Серия «Математика»
2016. Т. 18. С. 74—92

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.647.2: 512.643.77: 512.643.72: 531.36
MSC 15A63

Знакоопределенность и приведение к полным квадратам пучка трех форм *

М. А. Новиков
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН

Аннотация.
В статье проведено исследование связи знакоопределенности связки из трех квадратичных форм с одновременной диагонализацией конгруэнтным преобразованием соответствующих этим формам матриц. Получены достаточные условия знакопеременности связки трех квадратичных форм. Они выражаются невозможностью одновременной диагонализации любых двух матриц этих форм и выполнением одного матричного равенства. При одновременной диагонализации любых двух матриц форм и выполнении упомянутого матричного равенства существует возможность одновременной диагонализации трех матриц одним линейным вещественным конгруэнтным преобразованием. Показаны знакоопределенные и знакопеременные связки из трех квадратичных форм при невыполнении последнего матричного равенства. Рассмотрена знакоопределенность связки из трех квадратичных форм, приведенных к полным квадратам. Для исследования знакоопределенности таких связок квадратичных форм предложен альтернативный подход, основанный на анализе других квадратичных форм из четырех переменных. Изучен вопрос знакопостоянства трех квадратичных форм. Приведены демонстрационные примеры.

Ключевые слова: матрицы, линейное вещественное конгруэнтное преобразование, связка квадратичных форм, знакоопределенность, знакопеременность, знакопостоянство.

Введение

Исследование устойчивости стационарных движений автономных механических консервативных систем часто проводится вторым методом [3]. Наиболее эффективным способом построения функций Ляпу-

* Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (проект N НШ-8081.2016.9) и при частичной поддержке РФФИ (проект N 15-08-06680-А).

нова является получение знакоопределенных связок Четаева [7], составленных из первых интегралов уравнений возмущенного движения. Не только в линейных, но и в нелинейных системах [2], исключением линейных слагаемых в выражениях первых интегралов уравнений возмущенного движения можно получить связку из нескольких квадратичных форм:

$$V_0(x) = \alpha_1 V_1(x) + \alpha_2 V_2(x) + \ldots + \alpha_k V_k(x), \qquad (0.1)$$

где α_i — некоторые вещественные; k, n — натуральные$(k > 1, n \geq 3)$; $V_i(x)$ — квадратичные формы от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Изучение связок форм вида (1) представляет также алгебраический интерес, когда ставится вопрос о возможности построения знакоопределенных или знакопостоянных связок квадратичных форм. В статье [4] показана знакопеременность или знакопостоянство связки из двух форм $V_1(x) = x'A_1x$, $V_2(x) = x'A_2x$ для любых вещественных α_1, α_2 при невозможности одновременной диагонализации матриц A_1, A_2 одним линейным вещественным конгруэнтным преобразованием [1]. Для связок из большего числа форм вопрос одновременной диагонализации остается открытым.

В предложенной статье проведено исследование знакоопределенности связок из трех квадратичных форм.

1. О необходимых условиях знакоопределенности связки матриц

Получение необходимых условий знакоопределенности пучка трех квадратичных форм по аналогии с [4] будет связано с приводимостью к диагональным матриц трех соответствующих квадратичных форм. Такая диагонализация трех вещественных симметричных матриц предполагает существование линейного невырожденного конгруэнтного преобразования T, так что матрицы $T'AT$, $T'BT$, $T'CT$ получаются диагональными. Этот вопрос решает

Теорема 1. *([5])*

Для одновременной диагонализации трех вещественных симметричных матриц A, B, C $(\det A \neq 0)$ *одним линейным вещественным невырожденным конгруэнтным преобразованием необходимо и достаточно выполнения трех условий:*

1) матрицы A и B одновременно диагонализируются;

2) матрицы A и C одновременно диагонализируются,

$$3) B\,A^{-1}\,C = C\,A^{-1}\,B. \qquad (1.1)$$

При симметричных матрицах A, B, C из равенства (1.1) получим $B\,A^{-1}\,C = (B\,A^{-1}\,C)'$, т. е. условие (1.1) соответствует симметричности

матрицы $B\,A^{-1}\,C$.
Матрицы B и C допускаются вырожденными. Одновременная диагонализация матриц A и B осуществляется при выполнении условий [5]:

1) решениями характеристического уравнения

$$det(B - \lambda A) = 0 \tag{1.2}$$

являются только вещественные значения;

2) матрица $(B-\lambda_i A)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ (где n — порядок матриц) имеет только простые элементарные делители.

Для трех матриц понадобится еще одно характеристическое уравнение

$$f_2(\mu) = \det{(C - \mu A)} = 0. \tag{1.3}$$

Очевидно, как и в [4], из одновременной диагонализации исходных матриц не всегда следует знакоопределенность связки построенных на этих матрицах квадратичных форм

$$K(\alpha, \beta, \gamma, x) = x' M(\alpha, \beta, \gamma) x, \tag{1.4}$$

где $M(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha A + \beta B + \gamma C$. Полагаем одну из матриц, например A, невырожденной. Тогда справедлива

Теорема 2. *Если матрицы A, B, C трех знакопеременных квадратичных форм $x'Ax$, $x'Bx$, $x'Cx$ удовлетворяют условиям:*

1) матрицы A и B одновременно не диагонализируются;

2) матрицы A и C одновременно не диагонализируются;

3) $BA^{-1}C = CA^{-1}B$,

то связка из трех квадратичных форм $K(\alpha, \beta, \gamma, x)$ не может быть знакоопределенной при любых вещественных α, β, γ.

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 первые два условия последней теоремы могут выполняться в одной из трех ситуаций:

А) уравнения (1.2) и (1.3) кроме вещественных допускают комплексные решения;

Б) уравнения (1.2) и (1.3) имеют только вещественные решения, но допускаются непростые элементарные делители;

В) одно из уравнений (1.2) или (1.3) допускает комплексные корни, другое — вещественные корни с непростыми элементарными делителями.

