



Серия «Математика»

2016. Т. 18. С. 21–37

Онлайн-доступ к журналу:

<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 517.958:519.633

MSC 35K65

Решение двумерной задачи о движении фронта тепловой волны с использованием степенных рядов и метода граничных элементов*

А. Л. Казаков

Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Л. Ф. Спевак

Институт машиноведения УрО РАН

О. А. Нефедова

Институт машиноведения УрО РАН

Аннотация. В работе рассматривается нелинейное параболическое уравнение, описывающее процесс теплопроводности в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. Помимо распространения тепла в пространстве, оно моделирует также фильтрацию политропного газа в пористой среде, в связи с чем в англоязычной литературе его обычно называют «the porous medium equation». Отличительной особенностью данного уравнения является вырождение его параболического типа в случае, когда обращается в нуль искомая функция, вследствие чего уравнение приобретает свойства, обычно характерные для уравнений первого порядка. В частности, для него в некоторых случаях удается обосновать теоремы существования и единственности решений типа тепловой волны (волны фильтрации). В настоящей статье доказана теорема существования и единственности решения задачи о движении тепловой волны с заданным фронтом в случае двух независимых переменных. При этом, поскольку фронт имеет вид замкнутой плоской кривой, то производится переход в полярную систему координат. Решение строится в виде ряда, для вычисления коэффициентов которого предложена конструктивная рекуррентная процедура. Сходимость ряда доказывается при помощи метода мажорант. Разработан и реализован в виде программы для ЭВМ вычислительный алгоритм на основе метода граничных элементов для решения изучаемой задачи. Рассмотрены тестовые примеры, причем расчеты, выполненные с помощью созданной авторами программы, сравнивались с отрезками построенных рядов. Установлено хорошее соответствие полученных результатов.

* Работа выполнена при частичной поддержке Комплексной программы УрО РАН (проект № 15-7-1-17) и РФФИ (проект № 16-01-00608).

Ключевые слова: нелинейные уравнения с частными производными, тепловая волна, степенной ряд, теорема существования и единственности, метод граничных элементов, вычислительный эксперимент.

Введение

В данной работе рассматривается нелинейное параболическое уравнение, описывающее процесс теплопроводности в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры [7; 16]

$$T_t = \alpha \operatorname{div}(T^\sigma \nabla T). \quad (0.1)$$

Здесь t — время, T — искомая функция (температура), α , σ — положительные константы, div , ∇ — дивергенция и градиент по пространственным координатам. Помимо распространения тепла в пространстве, уравнение (0.1) описывает также фильтрацию политропного газа в пористой среде [1; 8]. В этой связи в англоязычной литературе его обычно называют «the porous medium equation» [16].

Уравнение (0.1) стандартной заменой $u = T^\sigma$, $t' = \alpha t$ преобразуется к виду

$$u_t = u \Delta u + \frac{1}{\sigma} (\nabla u)^2. \quad (0.2)$$

Уравнение (0.2) и будет в дальнейшем объектом исследования. Отметим, что характерной его особенностью является вырождение параболического типа при $u = 0$ (поскольку обращается в нуль множитель перед лапласианом в правой части). Следствием этого становится появление у решений уравнения (0.2) в окрестности линии (точки, поверхности) вырождения некоторых свойств, обычно характерных для уравнений первого порядка. В частности, в ряде случаев удается доказать для него теоремы существования и единственности решений типа тепловой волны (волны фильтрации) [2; 8]. Обзор литературы по данной тематике, включая обсуждение терминологии, можно найти в [3]. Здесь укажем лишь, что наиболее известной задачей, которая порождает решения типа тепловой волны, является «задача А.Д. Сахарова» [8]. Ее исследованию посвящено значительное количество работ в научной школе академика РАН А.Ф. Сидорова (см., например, [2; 3; 4]). Однако в литературе встречаются и другие постановки [5]. Одной из рассматриваемых задач является задача о движении тепловой волны с заданным фронтом [8], для которой в случае одной пространственной переменной доказана [2] теорема существования и единственности в классе аналитических функций. В упомянутой работе [2] обсуждается также возможность обоснования для случая большей размерности (в квазидномерной постановке) аналогичного утверждения, однако доказательство последнего не приводится.

Как хорошо известно, возможности аналитических методов при построении и исследовании решений нелинейных задач математической физики весьма ограничены. Так, все теоремы существования и единственности, которые упоминались выше, являются локальными. В этой связи аналитическое исследование в данном случае целесообразно дополнять численным [5]. Авторами ранее были предложены вычислительные алгоритмы для решения задач о тепловой волне на основе метода граничных элементов (МГЭ) в случае одной пространственной переменной. В серии публикаций, первая из которых вышла в 2012 г. [6], рассмотрены случаи плоской [6; 13], сферической и цилиндрической [4; 14] симметрии. Полученные в этих работах результаты показывают эффективность МГЭ для решения указанных задач на заданном конечном промежутке времени. Характерной особенностью указанных статей является то, что при исследовании задач о тепловой волне одновременно используется МГЭ и метод степенных рядов (как правило, при этом одновременно доказываются теоремы существования и единственности аналитических решений).

