Серия «Математика»
2016. Т. 18. С. 38—47

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.142.1
MSC 05B20

Бинарные матрицы с арифметикой треугольника Паскаля и символьные последовательности

О. В. Кузьмин, Б. А. Старков
Иркутский государственный университет

Аннотация.
В работе исследуется математическая модель, состоящая из нулей и единиц и формируемая при арифметических и комбинаторных преобразованиях треугольника Паскаля. Перечисляются некоторые варианты метода построения бинарных матриц путем выбора определенных образующих. Приводится пример бинарной матрицы, формируемой в условиях, когда размерность матрицы превышает длину шаблона. Излагается известный метод построения бинарной матрицы путем редуцирования треугольника Паскаля по простому или составному модулю. Осуществляется его сравнение с методом, предложенным в данной работе, и указывается отличие, заключающееся в построении большего числа фрактальных структур. Описываются фрактальные, алгебраические и комбинаторные свойства, особенности и различия двух построений бинарных матриц при помощи шаблонов [1 0] [1] и [0 1] [1]. Рассматриваются шаблоны самоподобия формируемых бинарных матриц, вычисляются их дробные размеренности. Сформулирована и доказана теорема о последовательности неповторяющихся строк описываемых бинарных матриц. Объекты и их свойства, исследуемые в данной работе, применяются при решении задач теории информации и используются в качестве моделей природных процессов, которые проявляют свойство самоорганизации.

Ключевые слова: комбинаторный анализ, комбинаторика на словах, бинарные матрицы, треугольник Паскаля, фракталы, фрактальная матрица.

1. Введение

Матрицы, целиком состоящие из элементов 0 и 1, называются бинарными и представляют собой важный класс матриц, с успехом применяемых в различных разделах математики. Так бинарными матрицами задают и/или представляют бинарные отношения. Широко известный дискретный объект граф можно представить в виде бинарной матрицы, например в виде матрицы смежности или матрицы инцидентности [4]. В данной работе излагается метод построения бинарных матриц при помощи задания определенных последовательностей элементов (образующих) и арифметики треугольника Паскаля, а также приводятся их некоторые свойства.

2. Основные понятия. Построение (0,1)-матрицы при помощи арифметики треугольника Паскаля

Представим треугольник Паскаля в виде бесконечной прямоугольной таблицы (см., напр., [1, 2]):

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \dots \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{array} .$$

Бесконечные первую строку и первый столбец назовем горизонтальной и вертикальной образующими.

Используя известное правило треугольника Паскаля (элементы, не лежащие на образующей, равны сумме элементов слева и сверху), построим бинарную матрицу:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} ,$$

которую будем называть треугольником типа Паскаля с конечными образующими [1 1 0 1 1] и [1 1 0 1 0] и двоичным сложением.

Представим элементы образующей $x_1, x_2, \dots, x_n$ в виде конечной последовательности букв, составляющие слово $W = x_1 x_2 \dots x_n$. В комбинаторике слов [5] на множестве слов над данным алфавитом определена ассоциативная операция конкатенации (приписывания) слов, которую мы будем называть умножением слов. Понятие степени слова вводится по отношению к этой операции естественным образом. Слово, не являющееся степенью никакого другого слова, называется примитивным. Если $W = Z^n$, где Z — примитивно и $n > 1$, то Z называется корнем W.

Шаблоном образующей будем называть последовательность элементов корня слова W, составленного из элементов данной образующей. Так, для образующей [1 1 0 1 1 0] ее шаблоном будет являться последовательность [1 1 0]. Для образующей [1 1 0 1 0 0] не найдется такого примитивного слова Z, при котором для $n > 1$, $W = Z^n$; в этом случае образующая [1 1 0 1 0 0] будет одновременно являться собственным шаблоном.

Отметим, что шаблон в образующей может повториться частично при его последнем вхождении, например в образующей [1 1 0 1 1 0 1] шаблон [1 1 0] входит дважды полностью и один раз в виде его начала. Как следствие, можно при необходимости формировать образующие четной или нечетной длины.

Очевидно, что для построения бинарной матрицы с арифметикой треугольника Паскаля достаточно задать две последовательности символов, формирующих первую строку и первый столбец. При расширении такой прямоугольной таблицы становится очевидным рекуррентное свойство данной матрицы: каждый новый элемент зависит только от двух элементов, уже вычисленных ранее. Перечислим способы построения матрицы с арифметикой треугольника Паскаля, основанных на выборе образующих:

1) Горизонтальная образующая длины n с данным шаблоном длины $k < n$ и диагонально симметричная ей вертикальная образующая формируют квадратную бинарную матрицу размерности $n \times n$.