В каждой ситуации матрицы A, B, C можно конгруэнтным преобразованием [6] привести к более простым выражениям. Если характеристическое уравнение (1.2) имеет пару комплексно сопряженных корней: $\lambda_1 = a + ib$, $\quad \lambda_2 = a - ib$, где $i^2 = -1$, то существует вещественное преобразование $x = T_1 y$, приводящее исходные матрицы к взаимно упрощенным:

$$\bar{A} = T_1' A T_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad \bar{B} = T_1' B T_1 = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\bar{A}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B_{11} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Построенная на этих матрицах частичная связка квадратичных форм

$$K_1(\sigma, x) = x' M_1(\sigma) x, \tag{1.5}$$

где $M_1(\sigma) = B_{11} - \sigma A_{11}$, при комплексных корнях уравнения (1.2) всегда знакопеременна. Действительно, это следует из теоремы Якоби [1] при существовании отрицательного главного минора четного порядка, каким здесь является $J_2 = -[(a-\sigma)^2 + b^2]$.

При кратных вещественных корнях $\lambda = a_1$ уравнения (1.1) кратности $m = 2k$ с числом k $(k > 1)$ непростых элементарных делителей можно составить такие взаимно упрощенные матрицы:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix}; \qquad B_{11} = \begin{pmatrix} (a_1 E_k + I_1) & 0 \\ 0 & (-a_1 E_k + I_1) \end{pmatrix};$$

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичная частичная связка из двух квадратичных форм для m переменных в этом случае так же знакопеременна. Здесь существует отрицательный главный минор второго порядка $[-(a_1 - \sigma)^2 - 1]$, составленный из k и $(k+1)$ строк и столбцов.

Иногда при $k = 1$ существуют такие взаимно упрощенные матрицы:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B_{11} = \begin{pmatrix} (b_1^2 + b_2) & b_1 \\ b_1 & (1 - b_2) \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

где отличные от нуля b_1, b_2 вещественные. Частичная связка квадратичных форм $K_1(c, x)$ в этом случае знакопостоянна. Совокупность таких частичных связок так же может получить знакопостоянную связку форм.

Матрица C при том же преобразовании приводится к виду:

$$\bar{C} = T_1' C T_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix},$$

где C_{ij} $(i,j=1,2)$ представлены блоками той же размерности, что и A_{ij}, B_{ij}.

Из третьего условия (1.1) можно составить блочные равенства:

$$\begin{cases} B_{11}A_{11}^{-1}C_{11} = C_{11}A_{11}^{-1}B_{11}, \\ B_{11}A_{11}^{-1}C_{12} = C_{12}A_{22}^{-1}B_{22}, \\ B_{22}A_{22}^{-1}C_{22} = C_{22}A_{22}^{-1}B_{22}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Для исследования знакоопределенности связки форм (1.4) больший интерес представляет связка квадратичных форм:

$$K_{11}(\alpha,\beta,\gamma,z) = z'M_{11}(\alpha,\beta,\gamma)z,$$

где $M_{11}(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha A_{11} + \beta B_{11} + \gamma C_{11}$, $z \in R^{2k}$, $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2$, $\ldots, z_{2k} = y_{2k}$. В случае одного комплексно-сопряженного корня уравнения (1.2) или при одном вещественном двукратном корне с непростыми элементарными делителями рассматривается $k=1$; а в случае вещественного кратного корня уравнения (1.2), кратности выше двух, с непростыми элементарными делителями принимается значение $k>1$.

Рассмотрим подробно описанные ситуации.

А. В случае одного комплексно сопряженного корня уравнения (1.2) с ненулевой вещественной частью положим:

$$C_{11} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

где c_j — вещественные $(j=1,2,3)$. Из первого матричного равенства (1.7) единственно следует: $c_3 = -c_1$. Связка матриц $M_{11}(\alpha,\beta,\gamma)$ тогда принимает вид:

$$\begin{pmatrix} (\alpha+\beta a+\gamma c_1) & (\beta b+\gamma c_2) \\ (\beta b+\gamma c_2) & -(\alpha+\beta a+\gamma c_1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель, равный $\det M_{11}(\alpha,\beta,\gamma) = -[(\alpha+\beta a+\gamma c_1)^2 + (\beta b + \gamma c_2)^2] < 0$, получается отрицательным ввиду $M_{11} \not\equiv 0$. Так как один из главных миноров четного порядка меньше нуля, то по теореме Якоби [1] связка форм $K_{11}(\alpha,\beta,\gamma,z)$ знакопеременна. Следовательно, полная связка форм $K(\alpha,\beta,\gamma,x)$ тоже знакопеременна.

Б. Во второй ситуации при $2k$-кратном вещественном корне $\lambda = a_1$ с k непростыми элементарными делителями пусть матрица C_{11} имеет вид:

$$C_{11} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}' & D_{22} \end{pmatrix}$$

при квадратных матрицах D_{js} $(j,s=1,2)$ порядка k, где $D_{11} = dE_k + I_1$, $D_{12} = I_1$, $D_{22} = -dE_k + I_1$, d — некоторое вещественное кратное решение уравнения (1.3).

Главный минор второго порядка связки матриц $M_{11}(\alpha, \beta, \gamma)$, составленный из строк и столбцов с номерами $k, (k+1)$, здесь имеет вид:

$$J_2 = det \begin{pmatrix} (\alpha + \beta a_1 + \gamma d) & (\beta + \gamma) \\ (\beta + \gamma) & -(\alpha + \beta a_1 + \gamma d) \end{pmatrix} =$$

$= -[(\alpha + \beta a_1 + \gamma d)^2 + (\beta + \gamma \delta_1)^2] < 0$. Обращение в нуль здесь не допускается ввиду $M_{11} \not\equiv 0$. По теореме Якоби [1] отсюда следует знакопеременность связки форм $K_{11}(\alpha, \beta, \gamma, z)$, и так же для полной связки форм $K(\alpha, \beta, \gamma, x)$ при любых вещественных α, β, γ.

В случае матриц A_{11}, B_{11} вида (1.6) из первого уравнения (1.7) в качестве матрицы C_{11} получается только матрица вида A_{11} или

$$C_{11} = \begin{pmatrix} [c_{12}(b_1^2 + 1)/b_1 - c_{22}] & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что связка квадратичных форм $K_{11}(\alpha, \beta, \gamma, z)$ знакопостоянна при $b = 1$; $\alpha + \beta b_2 + \gamma(c_{12} - c_{22}) = 0$. В этом случае полная связка форм только знакопостоянна, но не является знакоопределенной.