В настоящей работе, продолжающей упомянутые выше исследования авторов, этот же подход развит на случай двух пространственных переменных. Доказана теорема существования и единственности решения задачи о движении тепловой волны с заданным фронтом в случае двух независимых переменных. При этом, поскольку фронт имеет вид замкнутой плоской кривой, то производится переход в полярную систему координат. Решение строится в виде ряда, для вычисления коэффициентов которого предложена конструктивная рекуррентная процедура. Сходимость ряда доказывается при помощи метода мажорант. Разработан и реализован в виде программы для ЭВМ вычислительный алгоритм на основе МГЭ для решения изучаемой задачи. Рассмотрены тестовые примеры, причем расчеты, выполненные с помощью созданной авторами программы, сравнивались с отрезками построенных рядов. Установлено хорошее соответствие результатов, полученных разными методами.

1. Постановка краевой задачи

В двумерном случае уравнение (0.2) имеет вид

$$u_t = u(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + \frac{1}{\sigma}(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2). \quad (1.1)$$

Зададим краевое условие в виде

$$u|_{b(t,x_1,x_2)=0} = 0, \quad (1.2)$$

где уравнение $b(t, x_1, x_2) = 0$ в каждый момент времени определяет нулевой фронт тепловой волны $S^{(t)}$ — замкнутую гладкую линию, ограничивающую область $V^{(t)}$, содержащую начало координат. Очевидно, что функция $u \equiv 0$ удовлетворяет задаче (1.1), (1.2), однако у нее, как будет показано далее, может существовать и нетривиальное решение.

Предполагается, что если $t_1 < t_2$, то $V^{(t_1)} \subset V^{(t_2)}$ (т.е. тепловая волна движется вовне). Задача состоит в определении неотрицательной функции $u = u(t, x_1, x_2) \not\equiv 0$ в области $t \in [0, t_*]$, $x(x_1, x_2) \in \Omega^{(t)}$, где $\Omega^{(t)}$ — область, ограниченная $S^{(0)}$ и $S^{(t)}$.

Можно без труда показать, что при выполнении условия (1.2) справедливо соотношение

$$q|_{b(t, x_1, x_2)=0} = \frac{\sigma b_t(t, x_1, x_2)}{\sqrt{b_{x_1}^2(t, x_1, x_2) + b_{x_2}^2(t, x_1, x_2)}}, \quad (1.3)$$

где $q = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ — тепловой поток, \mathbf{n} — вектор внешней нормали к границе рассматриваемой области в момент времени t .

2. Теорема существования и единственности

Вначале сформулируем и докажем теорему существования и единственности нетривиального решения задачи (1.1), (1.2) в классе аналитических функций с одновременным построением решения в виде степенного ряда. Запишем (1.1) в полярных координатах ρ, φ

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{1}{\sigma}u_{\rho}^2 + \frac{1}{\rho}uu_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{u_{\varphi}^2}{\sigma} + uu_{\varphi\varphi} \right). \quad (2.1)$$

Здесь $x_1 = \rho \cos \varphi$, $x_2 = \rho \sin \varphi$. Краевые условия тогда примут вид

$$u|_{\rho=b(t, \varphi)} = 0. \quad (2.2)$$

Для упрощения обозначений для функции, задающей движение фронта тепловой волны, сохранено прежнее обозначение b .

Теорема 1. Пусть в задаче (2.1), (2.2) функция $b(t, \varphi)$ обладает свойствами

1. $b(t, -\pi) = b(t, \pi)$, $b(t, \varphi) > 0$.

2. $b(t, \varphi)$ и $1/b(t, \varphi)$ являются аналитическими по φ при $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ и по t в некоторой окрестности начального момента времени $t = 0$.

Тогда задача (2.1), (2.2) в некоторой окрестности замкнутой линии $\rho = b(0, \varphi)$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, имеет единственное локальное по t нетривиальное аналитическое решение.

Доказательство. Теорема 1 доказывается в два этапа. На первом этапе строится решение задачи (2.1), (2.2) в виде степенного ряда с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами, а на втором — доказывается сходимость построенного ряда.

Этап 1. Сделаем в (2.1) замену независимых переменных

$$\tau = t, s = \rho - b(t, \varphi), \psi = \varphi. \quad (2.3)$$

В данном случае производные переписутся как

$$\begin{aligned} u_\tau &= u_\tau - b_\tau u_s, u_\rho = u_s, u_\varphi = u_\psi - b_\psi u_s, u_{\rho\rho} = u_{ss}, \\ u_{\varphi\varphi} &= u_{\psi\psi} - b_{\psi\psi} u_s - 2b_\psi u_{s\psi} + b_\psi^2 u_{ss}. \end{aligned}$$

Уравнение (2.1) в результате замены (2.3) примет вид

$$\begin{aligned} u_\tau &= b_\tau u_s + uu_{ss} + \frac{u_s^2}{\sigma} + \frac{uu_s}{b+s} + \\ &+ \frac{1}{(b+s)^2} \left[uu_{\psi\psi} + \frac{u_\psi^2}{\sigma} - 2b_\psi \left(\frac{u_\psi u_s}{\sigma} + uu_{\psi s} \right) + b_\psi^2 \left(uu_{ss} + \frac{u_s^2}{\sigma} \right) - ub_{\psi\psi} u_s \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Преобразуем (2.4) к более удобному виду, сгруппировав слагаемые

$$\begin{aligned} u_\tau &= b_\tau u_s + B(\tau, \psi, s) \left(uu_{ss} + \frac{u_s^2}{\sigma} \right) + \frac{1}{b+s} \left(1 - \frac{b_{\psi\psi}}{b+s} \right) uu_s + \\ &+ \frac{1}{(b+s)^2} \left[uu_{\psi\psi} + \frac{u_\psi^2}{\sigma} - 2b_\psi \left(\frac{u_s u_\psi}{\sigma} + uu_{\psi s} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $B(\tau, \psi, s) = 1 + b_\psi^2 / (b+s)^2$.