2) Горизонтальная образующая длины n с данным шаблоном длины $k = n$ и диагонально симметричная ей вертикальная образующая формируют квадратную бинарную матрицу размерности $n \times n$.

3) Горизонтальная образующая длины n и вертикальная образующая длины m с данными шаблонами длины $k < n$, $l < m$ соответственно формируют бинарную матрицу размерности $m \times n$.

4) Горизонтальная образующая размера n с шаблоном длины $k = n$, вертикальная образующая размера m с шаблоном длины $l = m$ формируют бинарную матрицу размерности $m \times n$.

Рассмотрим общие и отличительные черты приведенных способов на примерах.

Пример 1. Пусть A —- матрица размерности $m \times n$ с арифметикой треугольника Паскаля. Рассмотрим третий способ построения такой матрицы. Этот способ применяется в том случае, когда длина строк заданной бинарной матрицы с арифметикой треугольника Паскаля превышает длину шаблона горизонтальной образующей, а длина столбцов превышает длину шаблона вертикальной образующей:

$$[x_1, x_2, ..., x_k],\ k < n\ ,$$
$$[y_1, y_2, ..., y_l],\ l < m\ ,$$

где $x_1, x_2, ..., x_k$, $y_1, y_2, ..., y_l$ — бинарные символы, составляющие шаблон горизонтальной и вертикальной образующих, которые в свою очередь повторяются в образующих соответственно $\lfloor m/l \rfloor$ и $\lfloor n/k \rfloor$ целое число раз. Ниже приведена матрица размерности 5×5, построенная с помощью шаблонов [0 1] горизонтальной и [0] вертикальной образующих:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \ .$$

Отметим, что в отличие от первого и второго способов построения, в третьем способе элементы вертикальной образующей не зависят от элементов горизонтальной образующей. В третьем способе нет и ограничения на длину вертикальной образующей, тогда как в первом способе длина вертикальной образующей равна длине горизонтальной образующей.

Второй и четвертый способ применяются в том случае, когда для образующих не выполняется условие $W = Z^n$, $n > 1$.

3. Фрактальные свойства бинарной матрицы, построенной при помощи арифметики треугольника Паскаля

В литературе, посвященной свойствам и приложениям треугольника Паскаля и его обобщений (см., например [1]), часто встречается анализ элементов треугольника Паскаля по конечному модулю, в частности по простому модулю р, образующих геометрические треугольные решетки–фракталы (рис. 2).

В отличие от используемого некоторыми авторами (см., например [6]) метода редуцирования по конечному или составному модулю, в данной работе предлагается иной метод — выбор по определенному правилу бинарной образующей(их) и основанное на ней(их) дальнейшее построение бинарной матрицы с арифметикой треугольника Паскаля.

Рассмотрим одно из отличий фракталов, построенных разными методами. Как можно видеть, треугольник Паскаля обладает свойством диагональной симметрии (диагонально симметричные тройки и десятки выделены жирным):

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 & 5 & \ldots \\ 1 & \mathbf{3} & 6 & \mathbf{10} & 15 & \ldots \\ 1 & 4 & \mathbf{10} & 20 & 35 & \ldots \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{array}.$$

Очевидно, что взятие каждого элемента по модулю любого числа (к примеру, 2) не нарушит свойства диагональной симметрии элементов:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & \ldots \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & 1 & \ldots \\ 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{array},$$

построение бинарной матрицы при помощи арифметики треугольника Паскаля в случае произвольного выбора горизонтальных и вертикальных образующих может привести к нарушению диагональной симметрии в матрице, например:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{1} & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{array}.$$

Таким образом, метод построения бинарной матрицы при помощи образующих позволяет получить значительно больше различных фрактальных структур, чем метод редуцирования по модулю p.

В матрице размерностью 100×100 существует 2^{99} способов выбора горизонтальной и вертикальной образующих и, как следствие, можно построить столько же фрактальных структур.

Стоит отметить, что фрактал на рис. 1 можно получить не только редуцированием треугольника Паскаля по модулю 2, но и с помощью третьего способа построения бинарной матрицы с арифметикой треугольника Паскаля с шаблоном [1] горизонтальной и вертикальной образующих соответственно. На данном и последующих рисунках серый квадрат обозначает ноль, белый — единицу.