В. Пусть в третьей ситуации матрица C_{11} соответствует комплексным корням $\mu_k = a_2 + ib_2$, $\mu_{k+1} = a_2 - ib_2$ уравнения (1.3). Матрицы B_{ij} так же строятся из системы (1.7). Построение связки $M_{11}(\alpha, \beta, \gamma)$ аналогично получает главный минор второго порядка, составленный по строкам и столбцам с номерами $k, (k+1)$:

$$J_2 = det \begin{pmatrix} (\alpha + \beta a_1 + \gamma a_2) & (\beta + \gamma b_2) \\ (\beta + \gamma b_2) & -(\alpha + \beta a_1 + \gamma a_2) \end{pmatrix} =$$

$= -[(\alpha + \beta a_1 + \gamma a_2)^2 + (\beta + \gamma b_2)^2] < 0$. Обращение в нуль здесь так же не допускается, иначе $M_{11} \equiv 0$. По теореме Якоби [1] отсюда следует знакопеременность связки форм $K(\alpha, \beta, \gamma, x)$ при всех вещественных α, β, γ. Следовательно, теорема доказана. □

2. О достаточных условиях знакоопределенности связки форм

Любое нарушение хотя бы одного из условий теоремы 2 может приводить как к знакоопределенным, так и знакопеременным пучкам форм. Рассмотрим здесь только один случай нарушения первых двух условий теоремы 2, сводящийся к самому простому анализу. В этом случае по теореме 1 матрицы A, B, C можно конгруэнтным преобразованием одновременно привести к диагональным: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, где a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$– вещественные, а формы $x'Ax$, $x'Bx$, $x'Cx$ знакопеременные. При численно заданных вещественных величинах a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ вопрос знакоопределенности связки форм $K(\alpha, \beta, \gamma, x)$ может быть решен при существовании вещественных α, β, γ для системы неравенств:

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma > 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma > 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n\alpha + b_n\beta + c_n\gamma > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Но при зависимости $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, \dots, n)$ от некоторых параметров решение системы (2.1) получить затруднительно. Поэтому в таких случаях будем применять подход, аналогичный описанному в [4]. Согласно ему существование вещественных α, β, γ для положительной определенности связки форм $K(\alpha, \beta, \gamma, x)$ следует из совместности системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = \varepsilon_1^2 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma = \varepsilon_2^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n\alpha + b_n\beta + c_n\gamma = \varepsilon_n^2 \end{cases} \tag{2.2}$$

при некоторых вещественных $\varepsilon_j \neq 0$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$. Для исследования вопроса существования вещественных решений α, β, γ последней системы предложим способ, основанный на анализе четырех строк системы (2.2):

$$\begin{cases} a_p\alpha + b_p\beta + c_p\gamma = \varepsilon_p^2 \\ a_g\alpha + b_g\beta + c_g\gamma = \varepsilon_g^2 \\ a_r\alpha + b_r\beta + c_r\gamma = \varepsilon_r^2 \\ a_t\alpha + b_t\beta + c_t\gamma = \varepsilon_t^2. \end{cases} \tag{2.3}$$

Условием ее совместности является

$$\det \begin{pmatrix} a_p & b_p & c_p & \varepsilon_p^2 \\ a_q & b_q & c_q & \varepsilon_q^2 \\ a_r & b_r & c_r & \varepsilon_r^2 \\ a_t & b_t & c_t & \varepsilon_t^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Раскрывая последнее выражение, искомый определитель запишется:

$$\varphi(p, g, r, t, \varepsilon) = -D(g, r, t)\,\varepsilon_p^2 + D(p, r, t)\,\varepsilon_g^2 - D(p, g, t)\,\varepsilon_r^2 + D(p, g, r)\,\varepsilon_t^2 = 0, \tag{2.4}$$

где

$$D(i, j, k) = \det \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{pmatrix}.$$

Для анализа знакоопределенности составим частичную связку квадратичных форм

$$K_{12}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r, t, x) = (\alpha a_p + \beta b_p + \gamma c_p)x_p^2 + (\alpha a_q + \beta b_q + \gamma c_q)x_q^2 +$$

$$+(\alpha a_r + \beta b_r + \gamma c_r)x_r^2 + (\alpha a_t + \beta b_t + \gamma c_t)x_t^2.$$

При таком подходе изучаются общие свойства существования вещественных значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. По аналогии с результатами [4] можно установить следующие очевидные свойства.

Свойство 1. Если при каких либо индексах p, q, r, t для знакопеременных форм $x'Ax,\ x'Bx$ и $x'Cx$ с диагональными матрицами A, B, C вспомогательная форма $\varphi(p, g, r, t, \varepsilon)$ знакопеременна, то связка квадратичных форм $K_{12}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r, t, x)$ знакоопределена при некоторых вещественных $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

При знакопеременности полной формы (2.4) между строками системы (2.3) существует линейная зависимость. В таком случае одно из уравнений в (2.3) можно исключить. Тогда при всех вещественных, отличных от нуля ε_j $(j \in \{\varepsilon_p, \varepsilon_q, \varepsilon_r, \varepsilon_t\})$ три величины, например $\varepsilon_p, \varepsilon_q, \varepsilon_r$ из уравнения $\varphi(p, g, r, t, \varepsilon) = 0$ рассматриваются свободными переменными, оставшаяся ε_t- зависимой переменной. Из $D(p, q, r) \neq 0$, что выполняется при полной связке формы (2.4), следует разрешимость неоднородной системы линейных независимых уравнений:

$$\begin{cases} a_p\alpha + b_p\beta + c_p\gamma = \varepsilon_p^2 \\ a_g\alpha + b_g\beta + c_g\gamma = \varepsilon_g^2 \\ a_r\alpha + b_r\beta + c_r\gamma = \varepsilon_r^2 \end{cases} \tag{2.5}$$