Краевое условие (2.2) в данном случае переписется как

$$u|_{s=0} = 0. \quad (2.6)$$

Будем строить решение задачи (2.5), (2.6) в виде ряда по степеням s

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(\tau, \psi)}{k!} s^k, \quad (2.7)$$

где $u_k = \frac{\partial^k u}{\partial s^k} \Big|_{s=0}$. Из краевых условий имеем, что $u_0(\tau, \psi) = 0$.

Для того чтобы найти u_1 , положим в (2.5) $s = 0$. Получим

$$0 = b_\tau u_1 + \frac{1}{\sigma} B^0 u_1^2,$$

где $B^0 = B|_{s=0}$. Будем далее предполагать, что $u_1 \neq 0$ (в противном случае получим тривиальное решение). Тогда

$$u_1(\tau, \psi) = -\frac{\sigma b_\tau(\tau, \psi)}{B^0(\tau, \psi)} = -\sigma\beta(\tau, \psi).$$

Для отыскания u_2 продифференцируем обе части и положим $s = 0$

$$u_{1\tau} = b_\tau u_2 + B^0 u_1 u_2 + \frac{2}{\sigma} B^0 u_1 u_2 + \frac{2}{\sigma} B_s|_{s=0} u_1^2 + \frac{1}{b} \left(1 - \frac{b_{\psi\psi}}{b}\right) u_1^2 + \frac{1}{b^2} (-2b_\psi) \left(\frac{1}{\sigma} u_1 u_{1\psi} + u_1 u_{1\psi}\right).$$

Выразив u_2 через известные величины, имеем

$$u_2 = \frac{u_{1\tau} + \left[\frac{b_{\psi\psi}}{b} - \left(1 + \frac{2}{\sigma}\right)\right] \frac{1}{b} u_1^2 + \frac{2b_\psi}{b^2} \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) u_1 u_{1\psi}}{b_\tau + B^0 \left(1 + \frac{2}{\sigma}\right) u_1}.$$

Аналогично, дважды дифференцируя (2.5) и полагая $s = 0$, после приведения подобных слагаемых получим, что

$$u_3 = \frac{1}{b_\tau + B^0 \left(2 + \frac{2}{\sigma}\right) u_1} \left\{ u_{2\tau} - \left[\frac{2b_{\psi\psi}}{b} - 1 + \frac{3b_\psi^2}{\sigma b^2} \right] \frac{2}{b^2} u_1^2 - \left[3(b - b_{\psi\psi}) - \frac{4b_\psi^2}{b} \left(1 + \frac{2}{\sigma}\right) \right] \frac{1}{b^2} u_1 u_2 - B^0 \left(1 + \frac{2}{\sigma}\right) u_2^2 - \frac{1}{b^2} \left(u_1 u_{1\psi\psi} + \frac{1}{\sigma} u_{1\psi}^2 \right) - \frac{4b_\psi}{b^3} \left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) u_1 u_{1\psi} + \frac{2b_\psi}{b^2} \left[\left(1 + \frac{2}{\sigma}\right) u_2 u_{1\psi} + \left(2 + \frac{1}{\sigma}\right) u_1 u_{2\psi} \right] \right\},$$

и так далее — дифференцируя (2.5) k раз и полагая $s = 0$, получаем выражение следующего вида:

$$\left[B^0 \left(k + \frac{2}{\sigma} \right) u_1 + b_\tau \right] u_{k+1} = \Phi_k,$$

где Φ_k зависит от коэффициентов порядка не более k (и их производных по ψ , τ). Выражения для Φ_k здесь не приводятся из-за громоздкости. Поскольку

$$B^0 \left(k + \frac{2}{\sigma} \right) u_1 + b_\tau = -B^0 \left(k + \frac{2}{\sigma} \right) \frac{\sigma b_\tau}{B^0} + b_\tau = -(k\sigma + 1) b_\tau \neq 0,$$

то все коэффициенты ряда (2.7) отсюда определяются однозначно.

Этап 2. Докажем теперь сходимость ряда (2.7).

Из условия теоремы 1 имеем, что все $u_k(\tau, \psi)$ являются аналитическими в некоторой окрестности $\tau = 0$ и при всех $-\pi \leq \psi \leq \pi$.

Построим для (2.5), (2.6) мажорантную задачу. Для этого перейдем к новой искомой функции v по следующей формуле:

$$u = -s\sigma\beta(\tau, \psi) + s^2v. \quad (2.8)$$

В результате замены (2.8) задача (2.5), (2.6) после приведения подобных слагаемых и сокращения на sb_τ преобразуется к виду

$$\begin{aligned} 2(\sigma + 1)v + (1 + 4\sigma)sv_s + \sigma s^2v_{ss} = g(\tau, \psi, s)[1 + sG_1(\tau, \psi, s, v, v_\tau, v_\psi) + \\ + s^2G_2(\tau, \psi, s, v, v_\psi, v_s, v_{\psi\psi}, v_{s\psi}) + s^3G_3(\tau, \psi, s, v, v_\psi, v_s, v_{\psi\psi}, v_{s\psi}, v_{ss})]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Выражения для известных функций g , G_i , $i = 1, 2, 3$ здесь не приводятся из-за громоздкости. Отметим однако, что они обладают (при выполнении условий теоремы) следующими свойствами: 1) $g(\tau, \psi, s)$ – аналитическая в некоторой окрестности $\tau = 0$, $s = 0$ и при всех $-\pi \leq \psi \leq \pi$; 2) G_i , $i = 1, 2, 3$ – полиномы второй степени относительно искомой функции v и ее производных, коэффициенты которых являются функциями независимых переменных τ, ψ, s , аналитическими в некоторой окрестности $\tau = 0$, $s = 0$ и при всех $-\pi \leq \psi \leq \pi$.