Существует несколько определений размерности. Одна из размерностей, геометрическая, выражает минимальное число координат, необходимых для однозначного определения положения точки на прямой,

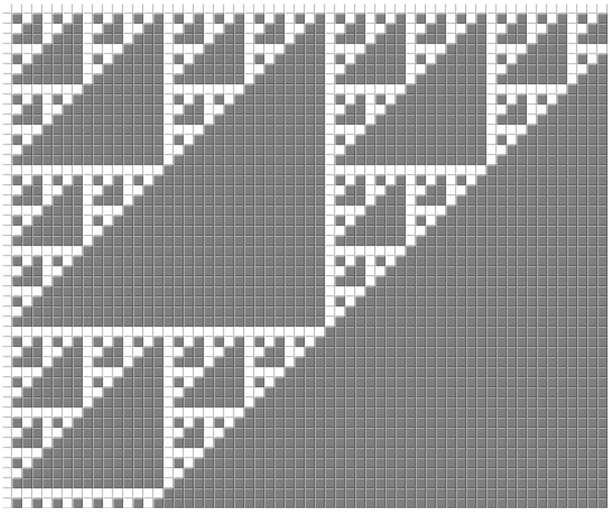

Рис. 1. Шаблоны [1] и [1].

плоскости и в пространстве. Другая, топологическая размерность, при которой размерность любого множества на единицу больше, чем размерность разреза, делящего его на две связные части. Указанные размерности могут быть только целыми. Так, оба определения размерности означают, что линия одномерна, плоскость двумерна, объемное геометрическое тело трехмерно. Кроме указанных размерностей, существуют и другие понятия размерностей. Одно из них — размерность самоподобия. Пусть n — число одинаковых частей, на которые разбивается данный самподобный объект, имеющих в m раз меньший пространственный размер. Тогда размерность самоподобия D можно определить формулой:

$$D = \frac{\ln n}{\ln m}. \tag{3.1}$$

Используя введенное понятие, легко определить, что размерность самоподобия квадрата, последовательно деленного на четыре равных квадрата, равна $ln4/ln2 = 2$, размерность самоподобия куба равна $ln8/ln2 = 3$. Порядок следования элементов в шаблоне при первом способе построения очень важен. Рассмотрим фракталы с шаблонами [1 0] [1] (рис. 2) и [0 1] [1] (рис. 3). Несмотря на наличие одинакового шаблона самоподобия (равнобедренный треугольник окружают три равнобедренных треугольника меньшего размера), подсчет (формула 3.1 размерности самоподобия для каждого случая показывает их различие.

Так, для первого случая [1 0] [1] размерность самоподобия D равна:

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 1,530612} = 2.58091558927259.$$

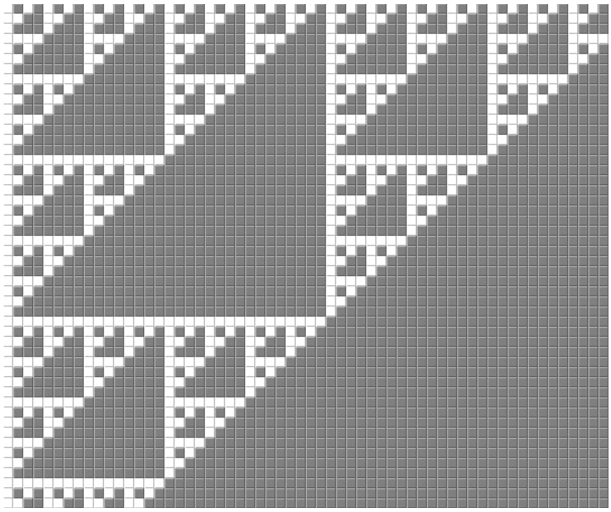

Рис. 2. Шаблоны [1 0] и [1].