относительно α, β, γ при некоторых отличных от нуля $\alpha_*, \beta_*, \gamma_*$. Отсюда следует положительная определенность частичной связки квадратичных форм

$$K_{12}(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r, t, x) = \varepsilon_p^2 x_p^2 + \varepsilon_g^2 x_q^2 + \varepsilon_r^2 x_r^2 + \varepsilon_t^2(\varepsilon_p, \varepsilon_q \varepsilon_r) x_t^2. \tag{2.6}$$

При знакопеременной вспомогательной форме (2.4), состоящей из трех слагаемых, один из определителей, например $D(p, q, r) \neq 0$, а остальные отличны от нуля. В таком случае между строками с индексами q, r, t существует линейная зависимость вида: $a_t = k_1 a_q + k_2 a_r; b_t = k_1 b_q + k_2 b_r; c_t = k_1 c_q + k_2 c_r$ $(k_1, k_2 \neq 0)$, где хотя бы одно из значаний k_1, k_2 положительно, иначе форма (2.4) знакопостоянна. При этом система (2.5) так же разрешима относительно α, β, γ, и частичная связка форм имеет вид (2.6). При знакопеременной квадратичной форме (2.4), состоящей из двух слагаемых, например при $D(q, r, t) = 0,\ D(p, r, t) = 0$, две строки пропорциональны: $a_t = k_3 a_r; b_t = k_3 b_r; c_t = k_3 c_r$ $(k_3 > 0)$. В этом случае система (2.5) так же разрешима, и частичная связка форм имеет вид (2.6).

Аналогичный подход можно осуществить при знакопостоянной вспомогательной форме (2.4), когда она состоит из трех слагаемых, где $D(q, r, t) = 0$. Ввиду знакопостоянства $\varphi(p, g, r, t, \varepsilon) = 0$ единственно следует: $\varepsilon_q = \varepsilon_r = \varepsilon_t = 0$, и ε_p- свободный параметр. Система уравнений (2.5) в этом случае имеет нетривиальное решение: $\alpha = \alpha_*(\varepsilon_p), \beta =$

$\beta_*(\varepsilon_p), \gamma = \gamma_*(\varepsilon_p)$. Частичная связка $K_{12}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,r,t,x) = \varepsilon_p^2 x_p^2$ тогда знакопостоянна. Точно так же при знакопостоянной форме (2.4), состоящей из двух слагаемых $D(p,q,t)\varepsilon_r^2 + D(p,q,r)\varepsilon_t^2$, единственно получается: $\varepsilon_r = \varepsilon_t = 0$, а $\varepsilon_p, \varepsilon_q-$ свободные параметры. Форма (2.6) в этом случае принимает вид: $\varepsilon_p^2 x_p^2 + \varepsilon_q^2 x_q^2$.

С в о й с т в о 2. Если при каких либо индексах p, q, r, t для знакопеременных форм $x'Ax,\ x'Bx$ и $x'Cx$ с диагональными матрицами A, B, C вспомогательная форма $\varphi(p,g,r,t,\varepsilon)$ знакоопределена, то связка квадратичных форм $K_{12}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,r,t,x)$ знакопеременна при всех вещественных $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

В этом случае единственным решением равенства (2.4) является недопустимое тривиальное $\varepsilon_p = \varepsilon_q = \varepsilon_r = \varepsilon_t = 0$, откуда следует $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

В общем случае вопрос знакоопределенности вспомогательной формы (2.4) тесно связан с решениями системы линейных однородных алгебраических уравнений:

$$F\,L = 0, \tag{2.7}$$

где

$$F = \begin{pmatrix} a_p & a_q & a_r & a_t \\ b_p & b_q & b_r & b_t \\ c_p & c_q & c_r & c_t \end{pmatrix},\ L = (l_p, l_q, l_r, l_t)',\ l_j \in R \quad (j \in \{p,q,r,t\}).$$

При ранге F, равном трем, вспомогательная форма $\varphi(p,g,r,t,\varepsilon)$ с точностью до постоянного множителя эквивалентна выражению:

$$\psi(l,\varepsilon) = l_p\,\varepsilon_p^2 + l_q\,\varepsilon_q^2 + l_r\,\varepsilon_r^2 + l_t\,\varepsilon_t^2.$$

При ранге F, меньшем трех, вспомогательная форма $\varphi(p,g,r,t,\varepsilon)$ может тождественно обращаться в нуль. При этом $\psi(l,\varepsilon)$ единственно представляет вспомогательную форму. Система (2.7) в этом случае имеет фундаментальную систему решений от двух или трех (при ранге F, равном единице) свободных параметров. Для таких форм можно установить следующие свойства.

С в о й с т в о 3. Если при каких-либо индексах p, q, r, t для знакопеременных форм $x'Ax,\ x'Bx$ и $x'Cx$ с диагональными матрицами A, B, C имеются нетривиальные решения уравнения (2.7), все компоненты которых l_p, l_q, l_r, l_t имеют значения разных знаков (не считая нулевых), то связка квадратичных форм $K_{12}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,r,t,x)$ знакоопределена при некоторых вещественных $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

С в о й с т в о 4. Если при каких-либо индексах p, q, r, t для знакопеременных форм $x'Ax,\ x'Bx$ и $x'Cx$ с диагональными матрицами A, B, C нетривиальное решение уравнения (2.7) имеет компоненты l_p, l_q, l_r, l_t одного знака (не принимая во внимание нулевых), то связка квадратичных форм $K_{12}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,r,t,x)$ не может быть знакоопределенной.

Проводя анализ всех возможных частных связок квадратичных форм при $p, q, r, t \in \{1, 2, \dots, n\}$, можно с помощью составленных свойств сформулировать следующие утверждения.

Утверждение 1. *Если при всех допустимых наборах индексов* $p, q, r, t \in \{1, 2, \dots, n\}$ *для знакопеременных квадратичных форм* $x'Ax$, $x'Bx$ *и* $x'Cx$ *с диагональными матрицами* A, B, C *все возможные вспомогательные формы* $\varphi(p, g, r, t, \varepsilon)$ *знакопеременны, то связка квадратичных форм* $K(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *знакоопределена при некоторых вещественных* α, β, γ.

Полученное утверждение устанавливает общее свойство знакоопределенности, не давая количественной оценки на значения α, β, γ.