Будем строить решение (2.9) в виде ряда по степеням s с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v_k(\tau, \psi)}{k!} s^k, \quad v_k = \left. \frac{\partial^k v}{\partial s^k} \right|_{s=0}. \quad (2.10)$$

Положив в (2.9) $s = 0$, имеем выражение $v_0(\tau, \psi) = g(\tau, \psi, 0)/(2\sigma + 2)$.

Для вычисления v_1 необходимо взять производную по s от обеих частей (2.9) и принять $s = 0$. Получим

$$v_1(\tau, \psi) = g_s(\tau, \psi, 0) + g(\tau, \psi, 0)[1 + G_1(\tau, \psi, 0, v_0, v_{0\tau}, v_{0\psi})]/(6\sigma + 3).$$

Далее коэффициенты ряда (2.10) находим путем последовательного дифференцирования (2.9) с последующей подстановкой $s = 0$. В результате получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} v_k(\tau, \psi) = \frac{1}{(k+2)[(k+1)\sigma + 1]} \left[\left. \frac{\partial^k g}{\partial s^k} \right|_{s=0} + k \left. \frac{\partial^{k-1}(gG_1)}{\partial s^{k-1}} \right|_{s=0} + \right. \\ \left. + k(k-1) \left. \frac{\partial^{k-2}(gG_2 + sgG_3)}{\partial s^{k-2}} \right|_{s=0} \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Можно убедиться, что правые части (2.11) при $k \geq 2$ будут зависеть от коэффициентов, порядок которых не превосходит $k - 1$, что позволяет

однозначно построить ряд (2.10). При этом из условия теоремы 1 и свойств аналитических функций следует, что все $v_k(\tau, \psi)$ являются аналитическими при $-\pi \leq \psi \leq \pi$ и в некоторой окрестности начального момента времени $\tau = 0$.

Теперь построим мажорантную задачу для (2.11). Поскольку при $k \geq 2$ справедливы очевидные неравенства

$$0 < \frac{1}{(k+2)(k\sigma + \sigma + 1)} < \frac{k}{(k+2)(k\sigma + \sigma + 1)} \leq \frac{k(k-1)}{(k+2)(k\sigma + \sigma + 1)} < \frac{1}{\sigma},$$

то мажорантная задача в данном случае имеет следующий вид:

$$V_{ss} = \frac{1}{\sigma} [F_0 + F_1(1 + V_s + V_{s\tau} + V_{s\psi}) + F_2 + sF_3], \quad (2.12)$$

$$V|_{s=0} = V_0(\tau, \psi), \quad V_s|_{s=0} = V_1(\tau, \psi). \quad (2.13)$$

Здесь $V_0(\tau, \psi)$ и $V_1(\tau, \psi)$ — функции, мажорирующие $v_0(\tau, \psi)$ и $v_1(\tau, \psi)$ соответственно (а также мажорирующие нуль); функции F_i , $i = 0, \dots, 3$ обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} F_0 &= \frac{M_0}{\left(1 - \frac{s+\tau}{R_0}\right) \left(1 - \frac{\Psi}{\Pi_0}\right)} \gg \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}, \\ F_1 &= \frac{M_1 P_1(V, V_\tau, V_\psi)}{\left(1 - \frac{s+\tau}{R_1}\right) \left(1 - \frac{\Psi}{\Pi_1}\right)} \gg \frac{\partial(gG_1)}{\partial z}, g \frac{\partial G_1}{\partial V}, g \frac{\partial G_1}{\partial V_\tau}, g \frac{\partial G_1}{\partial V_\psi}, \\ F_2 &= \frac{M_2 P_2(V, V_\tau, V_\psi, V_s, V_{\psi\psi}, V_{s\psi})}{\left(1 - \frac{s+\tau}{R_2}\right) \left(1 - \frac{\Psi}{\Pi_2}\right)} \gg gG_2, \\ F_3 &= \frac{M_3 P_3(V, V_\tau, V_\psi, V_s, V_{\psi\psi}, V_{s\psi}, V_{ss})}{\left(1 - \frac{s+\tau}{R_3}\right) \left(1 - \frac{\Psi}{\Pi_3}\right)} \gg gG_3, \end{aligned}$$

где $M_i > 0$, $R_i > 0$, $\Pi_i > \pi$, $i = 0, \dots, 3$ — константы; $P_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ — полиномы второй степени своих переменных; символ \gg означает мажорирование функции.

