_B(t_0, x_0) \qquad \forall k.$$

Интегральную воронку $S_B(t_0, x_0)$ легко оценить с помощью леммы Беллмана-Гронуолла:

$$S_B(t_0, x_0) \subset [t_0, T] \times B\left(x_0, C_K(T - t_0)e^{C_K(T-t_0)}\right).$$

Пусть $Q_x = \{x \, : \; (t,x,y) \in Q\}$. Тогда

$$S_B(t_0, x_0) \subset [0,T] \times B\left(Q_x, C_K T e^{C_K T}\right) \qquad \forall t_0 \in [0,T] \;\; \forall x_0 \in Q_x.$$

Следовательно, введя обозначение

$$M = [0,T] \times B\left(Q_x, C_K T e^{C_K T}\right),$$

мы можем записать
$$x_k \in M \qquad \forall k,$$
если x_k — компонента произвольного решения σ. Таким образом, все решения системы (2.2)–(2.5) принадлежат множеству $([0,T] \times M \times K)^{N+1}$.

2. Докажем, что множество решений замкнуто. Согласно [5, следствие 5.2] многозначное отображение S является полунепрерывным сверху, а его значения являются компактными множествами. Поэтому теми же свойствами обладает сужение S на множество $[0,T] \times M \times K$. Кроме того, это сужение является ограниченным, а значит имеет замкнутый график. Пусть σ_h — последовательность решений, сходящаяся к некоторому σ при $h \to \infty$. Другими словами,
$$t_k^h \to t_k, \quad x_k^h \to x_k, \quad y_k^h \to y_k \quad \forall k.$$
Кроме того,
$$(t_k^h, x_k^h, y_k^h) \in [0,T] \times M \times K \qquad \forall k \ \ \forall h.$$
Теперь, учитывая замкнутость множества Q, а также графиков многозначных отображений $S|_{[0,T]\times M\times K}$ и Y, легко видеть, что σ удовлетворяет всем условиям системы (2.2)–(2.5). □

Теорема 1. *В задаче* (1.1), (1.2) *существует оптимальное управление.*

Доказательство. Нам достаточно показать, что задача (1.1), (1.2) эквивалентна задаче минимизации функции
$$\phi(\sigma) = \sum_{k=0}^{N} \phi_k(t_k, x_k, y_k),$$
на множестве решений системы (2.2)–(2.5), поскольку последняя задача имеет решение в силу леммы 1 и теоремы Вейерштрасса. Как обычно, две задачи минимизации считаются эквивалентными, если для любой допустимой точки одной из них найдется допустимая точка другой с тем же значением функционала.

Пусть ς — допустимый процесс в системе (1.1), (1.2), состоящий из траектории $x(\cdot)$ и управления $\{(u_k(\cdot), t_k, y_k)\}_{k=0}^N$. Тогда последовательность $\sigma = \{(t_k, x(t_k), y_k)\}_{k=0}^N$ очевидно является решением системы (2.2)–(2.5) и $J[\varsigma] = \phi(\sigma)$.

Обратно, пусть дана последовательность $\sigma = \{(t_k, x_k, y_k)\}_{k=0}^N$, удовлетворяющая системе (2.2)–(2.5). Согласно лемме Филиппова, для каждого $k = 0, \ldots, N-1$, существует управление $u_k(\cdot)$ такое, что траектория $x_k(\cdot)$ системы
$$\dot{x} = f(t, x, y_k, u_k(t))$$

соединяет точки (t_k, x_k) и (t_{k+1}, x_{k+1}). Положим

$$x(t) = x_k(t), \quad t \in [t_k, t_k + 1], \;\; k = 0, \ldots, N-1.$$

Легко видеть, что $\varsigma = \{(u_k(\cdot), t_k, y_k)\}_{k=0}^{N}$ — допустимый процесс в задаче (1.1), (1.2) и $J[\varsigma] = \phi(\sigma)$. □

Замечание 1. Теорема легко переносится на случай, когда число переключений не фиксировано, но ограничено некоторым N_0. Нужно лишь найти оптимальное решение для каждого $N \leq N_0$ и выбрать лучшее.