Утверждение 2. *Если при хотя бы одном наборе индексов* $p, q, r, t \in \{1, 2, \dots, n\}$ *для знакопеременных квадратичных форм* $x'Ax$, $x'Bx$ *и* $x'Cx$ *с диагональными матрицами* A, B, C *вспомогательная форма* $\varphi(p, g, r, t, \varepsilon)$ *знакоопределена, то связка квадратичных форм* $K(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *знакопеременна при любых вещественных* α, β, γ.

Утверждение 3. *Если для всех возможных индексов* $p, q, r, t \in \{1, 2, \dots, n\}$ *для знакопеременных квадратичных форм* $x'Ax$, $x'Bx$ *и* $x'Cx$ *с диагональными матрицами* A, B, C *не имеется ни одной знакоопределенной вспомогательной формы* $\varphi(p, g, r, t, \varepsilon)$ *и допускаются знакопостоянные, а уравнения (2.7) имеют нетривиальные различные значения* $L_1, L_2, \dots, L_k$ $(k > 1)$, *то связка квадратичных форм* $K(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *знакопеременна при любых вещественных* α, β, γ.

Утверждение 4. *Если для всех возможных индексов* $p, q, r, t \in \{1, 2, \dots, n\}$ *для знакопеременных квадратичных форм* $x'Ax$, $x'Bx$ *и* $x'Cx$ *с диагональными матрицами* A, B, C *не существует ни одной знакоопределенной вспомогательной формы* $\varphi(p, g, r, t, \varepsilon)$ *и имеются несколько знакопостоянных вспомогательных форм*

$$\varphi(p, g, r, t, \varepsilon),$$

имеющих единственное решение L *для уравнений вида (2.7), то связка квадратичных форм* $K(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *знакопостоянна при некоторых вещественных* α, β, γ.

В случае трех переменных знакоопределенность связки форм решает

Теорема 3. *Связка* $K(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *из трех знакопеременных квадратичных форм* $x'Ax$, $x'Bx$ *и* $x'Cx$ *трех переменных, представленных диагональными матрицами* A, B, C, *знакоопределена при выполнении одного из условий:*

$$1)\ detF_1 \neq 0, \qquad F_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

2) $detF_1 = 0$, *и все нетривиальные решения* $L_1 = (l_1, l_2, l_3)$ *уравнения* $F_1L_1 = 0$ *с компонентами* l_i $(i = 1, 2, 3)$ *не допускают значений одного знака.*

Доказательство. Вопрос знакоопределенности такой связки форм сводится к существованию нетривиальных вещественных решений системы вида (2.5). В случае $detF_1 \neq 0$ искомые параметры α, β, γ всегда можно подобрать из условия существования обратной матрицы F_1 [1] при отличных от нуля $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

При $detF_1 = 0$ знакоопределенная форма $\psi_1(l, \varepsilon) = l_1\varepsilon_1^2 + l_2\varepsilon_2^2 + l_3\varepsilon_3^2$ ооответствует, как и при свойстве 2, знакопеременности связки квадратичных форм $K(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Знакопостоянные формы $\psi_1(l, \varepsilon)$ могут существовать при ранге матрицы F_1, равном единице или двум, и имеют место для знакопостоянных связок $K(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Нужное условие теоремы при $detF_1 = 0$ следует из аналогичного свойства 3. □

Теорема 2 имеет прямое отношение к необходимым условиям знакоопределенности связки из трех квадратичных форм. Для матриц второго и третьего порядков первые два условия теоремы 2 выражаются одним строгим неравенством, соответственно, дискриминантами уравнения второй и третьей степени. Обращение дискриминанта в нуль требует дополнительного анализа и может приводить к неоднозначным ситуациям. Изменение знаков в выражениях дискриминантов на противоположные при выполнении третьего пункта теоремы 2 приводит к одновременной диагонализации трех матриц квадратичных форм. Тогда знакоопределенность связки трех квадратичных форм устанавливается теоремой 3. Такой подход может успешно применяться как для числовых, так и параметрических матриц.

3. Примеры

Для наглядности демонстрационные примеры приведены вычислительными.

Пример 1. Пусть квадратичные формы заданы матрицами:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -11 & -3 & 0 & -7 \\ -3 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ -7 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -46 & 6 & -4 & -28 \\ 6 & 16 & 10 & 8 \\ -4 & 10 & 6 & 0 \\ -28 & 8 & 0 & -16 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -13 & -4 & -10 & -11 \\ -4 & 0 & 8 & 0 \\ -10 & 8 & 1 & -5 \\ -11 & 0 & -5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что все квадратичные формы знакопеременны. Характеристические уравнения вида (1.2) и (1.3) здесь следующие:

$$f_1(\lambda) = det(B_1 - \lambda A_1) = (\lambda - 2)^4 = 0;$$

$$g_1(\mu) = det(C_1 - \mu A_1) = (\mu^2 - 2\mu + 2)^2 = 0.$$

Первое уравнение имеет четырехкратный вещественный корень $\lambda = 2$ с не всеми простыми элементарными делителями, второе уравнение содержит все комплексные решения. Проведенные вычисления получают

$$B_1 A_1^{-1} C_1 = \begin{pmatrix} -43 & -12 & -27 & -34 \\ -12 & 16 & 20 & 0 \\ -27 & 20 & 1 & -14 \\ -34 & 0 & -14 & -24 \end{pmatrix} = C_1 A_1^{-1} B_1.$$

Тогда по теореме 2 можно заключить о невозможности получения знакоопределенной связки трех квадратичных форм $K(\alpha, \beta, \gamma, x)$ при всех возможных вещественных α, β, γ. А учитывая все только комплексные корни второго уравнения, исходная связка форм будет только знакопеременная.