Для того чтобы доказать существование единственного аналитического мажорирующего нуль решения у задачи (2.12), (2.13), следует продифференцировать обе части уравнения (2.12) по s и разрешить полученное уравнение относительно V_{sss} . Получим соотношение

$$V_{sss} = \frac{\Psi(\tau, \psi, s, V, V_\tau, V_\psi, V_s, V_{\psi\psi}, V_{s\tau}, V_{s\psi}, V_{ss}, V_{s\psi\psi}, V_{ss\psi})}{1 - \frac{s}{\sigma} \frac{\partial F_3}{\partial V_{ss}}}, \quad (2.14)$$

где функция Ψ — аналитическая мажорирующая нуль, по переменной ψ область аналитичности целиком содержит отрезок $-\pi \leq \psi \leq \pi$.

Поскольку уравнение (2.14) имеет третий порядок, для того чтобы записать условия Коши, необходимо к условиям (2.13) добавить условие на вторую производную $V_{ss}|_{s=0}$, которое несложно получить, положив в обеих частях (2.12) $s = 0$. В результате имеем, что

$$\begin{aligned} V|_{s=0} &= V_0(\tau, \psi), V_s|_{s=0} = V_1(\tau, \psi), \\ V_{ss}|_{s=0} &= \frac{1}{\sigma} [F_0 + F_1(1 + V_s + V_{s\tau} + V_{s\psi}) + F_2]|_{s=0} \stackrel{\text{def}}{=} V_2(\tau, \psi). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Уравнение (2.14) разрешено относительно старшей производной, его правая часть, а также условия (2.15) являются аналитическими функциями, следовательно, задача (2.14), (2.15) имеет единственное аналитическое решение. При этом из свойств правой части (2.14) следует, что это решение а) мажорирует нуль; б) по переменной ψ область аналитичности целиком содержит отрезок $-\pi \leq \psi \leq \pi$.

Отсюда по построению задачи (2.14), (2.15) следует, что справедливо утверждение теоремы 1. \square

3. Алгоритм решения МГЭ

Классический подход к решению уравнения параболического типа методом граничных элементов предполагает использование фундаментального решения, зависящего от времени [9], при этом численное решение строится по шагам по времени. Однако нелинейность и вид краевого условия (1.2), при котором область решения задачи (область ненулевых значений искомой функции) изменяется с течением времени, делает такое решение затруднительным. В связи с этим, в соответствии с подходом, разработанным в [4; 6; 13; 14], на каждом шаге по времени решается краевая задача для уравнения эллиптического типа. Именно, в произвольный момент времени t в области $\Omega^{(t)}$ рассматривается уравнение Пуассона

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}{\sigma} \right) \quad (3.1)$$

с граничными условиями, соответствующими уравнениям (1.2), (1.3):

$$u|_{x \in S^{(t)}} = 0, q|_{x \in S^{(t)}} = \frac{\sigma b_t}{\sqrt{b_{x_1}^2 + b_{x_2}^2}}. \quad (3.2)$$

Решение задачи (3.1), (3.2) с помощью МГЭ [9] приводит к соотношению

$$u(\xi) = \int_S [q(x)u^*(\xi, x) - u(x)q^*(\xi, x)] dS(x) - \int_{\Omega^{(t)}} \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}{\sigma} \right) u^*(\xi, x) d\Omega(x), \quad (3.3)$$

где ξ – внутренняя точка $\Omega^{(t)}$, $S = S^{(0)} \cup S^{(t)}$, $u^*(\xi, x)$ – фундаментальное решение, $q^*(\xi, x) = \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial \mathbf{n}}$ [9]. Для граничной точки $x_0 \in S$ справедливо

$$\frac{1}{2}u(x_0) = \int_S [q(x)u^*(x_0, x) - u(x)q^*(x_0, x)] dS(x) - \int_{\Omega^{(t)}} \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}{\sigma} \right) u^*(x_0, x) d\Omega(x). \quad (3.4)$$

Разбивая границу S на граничные элементы и записывая уравнение (3.4) для каждого узла, получаем систему линейных уравнений для определения узловых значений u и q , не заданных граничными условиями (3.2). Решение проводилось с использованием аналитического вычисления интегралов по граничным элементам [10], использовались прямолинейные элементы с постоянной аппроксимацией.

Для вычисления интегралов по области $\Omega^{(t)}$, стоящих в правых частях уравнений (3.3), (3.4), применялся метод двойственной взаимности [15]. Входящий в подынтегральные выражения множитель представлялся в виде

$$\frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}{\sigma} \right) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(x), \quad (3.5)$$

где для функций f_i существуют такие функции \hat{u}_i , что $f_i = \Delta \hat{u}_i$. В качестве функций f_i применялись радиальные базисные функции, значения которых зависят от расстояния между текущей точкой и заданными точками коллокации y_1, y_2, \dots, y_n , лежащими в области $\Omega^{(t)}$: $f_i(x) = f_i(r_i)$, где $r_i = \|x - y_i\|$. С учетом (3.5) интегралы могут быть вычислены

следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega(t)} \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}{\sigma} \right) u^*(\xi, x) d\Omega(x) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_{\Omega(t)} f_i(x) u^*(\xi, x) d\Omega(x) = \\
 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_{\Omega(t)} \Delta \hat{u}_i(x) u^*(\xi, x) d\Omega(x) = \\
 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(-\hat{u}_i(\xi) + \int_S [\hat{q}_i(x) u^*(\xi, x) - \hat{u}_i(x) q^*(\xi, x)] dS(x) \right), \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

где $\hat{q}_i(x) = \frac{\partial \hat{u}_i(x)}{\partial \mathbf{n}}$. Таким образом все вычисления сводятся на границу области решения задачи, и основное преимущество МГЭ — уменьшение размерности задачи — сохраняется. Полученные соотношения (3.3) — (3.6) позволяют решить исходную задачу (1.1), (1.2) по шагам по времени. На каждом шаге итерационно решается задача (3.1), (3.2), аналогично одномерным задачам [13; 14].