Список литературы

1. Метод улучшения управления для иерархических моделей систем сетевой структуры / В. И. Гурман, И. В. Расина, О. В. Фесько, О. В. Усенко // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2014. – Т. 8. – С. 71–85.
2. Дмитрук А. В. Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями / А. В. Дмитрук, А. М. Каганович // Нелинейная динамика и управление : сб. ст. / под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. – М. : Физматлит, 2008. – С. 101–136.
3. Сорокин С. П. Достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для задач управления гибридными системами / С. П. Сорокин // Сиб. журн. индустр. математики. – 2011. – Т. 14, № 1. – С. 102–113.
4. Garavello M. Hybrid necessary principle / Mauro Garavello, Benedetto Piccoli // SIAM J. Control Optim. – 2005. – Vol. 43, N 5. – P. 1867–1887.
5. Tolstonogov A. *Differential inclusions in a Banach space. Transl. from the Russian. Revised and updated edition.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, revised and updated edition ed., 2000. xv + 302 p.
6. Van der Schaft A., Schumacher H. *An introduction to hybrid dynamical systems.* London: Springer, 2000. xi + 174 p.

Малтугуева Надежда Станиславовна, программист, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)453037
(e-mail: `malt-nadezhda@yandex.ru`)

Погодаев Николай Ильич, кандидат физико-математических наук, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)453052
(e-mail: `n.pogodaev@icc.ru`)

N. S. Maltugueva, N. I. Pogodaev

Existence of Solutions to an Optimal Control Problem for a Hybrid System

Известия Иркутского государственного университета.
2017. Т. 19. Серия «Математика». С. 129–135

Abstract. In this note we consider an optimal control problem for a hybrid dynamical system. In Russian literature such systems are also called discrete-continuous or mixed logical dynamical systems. Hybrid systems usually appear as mathematical models of various technical processes. For example, they describe the functioning of automobile transmissions, temperature control systems, certain processes with hysteresis, dynamical systems with collisions or Coulomb friction, and many others. Mathematical theory of optimal control for such systems is currently well-developed; in particular, necessary and sufficient optimality conditions are found and numerical algorithms are constructed. On the other hand, the authors are not aware of any results on existence of optimal controls. The aim of the paper is to fill the above mentioned gap. Recall that to prove the existence is enough to show that the initial optimal control problem is equivalent to a nonlinear optimization problem that consists in minimizing a continuous function on a reachable set of the control system. Then, according to the Weierstrass theorem, conditions ensuring compactness of the reachable set also ensure the existence of an optimal control. In this work we show that a similar approach can be applied to the hybrid dynamical system. The auxiliary nonlinear optimization problem is slightly different, so that in order to prove the compactness of the feasible set one must use properties of the integral funnel of a control system rather than those of its reachable sets.

Keywords: hybrid systems, optimal control, existence theorems.

References

1. Gurman V.I., Rasina I.V., Fesko O.V., Usenko O.V. An improvement method for hierarchical models of systems with network structure. *Izv. Irkutsk. Gos. Univ. Ser. Mat.*, 2014, vol. 8, pp. 71-85. (in Russian)
2. Dmitruk A.V., Kaganovich A.M. A maximum principle for optimal control problems with intermediate constraints. *Nonlinear dynamics and control*, 2008, vol. 6, pp. 101-136, (in Russian)
3. Sorokin S. P. Dostatochnye usloviya optimal'nosti v forme printsipa maksimuma Pontryagina dlya zadach upravleniya gibridnymi sistemami [Sufficient conditions for optimality in the form of the Pontryagin maximum principle for control problems of hybrid systems]. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2011, vol. 14, no 1, pp. 102-113. (in Russian)
4. Garavello M., Piccoli B. Hybrid necessary principle. *SIAM J. Control Optim.*, 2005, vol. 43, no 5, pp. 1867-1887. https://doi.org/10.1137/S0363012903416219
5. Tolstonogov A. *Differential inclusions in a Banach space. Transl. from the Russian. Revised and updated ed.*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000. xv + 302 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9490-5
6. Van der Schaft A., Schumacher H. *An introduction to hybrid dynamical systems.* London, Springer, 2000. xi + 174 p. https://doi.org/10.1007/BFb0109998

Maltugueva Nadezhda Stanislavovna, Programmer, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: (3952)453037
(e-mail: malt-nadezhda@yandex.ru)

Pogodaev Nikolay Il'ich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: (3952)453052
(e-mail: n.pogodaev@icc.ru)