Пример 2. Пусть квадратичные формы заданы матрицами:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -11 & 18 & 1 & 11 \\ 18 & -29 & -3 & -17 \\ 1 & -3 & 6 & 0 \\ 11 & -17 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 17 & -21 & -32 & -9 \\ -21 & 24 & 53 & 16 \\ -32 & 53 & -27 & -9 \\ -9 & 16 & -9 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & 12 & 18 \\ -3 & 12 & -37 & -1 \\ -12 & 18 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Из существования отрицательных главных миноров первого порядка всех матриц следует знакопеременность исходных квадратичных форм. Вычисление матрицы

$$B_2 A_2^{-1} C_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -19 & 0 & 170 & 35 \\ 0 & 48 & -294 & -78 \\ 170 & -294 & 254 & 128 \\ 35 & -78 & 128 & 11 \end{pmatrix} = C_2 A_2^{-1} B_2$$

приводит к выполнению равенства (1.1).

Характеристические уравнения вида (1.2) и (1.3) будут следующими:

$$f_2(\lambda) = det(B_2 - \lambda A_2) = (\lambda - 1)\ (\lambda + 4)(2\lambda - 3)(3\lambda + 5) = 0;$$

$$g_2(\mu) = det(C_2 - \mu A_2) = (\mu + 2)\ (\mu + 3)\ (2\mu + 1)(3\mu + 2) = 0.$$

Ввиду вещественных корней с всеми простыми элементарными делителями и симметричности выражения $B_2A_2^{-1}C_2$ матрицы A_2, B_2, C_2 по теореме 1 можно одновременно диагонализировать [5]. Линейное конгруэнтное преобразование строится по любым двум матрицам, и тогда матрицу преобразования выберем

$$T_2 = \begin{pmatrix} 23 & 17 & 9 & 15 \\ 15 & 11 & 6 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad det T_2 = 1.$$

Вычисления получают

$$\bar{A}_2 = T_2' A_2 T_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_2 = T_2' B_2 T_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_2 = T_2' C_2 T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом примере участвуют четыре переменные, поэтому можно составить единственную вспомогательную форму

$$\varphi(1, 2, 3, 4, \varepsilon) = -63\varepsilon_1^2 - 35\varepsilon_2^2 + 49\varepsilon_3^2 + 35\varepsilon_4^2.$$

Так как она знакопеременна, то по утверждению 1 связка квадратичных форм знакоопределена. Хотя здесь нет алгоритма нахождения значений параметров $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, но существует теоретическая возможность построения знакоопределенной связки форм. Отметим, что можно составить знакоопределенную связку форм из $\bar{V}_1(y) = y'\bar{A}_2 y$ и $\bar{V}_3(y) = y'\bar{C}_2 y,\ y \in R^4$. Действительно, здесь $\lambda_{min}^{(-)} = -2/3 > -2 = \lambda_{max}^{(+)}$, что по теореме Кузьмина [2; 4] соответствует отрицательно определенной связке квадратичных форм $y'(\bar{C}_2 - \sigma\bar{A}_2)y \quad (y \in R^4)$ при $\sigma \in (-2; -2/3)$, т.е. при $\alpha = -\sigma,\ \beta = 0,\ \gamma = 1$.

Пример 3. Пусть квадратичные формы заданы матрицами:

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \ B_3 = \begin{pmatrix} 22 & 2 & 13 \\ 2 & -4 & 1 \\ 13 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \ C_3 = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 6 \\ -8 & -12 & -5 \\ 6 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Все квадратичные формы здесь знакопеременны. Характеристические уравнения вида (1.2) и (1.3) из заданных матриц здесь следующие:

$$f_3(\lambda) = det(B_3 - \lambda A_3) = (\lambda + 3)\ (4\lambda^2 + 8\lambda + 5) = 0;$$

$$g_3(\mu) = det(C_3 - \mu A_3) = (\mu + 1)(4\mu^2 + 24\mu + 37) = 0.$$

Соответственно решения обоих уравнений имеют комплексно-сопряженные корни. Матрица $B_3 A_3^{-1} C_3$ вычисляется несимметричной

$$B_3 A_3^{-1} C_3 = -1/2 \begin{pmatrix} 146 & 55 & 77 \\ 34 & -7 & 17 \\ 80 & 31 & 43 \end{pmatrix}.$$

Так как теорема 2 здесь не выполняется, то вопрос о знакоопределенности связки форм здесь не очевиден. В частности, можно показать, что матрица

$$D_1 = 6B_3 - \ A_3 - 4\ C_3 = \begin{pmatrix} 94 & 38 & 56 \\ 38 & 20 & 22 \\ 56 & 22 & 34 \end{pmatrix}$$

имеет все положительные главные миноры. Действительно, здесь главные миноры, начиная с первого, равны:$J_1 = 94 > 0$; $J_2 = d_{11}d_{22} - d_{12}^2 = 436 > 0$; $J_3 = detD_1 = 240 > 0$. По теореме Сильвестра [1] квадратичная форма $x'D_1x$ положительно определена. Таким образом, при заданном частном наборе параметров $\alpha = -1,\ \beta = 6,\ \gamma = -4$ можно составить положительно определенную связку квадратичных форм. Следовательно связка трех квадратичных форм $x'(\alpha A_3 + \beta B_3 + \gamma C_3)x$ знакоопределена.

Пример 4. Пусть матрицы квадратичных форм $A_4 = A_2$ и $B_4 = B_2$ заданы как в примере 2, а последняя матрица имеет вид:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 12 & -14 & -23 & -2 \\ -14 & 16 & 32 & 8 \\ -23 & 32 & 3 & -21 \\ -2 & 8 & -21 & 6 \end{pmatrix}.$$

Вычисление матрицы

$$B_4 A_4^{-1} C_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 26 & -45 & 80 & 80 \\ -45 & 93 & -204 & -123 \\ 80 & -204 & 434 & 38 \\ 80 & -123 & 38 & 56 \end{pmatrix} = C_4 A_4^{-1} B_4$$

приводит к выполнению равенства (1.1). Характеристические уравнения (1.2) и (1.3) будут здесь такими:

$$f_4(\lambda) = det(B_4 - \lambda A_4) = (\lambda - 1)(\lambda + 4)(2\lambda - 3)(3\lambda + 5) = 0;$$

$$g_4(\mu) = det\ (C_4 - \mu A_4) = (\mu - 3)\ (\mu + 3)(2\mu + 1)(3\mu + 2) = 0.$$