4. Примеры

Разработанные в пп. 2 и 3 алгоритмы были применены к решению задачи (1.1), (1.2) с нулевым фронтом, имеющим форму эллипса

$$b(t, x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a_1(t)^2} + \frac{x_2^2}{a_2(t)^2} - 1. \quad (4.1)$$

Здесь $a_1(t)$, $a_2(t)$ — полуоси эллипса, которые зависят от времени.

В качестве первого примера была решена задача (1.1), (1.2) для симметричного случая, когда $a_1(t) = a_2(t) = R(1 + \mu t/C)^\nu$, где $\mu = 4 + 4/\sigma$, $\nu = 1/(2\sigma + 2)$. В этом случае нулевой фронт является окружностью, а точное решение задачи имеет вид

$$u = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{C + \mu t} + \frac{C^{\lambda-1} R^2}{(C + \mu t)^\lambda}, \quad (4.2)$$

где $\lambda = 4/\mu$. На рис. 1 показано сравнение решения МГЭ с точным решением (4.2) при следующих параметрах: $\sigma = 3$, $R = 1$, $C = 10$.

Также была решена задача для нулевого фронта (4.1) при линейной зависимости полуосей эллипса от времени: $a_1(t) = ca_2(t) = c(1 + \alpha t)$. Полученное решение сравнивалось с отрезками ряда (2.7). На рис. 2 решение МГЭ при $\sigma = 3$, $c = 3/2$, $\alpha = 1/20$ сравнивается с отрезком ряда из четырех членов.

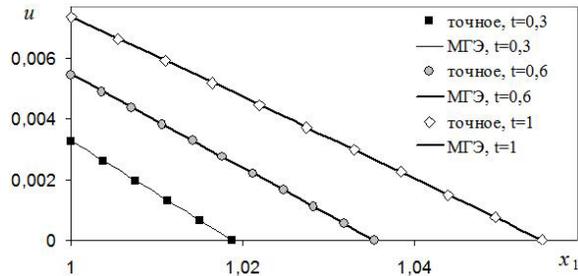
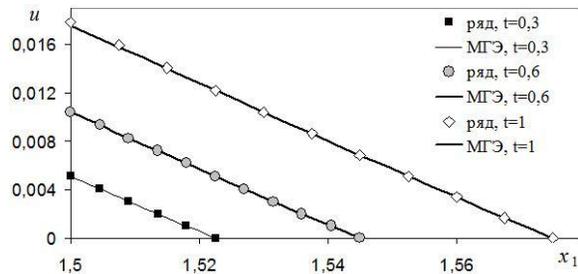
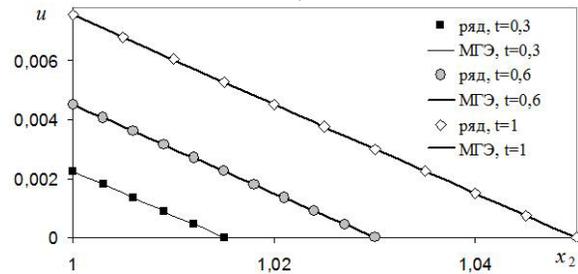


Рис. 1. Сравнение решения МГЭ и точного решения



а)



б)

Рис. 2. Сравнение решения МГЭ и отрезка ряда: а) вдоль оси Ox_1 , б) вдоль оси Ox_2

Приведенные результаты расчетов показывают хорошую эффективность решения задачи (1.1), (1.2) методом граничных элементов.

5. Анализ эффективности применения метода двойственной взаимности

Ключевым вопросом эффективности представленного в п. 3 алгоритма является выбор системы радиальных базисных функций (РБФ) и их параметров, наиболее подходящих для рассматриваемого класса задач. Для анализа применения различных видов РБФ построенный алгоритм был реализован в виде программы. Анализ проводился на

основе сравнения результатов расчетов для первого примера, рассмотренного в предыдущем разделе, с точным решением (4.2).

В качестве факторов анализа были приняты вид РБФ, их параметры, связанные с расположением точек коллокации, и шаг по времени.

Рассматривались четыре вида РБФ: полигармонические сплайны $f_i = r_i$ и $f_i = r_i^3$, а также линейные функции $f_i = 1 + r_i$ и $f_i = 1 + \varepsilon r_i$. Целью анализа было оценить влияние вида РБФ и значения параметра формы ε на точность решения.

Результаты расчетов при различных значениях параметров C хорошо согласуются с решением (4.2). Приведенные ниже результаты были получены при характерных значениях $\sigma = 3$, $C = 10$.