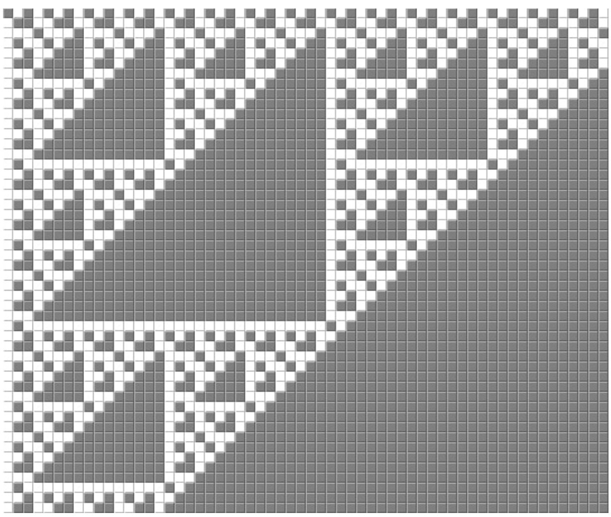

Рис. 3. Шаблоны [0 1] и [1].

Для второго случая [0 1] [1] размерность самоподобия D равна:

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2,25333333} = 1.352287017.$$

Получаем разные размерности самоподобия для разных порядков следования элементов в шаблоне несмотря на кажущуюся эквивалентность построенных горизонтальных образующих. Каждую горизонтальную образующую можно получить, используя циклический сдвиг последовательности элементов шаблона образующей. Как следствие, позиция повторяющейся последовательности, с которой начинается горизонтальная образующая, определяет построение всей матрицы.

Сравнив обе матрицы на рис. 2 и 3, можно заметить, что на рис. 2 более «плотное» распределение элементов, чем на рис. 3.

Возможен выбор таких горизонтального и вертикального шаблонов, при которых трудно определить шаблон самоподобия (рис. 4).

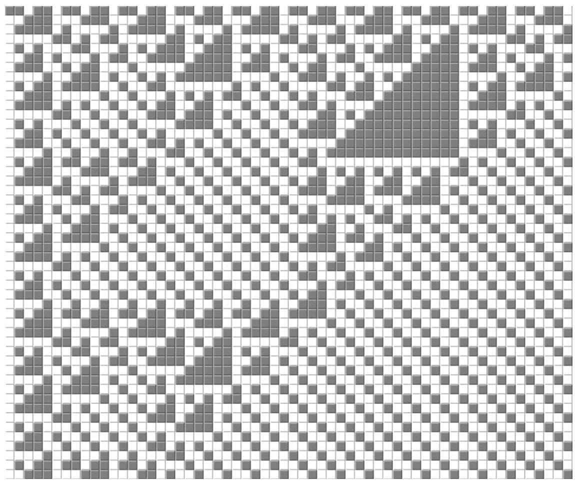

Рис. 4. Шаблоны [0 0 1] и [1].

4. Последовательности неповторяющихся строк бинарной матрицы, формируемой при помощи арифметики треугольника Паскаля и вертикальной, горизонтальной образующих

Построим матрицу B размерности $m \times n$ при помощи шаблона [0 1] горизонтальной образующей длины n и шаблона [0 1] вертикальной образующей такой длины m, чтобы первая строка равнялась последней и между ними не было других равных им строк. Зададимся вопросом, как часто будут повторяться строки в такой матрице.

Теорема 1. *В матрице B не найдется двух других равных между собой строк кроме первой и последней.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность строк бинарной матрицы B' размерности $(2m) \times n$, построенной при помощи продолжения вертикальной образующей с шаблоном [0 1] матрицы B, начиная с первой и заканчивая $(m-1)$-й строкой. Так как первая строка равна m-й, то первые элементы у этих строк также равны, а следовательно, ввиду чередования элементов (шаблон [0 1]) у вертикальной образующей, первый элемент второй строки равен первому элементу $(m+1)$-й строки.

Получаем, что у строк со вторым и $(m+1)$-й номерами оказываются равными первые элементы и предшествующие им строки. На основании арифметических свойств треугольника типа Паскаля получаем, что строки со вторым и $(m+1)$-м номерами равны. Продолжая те же рассуждения, получим, что третья строка равна $(m+2)$-й строке, четвертая строка равна $(m+3)$-й строке , ..., $(1+k)$-я строка равна $(m+k)$-й строке $(1+k \leq m-1)$. Очевидно, можно говорить о периодичности строк.

Теперь воспользуемся методом от противного и предположим, что между первой и m-й строкой найдутся еще две равные между собой строки.