Ввиду вещественности всех корней обоих уравнений с всеми простыми элементарными делителями и симметричности выражения $B_4 A_4^{-1} C_4$ матрицы A_4, B_4, C_4 можно одновременно диагонализировать [5] одним конгруэнтным преобразованием. Линейное вещественное конгруэнтное преобразование $x = T_4 y$ строится по любым двум матрицам, и матрицу преобразования в частности можно выбрать равной $T_4 = T_2$. Вычисления получают:

$$\bar{A}_4 = \bar{A}_2; \qquad \bar{B}_4 = \bar{B}_2; \qquad \bar{C}_4 = T_4' C_4 T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Можно убедиться по теореме Кузьмина [2; 4], что любые две формы из полученных матриц не могут составить знакоопределенную связку форм. Вместе с тем составим форму $\varphi(1,2,3,4,\varepsilon) = 7\varepsilon_1^2 - 35\varepsilon_2^2 - 111\varepsilon_3^2 - 65\varepsilon_4^2$. Так как последняя получается знакопеременной, то по первому свойству связка квадратичных форм $K(\alpha,\beta,\gamma,x)$ будет знакоопределенной. Хотя численные оценки для α,β,γ здесь не приведены, но как и в третьем примере можно показать знакоопределенность связки квадратичных форм $y'(\alpha\bar{A}_4 + \beta\bar{B}_4 + \gamma\bar{C}_4)y,\ y \in R^4$. Этого можно достичь, например, при $\alpha = -27,\ \beta = -24,\ \gamma \in (21; 23)$.

Пример 5. Пусть заданы матрицы квадратичных форм:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 & -5 & 5 \\ -2 & -3 & 13 & -4 & 7 \\ 0 & 13 & -9 & 2 & 3 \\ -5 & -4 & 2 & 3 & -5 \\ 5 & 7 & 3 & -5 & 12 \end{pmatrix}, B_5 = \begin{pmatrix} -34 & 6 & -12 & 24 & -31 \\ 6 & 20 & -2 & -8 & 16 \\ -12 & -2 & 14 & 2 & 2 \\ 24 & -8 & 2 & -16 & 11 \\ -31 & 16 & 2 & 11 & -13 \end{pmatrix},$$

$$C_5 = \begin{pmatrix} -15 & -5 & -22 & 23 & -29 \\ -5 & 27 & 24 & -18 & 30 \\ -22 & 24 & 30 & -9 & 21 \\ 23 & -18 & -9 & -6 & -3 \\ -29 & 30 & 21 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$B_5 A_5^{-1} C_5 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 272 & -163 & 46 & -158 & 113 \\ -163 & 134 & 91 & 22 & 41 \\ 46 & 91 & 143 & -139 & 184 \\ -158 & 22 & -139 & 191 & -173 \\ 113 & 41 & 184 & -173 & 245 \end{pmatrix}$$

здесь симметричная, откуда следует выполнение условия (1.1). Характеристические уравнения (1.2) и (1.3) в данном примере следующие:

$$f_5(\lambda) = det(B_5 - \lambda A_5) = (\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda + 4)(2\lambda - 3)(3\lambda + 5) = 0;$$

$$g_5(\mu) = det(C_5 - \mu A_5) = (\mu - 3)(\mu + 3)(2\mu + 1)(2\mu + 3)(3\mu + 2) = 0.$$

Здесь корни обоих уравнений вещественные со всеми простыми элементарными делителями. Тогда матрицы A_5, B_5, C_5 можно одновременно диагонализировать [5] одним конгруэнтным преобразованием. Линейное вещественное конгруэнтное преобразование $x = T_5 y$ построим по двум исходным матрицам, и пусть матрицей преобразования задается

$$T_5 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 & 16 & 12 \\ 2 & 6 & 5 & 11 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 15 & 11 \\ 3 & 7 & 5 & 12 & 9 \\ -2 & -6 & -5 & -12 & -9 \end{pmatrix}, \qquad det T_5 = 1.$$

Вычисления получают

$$\bar{A}_5 = T_5' A_5 T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \bar{B}_5 = T_5' B_5 T_5 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\bar{C}_5 = T_5' C_5 T_5 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

По теореме Кузьмина [2; 4] можно установить невозможность получения знакоопределенных связок из любых двух квадратичных форм, построенных на матрицах $\bar{A}_5, \bar{B}_5, \bar{C}_5$. Тогда составим вспомогательные формы: $\varphi(2,3,4,5,\varepsilon) = -111\varepsilon_2^2 - 108\varepsilon_3^2 + 27\varepsilon_4^2 - 24\varepsilon_5^2$, $\varphi(1,3,4,5,\varepsilon) = -111\varepsilon_1^2 - 65\varepsilon_3^2 + 7\varepsilon_4^2 - 35\varepsilon_5^2$, $\varphi(1,2,4,5,\varepsilon) = 108\varepsilon_1^2 - 65\varepsilon_2^2 + 9\varepsilon_4^2 + 20\varepsilon_5^2$, $\varphi(1,2,3,5,\varepsilon) = 27\varepsilon_1^2 - 7\varepsilon_2^2 + 9\varepsilon_3^2 + 7\varepsilon_5^2$, $\varphi(1,2,3,4,\varepsilon) = 24\varepsilon_1^2 - 35\varepsilon_2^2 - 20\varepsilon_3^2 + 7\varepsilon_4^2$. Так как все вспомогательные формы знакопеременные (хотя достаточно и одной), то по утверждению 1 связка квадратичных форм $\bar{K}(\alpha, \beta, \gamma, y)$ будет знакоопределенной. Действительно, в этом можно убедиться построением аналитического решения для нахождения коэффициентов α, β, γ. Для этого из элементов матриц $\bar{A}_5, \bar{B}_5, \bar{C}_5$ составим систему неравенств:

$$\begin{cases} \alpha - 4\beta - 3\gamma > 0, \\ 2\alpha - 6\beta - 3\gamma > 0, \\ 2\alpha + 3\beta + 6\gamma > 0, \\ -3\alpha + 5\beta + 2\gamma > 0, \\ -2\alpha - 2\beta + \gamma > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Исключая из (3.1) параметр α элементарными преобразованиями, что выполняется линейной комбинацией с положительными коэффициентами первых трех строк с четвертой (3.1), затем так же линейной комбинацией первых трех строк с пятой, получим:

$$\begin{cases} 19\beta + 22\gamma > 0, & \beta + 7\,\gamma > 0, \\ -\beta - \gamma > 0, & -8\beta - 5\gamma > 0, \\ -2\beta - \gamma > 0, & -4\beta - \gamma > 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Точно такое же исключение из (3.2) параметра β приводит к восьми неравенствам, где всюду следуют неравенства $\gamma > 0$. Аналогично исключение из (3.2) переменной γ получает $\beta < 0$. Решение неравенств (3.2) в совокупности позволяет установить

$$-\frac{22}{19}\gamma < \beta \ < -\gamma.$$

Аналогично вначале исключая из (3.1) параметр β, затем α, получим

$$\gamma > 0, \quad -\frac{3}{2}\gamma \ < \alpha < -\gamma.$$

Полагая теперь $\gamma = 38$, получим область параметров:

$$\alpha \in (-57; -38); \quad \beta \in (-44; -38),$$

в которой связка квадратичных форм $\bar{K}(\alpha, \beta, \gamma, y)$ положительно определена. Следовательно, исключение в разном порядке двух параметров из системы неравенств (3.1) позволяет найти область α, β, γ знакоопределенности связки форм (1.3). Такой же подход к построению аналитического решения коэффициентов α, β, γ может применяться в предыдущем примере.

Второй, четвертый и последний примеры показали эффективность применения вспомогательных квадратичных форм, которые легко вычисляются и не требуют дополнительного анализа. Такой подход можно без затруднений распространять на связки с большим числом квадратичных форм.

4. Заключение

В статье получены достаточные условия, при которых связка трех квадратичных форм не получается знакоопределенной для любых значений коэффициентов связки. Они выражаются невозможностью одновременной диагонализации трех матриц этих форм, и одновременной диагонализации двух любых матриц. При этом должно выполняться матричное равенство (1.1). Показано, что при не выполнении последнего матричного равенства связка форм может быть не только знакопеременной, но и знакоопределенной. Проведено исследование знакоопределенности связки трех квадратичных форм, одновременно приведенных к полным квадратам. Предложенный в статье подход основан на последовательном анализе связки из любых четырех переменных. Такой способ анализа прямо связан с другой вспомогательной квадратичной формой, построенной из коэффициентов форм, приведенных к полным квадратам. Анализ последних форм значительно проще исследования знакоопределенности связки исходных форм.

Можно составить общее заключение, что для пучка трех квадратичных форм ввиду больших возможностей знакоопределенности связки квадратичных форм, даже при невозможности одновременной диагонализации любых двух матриц, нет такой тесной связи с диагонализацией соответствующих матриц, как для пучка двух квадратичных форм.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
2. Кузьмин П. А. Малые колебания и устойчивость движения / П. А. Кузьмин. – М. : Наука, 1973. – 206 с.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов // Ляпунов А. М. Собр. соч. – М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – С. 7–263
4. Новиков М. А. Связь знакоопределенности с приведением к полным квадратам пучка двух квадратичных форм / М. А. Новиков // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Сер. Математика и информатика. – 2015. – Вып. 9. – С. 7–15.
5. Новиков М. А. Одновременная диагонализация трех вещественных симметричных матриц / М. А. Новиков // Изв. вузов. Математика. – 2014. – Т. 12. – С. 70–82.
6. Новиков М. А. О приведении матриц квадратичных форм к взаимно упрощенным / М. А. Новиков // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2010. – № 2 (26). – С. 181–187.
7. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике / Н. Г. Четаев. – М. : Изд-во АН СССР, 1962. – 535 с.

Новиков Михаил Алексеевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 453096, (e-mail: nma@icc.ru).

M. A. Novickov

Signdefiniteness and Reduction to Full Squares for the Bundle of Tree Quadratic Forms

Abstract. The paper discusses the investigation of the relation of signdefiniteness of the bundle of three quadratic forms with to the simultaneous diagonalization by congruent transformation of matrices of the respective quadratic forms. sufficient conditions for the non-definiteness of the bundle of three quadratic forms have been obtained. These conditions are bound up with the impossibility of simultaneous diagonalization of any two matrices of these forms and satisfaction of one matrix inequality. In case of simultaneous diagonalization of any two matrices and satisfaction of the latter matrix equality, simultaneous diagonalization of all three matrices is possible. Signdefinite and signvariable bundles of three quadratic forms are shown in the case when the last matrix equality fails to be satisfied Signdefiniteness of the bundle of three quadratic forms reduced to full squares is considered. For the purpose of investigation of signdefiniteness of such bundles of forms we have proposed an alternative approach based om analysis of quadratic forms of four variables. The issue of signconstancy of bundles of three signvariable quadratic forms has been investigated. Demonstrative examples are given.

Keywords: matrices, linear real congruent transformation, bundle of quadraticforms, signdefiniteness, sign-variability, sign-constancy.

References

1. Gantmacher F.R. The Theory of Matrices. Moscow, Nauka Publ., 1967. 576 p.
2. Kuzmin P.A. Small Oscillation and Stability of Motion. Moscow, Nauka Publ., 1973. 206 p.
3. Lyapunov A.M. General Problem of Stability of Motion. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1956, vol. 2, pp. 7-263.
4. Novickov M.A. Correlation of sign definiteness with reduction to perfect square of twoquadratic forms bundle. *Bulletin of Burjat State University. Mathematics and Computer Science*, 2015, vol. 9, pp. 7-15.
5. Novickov M.A. Simultaneous diagonilization of three real symmetric matrices. *Investiya Vuzov. Mathematics*, 2014, no 1, pp. 70-82
6. Novickov M.A. Reduction of matrices of quadratic forms to reciprocally simplifed ones. *Contemporary Technologies. Systems Analysis. Modelling*, 2010, no 2 (26), pp. 181-187
7. Chetayev N.G. Stabiity of Motion. Works in Analytical Mechanics. Moscow, USSR Acad. Sci. Publ., 1962. 535 p.

Novickov Michail Alexeevich, Senior Scientist, Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: (3952) 453096, (e-mail: nma@icc.ru).