Полученные решения при различных РБФ и значениях параметров достаточно близки. Во всех вариантах расчетов наибольшее отклонение численного решения от точного в различные моменты времени наблюдалось на границе $S^{(0)}$, что вполне соответствует виду краевого условия (1.2). Поэтому в качестве оценки точности численного решения мы использовали его отклонение от точного вдоль $S^{(0)}$. Результаты оценки точности решения сведены в табл. 1. В таблице приведены значения и отклонения от точного решения вдоль границы $S^{(0)}$ в некоторые моменты времени для решений, полученных при использовании рассмотренных систем РБФ, с шагами по времени $h = 0,1$ и $h = 0,05$. В качестве базовых значений параметра формы были приняты значения $\varepsilon_1 = \frac{1}{0,815d}$, где $d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i$, d_i – расстояние от i -й точки коллокации до ближайшей другой [12], и $\varepsilon_2 = \frac{0,8\sqrt{N}}{D}$, где D – диаметр наименьшего круга, содержащего все точки коллокации [11].

Таблица 1

Сравнение решений МГЭ при различных РБФ с точным решением

Момент времени	Точное решение	Решение МГЭ (отклонение от точного решения)				
		$h = 0,1$				
		$f_i = r_i$	$f_i = r_i^3$	$f_i = 1 + r_i$	$f_i = 1 + \varepsilon_1 r_i$	$f_i = 1 + \varepsilon_2 r_i$
$t = 0,5$	0,004806	0,004852 (0,000046)	0,004854 (0,000048)	0,004852 (0,000046)	0,004852 (0,000046)	0,004852 (0,000046)
		$t = 1$	0,007355	0,007414 (0,000059)	0,007417 (0,000062)	0,007417 (0,000062)
$h = 0,05$						
$f_i = r_i$	$f_i = r_i^3$		$f_i = 1 + r_i$	$f_i = 1 + \varepsilon_1 r_i$	$f_i = 1 + \varepsilon_2 r_i$	
$t = 0,5$	0,004806	0,004824 (0,000018)	0,004825 (0,000019)	0,004825 (0,000019)	0,004824 (0,000018)	0,004825 (0,000019)
		$t = 1$	0,007355	0,007372 (0,000017)	0,007374 (0,000019)	0,007376 (0,000021)

Проведенные расчеты показали, что точность решения возрастает с уменьшением шага по времени, что свидетельствует об устойчивости разработанного алгоритма. Сравнение результатов использования разных систем РБФ позволяет делать следующие выводы. Решения МГЭ, полученные с использованием выбранных РБФ, имеют малые отклонения от точного решения. Наблюдаемые отклонения для различных РБФ очень близки, что показывает устойчивость разработанного алгоритма относительно выбора системы РБФ.

Таким образом, применение метода двойственной взаимности позволяет с высокой точностью решать задачи вида (1.1), (1.2) на конечном промежутке времени.

Заключение

В работе рассмотрена задача о построении тепловой волны, у которой известно уравнение движения фронта, в случае двух пространственных переменных. Для решения данной задачи применены два различных подхода: метод степенных рядов, позволяющий в окрестности начального момента времени доказать существование и единственность решения и построить его в виде сходящегося степенного ряда, и метод граничных элементов, который дает возможность найти решение поставленной задачи на заданном конечном промежутке времени (сходимость метода при этом не гарантирована). Поскольку сравнение результатов расчетов, выполненных с помощью двух указанных подходов, показали хорошее соответствие, можно высказать предположение о том, что они корректны.

Дальнейшее направление исследований может быть связано с рассмотрением иных задач об иницировании тепловой волны в двумерной постановке (в частности, «задачи А. Д. Сахарова») [2; 8], а также с увеличением размерности задачи.

Список литературы

1. Баренблатт Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. – М. : Недра, 1984. – 212 с.
2. Баутин С. П. Аналитическая тепловая волна / С. П. Баутин. – М. : Физматлит, 2003. – 88 с.
3. Казаков А. Л. О построении тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности в симметричном случае / А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов, А. А. Лемперг // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2015. – Т. 11. – С. 39-53.
4. Казаков А. Л. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах / А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов, Л. Ф. Спевак // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 119-129.

5. Казаков А. Л. Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт // Вычисл. технологии. – 2012. – Т. 17, № 1. – С. 57–68.
6. Казаков А. Л. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации / А. Л. Казаков, Л. Ф. Спевак // Изв. Иркут. гос. Ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 2–17.
7. Режимы с обострением в задачах для нелинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. – М. : Наука, 1987. – 480 с.
8. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика / А. Ф. Сидоров. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с.
9. Brebbia C. A. Boundary Element Techniques / C. A. Brebbia, J. F. C. Telles, L. C. Wrobel. – Berlin : Neidel-berg ; N. Y. ; Tokyo : Springer-Verlag, 1984. – 464 p.
10. Fedotov V. P. One approach to the derivation of exact integration formulae in the boundary element method / V. P. Fedotov, L. F. Spevak // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2008. – Vol. 32, N 10. – P. 883–888.
11. Franke R. Scattered data interpolation: tests of some methods / R. Franke // Mathematics of Computation. – 1982. – Vol. 38, N 157. – P. 181–200.
12. Hardy R. L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces / R. L. Hardy // Journal of Geophysical Research. – 1971. – Vol. 76, N 8. – P. 1905–1915.
13. Kazakov A. L. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form / A. L. Kazakov, L. F. Spevak // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, N 10–11. – P. 6918–6928.
14. Kazakov A. L. An analytical and numerical study of a nonlinear parabolic equation with degeneration for the cases of circular and spherical symmetry / A. L. Kazakov, L. F. Spevak // Applied Mathematical Modelling. – 2016. – Vol. 40, N 2. – P. 1333–1343.
15. Nardini D. A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements / D. Nardini, C. A. Brebbia // Boundary Element Methods in Engineering / ed. Brebbia C. A. – Springer-Verlag : Berlin, 1982.
16. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory / J. L. Vazquez. – Oxford : Clarendon Press, 2007. – 648 p.