Без ограничения общности, предположим, что третья строка равна $(1+k)$-й строке, причем $3 < 1+k \leq m-1$. Тогда, в силу периодичности повторения, получим, что третья строка равна $(1+k)$-й и $(m+k)$-й строкам, далее вторая строка равна $(m+k-1)$-й строке, и первая строка равна $(m+k-2)$-й строке. Но в силу условий теоремы первая строка равна m-й, и потому $k=2$, т. е. третья строка не может быть продублирована в рассмотренной выше последовательности. □

Замечание 1. При построении матрицы типа B с бесконечной вертикальной образующей с шаблоном [0 1] уникальный набор строк будет повторяться циклически на основании арифметики треугольника Паскаля и выбранной вертикальной образующей. Иными словами, каждая строка будет повторяться через $m-1$ строк.

Список литературы

1. БондаренкоБ.А. Обобщенныетреугольникиипирамиды Паскаля,их фрактали, графы и приложения / Б. А. Бондаренко. – Ташкент : Фан, 1990. – 192 с.
2. Кузьмин О. В. Построение кодов, исправляющих ошибки, с помощью треугольника типа Паскаля / О В. Кузьмин, К. П. Оркина // Вестн. Бурят. гос. ун-та. – 2006. -– № 13. -– С. 32–39.
3. Кузьмин О.В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения / О В Кузьмин. – Новосибирск : Наука. Сиб. издат. фирма РАН, 2000. – 294 с.
4. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов : учеб. для вузов / Ф. А. Новиков. – 2-е изд – СПб .: Питер, 2004. — 364 с. : ил.
5. Шур А. М. Комбинаторика слов : учеб. пособие / А. М. Шур. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2003. – 96 с.
6. Wolfram S. Geometry of binomial coefficients / S. Wolfram // American Mathematical Monthly. – 1984. -– Vol. 91, N 9. -– P. 566–571.

Кузьмин Олег Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: +7(3952)242210, (e-mail: `quzminov@mail.ru`)

Старков Борис Алексеевич, магистрант 2-го курса, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный

университет, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: +7(3952)242210
(e-mail: stsibrus@gmail.com)

O. V. Kuzmin, B. A. Starkov

Binary Matrixes Based on Pascal's Triangle's Arithmetics and Char Sequences

Abstract. This work describes consisting of zeroes and ones mathematical model, binary matrix obtained by the arithmetical and combinatorial transformations of Pascal's triangle. Some options of a method of building of binary matrices by the choice of certain generatrix are listed. The example of the binary matrix formed in conditions when dimension of a matrix exceeds template length is given. The known method of creation of a binary matrix by reduction of a triangle of Pascal on the simple or compound module is given. Its comparison with the method offered in this work is carried out and the difference in creation of bigger number of fractal structures is specified. Fractal, algebraic and combinatory properties, features and distinctions of two creation of binary matrixes by means of templates [1 0] [1] and [0 1] [1] are described. The self-similarity properties of the binary matrixes are being examined. The theorem of the sequence of not repeating lines of the described binary matrixes is formulated and proved. The objects and their properties investigated in this work are used at the solution of tasks of the theory of information and used as models of natural processes which show property of self-organization.

Keywords: combinatory analysis, combinatorics on words, binary matrixes, Pascal's triangle, fractals, fractal matrix.

References

1. Bondarenko B.A. Generalized Pascal triangles and pyramids: their fractals, graphs and applications. Santa Clara, The Fibonacci Association, 1993. 253 p.
2. Kuzmin O.V., Orkina K.P. Creation of the codes correcting errors by means of the Pascal type triangle. *Bulletin of Buryat State University*, 2006, no 13, pp. 32-39. (in Russian)
3. Kuzmin O.V. Generalized Pascal pyramids and their applications. Novosibirsk, Nauka, Siberian Publishing firm RAS, 2000. 294 p.(in Russian)
4. Novikov F.A. Discrete mathematics for Programmers: Textbook for Higher Schools. 2nd ed. SPB, Piter, 2004. 364 p.(in Russian)
5. Shur A.M. Combinatorics on words: Textbook. Ekaterinburg, Publ. House of the Ural University, 2003. 96 p. (in Russian)
6. Wolfram S. Geometry of binomial coefficients. *American Mathematical Monthly*, 1984, vol. 91, no 9, pp. 566-571.

Kuzmin Oleg Viktorovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irutsk, 664003, tel.: +7(3952)242210, (e-mail: quzminov@mail.ru)

Starkov Boris Alexeevich, Undergraduate, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irutsk, 664003, tel.: +7(3952)242210
(e-mail: stsibrus@gmail.com)