Казаков Александр Леонидович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)453033 (e-mail: kazakov@icc.ru)

Спевак Лев Фридрихович, кандидат технических наук, заведующий лабораторией прикладной механики, Институт машиноведения УрО РАН, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34 тел.: (343)3753592 (e-mail: lfs@imach.uran.ru)

Нефедова Ольга Анатольевна, кандидат технических наук, научный сотрудник, Институт машиноведения УрО РАН, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34 тел.: (343)3753592 (e-mail: nefedova@imach.uran.ru)

A. L. Kazakov, L. F. Spevak, O. A. Nefedova
Solution of a Two-Dimensional Problem on the Motion of a Heat Wave Front with the use of Power Series and the Boundary Element Method

Abstract. The paper discusses a nonlinear parabolic equation describing the process of heat conduction for the case of the power dependence of the heat conductivity factor on temperature. Besides heat distribution in space, it describes filtration of a polytropic gas in a porous medium, whereupon, in the English-language literature, this equation is generally referred to as the porous medium equation. A distinctive feature of this equation is the degeneration of its parabolic type when the required function becomes zero, whereupon the equation acquires some properties typical of first-order equations. Particularly, in some cases, it proves possible to substantiate theorems of the existence and uniqueness of heat-wave (filtration-wave) type solutions for it. This paper proves a theorem of the existence and uniqueness of the solution to the problem of the motion of a heat wave with a specified front in the instance of two independent variables. At that, since the front has the form of a closed plane curve, a transition to the polar coordinate system is performed. The solution is constructed in the form of a series, a constructible recurrent procedure for calculating its coefficients being proposed. The series convergence is proved by the majorant method. A boundary-element-based computation algorithm in the form of a computer program has been developed and implemented to solve the problem under study. Test examples are considered, the calculations made by a program designed by the authors being compared with the truncated series. A good agreement of the obtained results has been established.

Keywords: nonlinear equations with partial derivatives, heat wave, power series, existence and uniqueness theorem, boundary element method, computational experiment.

References

1. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhyk V.M. The motion of fluids and gases in natural strata (in Russian). Moscow, Nedra, 1984. 212 p.
2. Bautin S.P. Analytic Heat Wave (in Russian). Moscow, Fizmatlit, 2003. 88 p.
3. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A. On Construction of Heat Wave for Nonlinear Heat Equation in Symmetrical Case (in Russian). *Izvestiya IGU. Ser.: Mat.*, 2015, vol. 11, pp. 39–53.
4. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. On a Degenerate Boundary Value Problem for the Porous Medium Equation in Spherical Coordinates (in Russian). *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2014, vol. 20, no 1, pp. 119–129.
5. Kazakov A.L., Lempert A.A. Analytical and Numerical Studies of the Boundary Value Problem of a Nonlinear Filtration with Degeneration (in Russian). *Vych. tehnologii*, 2012, vol. 17, no. 1, pp. 57–68.
6. Kazakov A.L., Spevak L.F. Boundary Elements Method and Power Series Method for One-dimensional Nonlinear Filtration Problems (in Russian). *Izvestiya IGU. Ser.: Mat.*, 2012, vol. 5, no 2, pp. 2–17.
7. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. Sharpening regimes in problems for nonlinear parabolic equations. Moscow, Nauka, 1987. 480 p.
8. Sidorov A.F. Selected Works: Mathematics. Mechanics (in Russian). Moscow, Fizmatlit, 2001. 576 p.

9. Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C. Boundary Element Techniques. Berlin, Neidel-berg, N. Y., Tokyo, Springer-Verlag, 1984. 464 p.
10. Fedotov V.P., Spevak L.F. One approach to the derivation of exact integration formulae in the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2008, vol. 32, no. 10, pp. 883-888.
11. Franke R. Scattered data interpolation: tests of some methods. *Mathematics of Computation*, 1982, vol. 38, no 157, pp. 181-200.
12. Hardy R.L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of Geophysical Research*, 1971, vol. 76, no 8, pp. 1905-1915.
13. Kazakov A.L., Spevak L.F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, no 10-11, pp. 6918-6928.
14. Kazakov A.L., Spevak L.F. An analytical and numerical study of a nonlinear parabolic equation with degeneration for the cases of circular and spherical symmetry. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, vol. 40, no 2. pp. 1333-1343.
15. Nardini D., Brebbia C.A. A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements *Boundary Element Methods in Engineering* (Brebbia C.A., ed.). Berlin and New York, Springer-Verlag, 1982.
16. Vazquez J.L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford, Clarendon Press, 2007. 648 p.

Kazakov Alexandr Leonidovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Head of laboratory, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: (3952) 453033, (e-mail: kazakov@icc.ru)

Spevak Lev Phridrihovich, Candidate of Sciences (Engineering Sciences), Head of Laboratory of Applied Mechanics, Institute of Engineering Science UB RAS, 34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, tel.: (343) 3753592 (e-mail: lfs@imach.uran.ru)

Nefedova Olga Anatolievna, Candidate of Sciences (Engineering Sciences), Research Scientist, Institute of Engineering Science UB RAS, 34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, tel.: (343) 3753592 (e-mail: nefedova@imach.uran.ru)