Серия «Математика»
2016. Т. 18. С. 3—20

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.816
MSC 62H30

Групповой выбор с использованием матричных норм

Ю.Н. Артамонов

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Государственный научно-методический центр»

Аннотация. В статье рассмотрен подход к построению методов группового выбора и ранжирования объектов в порядке предпочтения на основе минимизации отклонения матрицы, характеризующей объекты (оценочной матрицы), от некоторой одноранговой матрицы, все столбцы которой одинаковы (матрицы непротиворечивого ранжирования). Для оценки отклонения предложено использовать матричные нормы: поэлементная норма, $p-q$ норма, норма Шаттена на разнице оценочной и одноранговой матриц, разнице их ковариационных матриц, а также на других формах. Доказано, что ранжирование, полученное в результате минимизации разницы оценочной матрицы из рангов и матрицы непротиворечивого ранжирования по матричной норме Фробениуса, совпадает с ранжированием, полученным по оценочной матрице из рангов по правилу Борда. Рассмотрена связь матрицы непротиворечивого ранжирования, полученной по матричной норме Фробениуса, с одноранговой матрицей в сингулярном разложении оценочной матрицы, а также связанных с ними результатов метода ранжирования по влиянию. Для поэлементной матричной нормы доказано, что при достаточно большом показателе степени матричной нормы множество ранжирований, доставляющих минимум этой матричной нормы от разности оценочной матрицы и матрицы непротиворечивого ранжирования, становится устойчивым – не меняется при последующем увеличении степени (результаты такого ранжирования названы сбалансированным ранжированием). На примерах показано, что сбалансированное ранжирование доставляет минимум потерь при нелинейном росте штрафов от несовпадения ранжирования с реализованным в действительности ранжированием.

Ключевые слова: монотонная классификация, ранговые шкалы, матричные нормы, теорема Эккарта – Янга, малоранговые матрицы, правило Борда, ранжирование по влиянию.

1. Постановка задачи

Задачи группового выбора традиционно возникают во многих сферах человеческой деятельности: различные выборные мероприятия на основе демократических процедур [5; 9]; оценка качества технических решений [6]; оценка эффективности научных, образовательных организаций [1; 3]; оценка результативности научно-технических проектов [2].

Во всех этих направлениях часто приходится сталкиваться с двумя постановками задач: на множестве объектов (альтернатив), охарактеризованных некоторыми признаками, необходимо либо выбрать наилучший объект (задача группового выбора): для этого используют правила Кондорсе, Борда, относительного большинства, Копленда, Симпсона и др. [9]; либо ранжировать все объекты в порядке предпочтений (задача монотонной классификации). В рамках решения задачи группового выбора при ординалистском подходе к используемым методам априори предъявляются некоторые желательные нормативные требования: анонимность, нейтральность, монотонность, Парето-эффективность, неманипулируемость и другие [5]. Например, правило Кондорсе удовлетворяет требованиям анонимности, нейтральности, монотонности, и существуют системы предпочтений, для которых победитель, определенный любым методом на основе подсчета баллов (правило Борда, относительного большинства), никогда не совпадет с победителем по правилу Кондорсе. Однако для правила Кондорсе существуют системы предпочтений, для которых невозможно выявить победителя (причем вероятность получения такой системы увеличивается с ростом альтернатив или признаков). В некоторых методах стремятся ослабить ряд требований (например, нейтральность) для получения состоятельности по Кондорсе (методы Копленда, Симпсона). В целом на правила построения систем группового выбора действует ряд ограничивающих теорем: например, теорема Мэя устанавливает, что одновременное удовлетворение требований анонимности, нейтральности, монотонности возможно только для правила большинства; в известной теореме Эрроу, утверждается, что не существует Парето-эффективного неманипулируемого правила группового выбора, кроме правила диктатора. Все это приводит к тому, что при принятии решений в практически важных приложениях от соблюдения некоторых требований приходится отказываться. Например, требование неманипулируемости целесообразно предъявлять в ситуациях, когда возможно стратегическое голосование. В то же время для широкого круга задач оценки объектов по параметрам стратегическое голосование невозможно. Кроме этого, для таких задач характерно малое число повторяющихся профилей предпочтений (альтернатив много больше, чем признаков), что может создавать проблемы использования правила большинства при попарном сравнении альтернатив. Все это требует адаптации существующих методов и разработки более общих подходов.

Большинство существующих методов группового выбора лучшей альтернативы также позволяют ранжировать объекты в порядке предпочтения. Формально такую постановку задачи можно выразить следующим образом. По матрице (назовем её оценочной):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

в которой каждому объекту q_i из множества $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ по каждому признаку p_j из множества $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ поставлено в соответствие число a_{ij}, требуется найти перестановку индексов объектов $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$, такую, что $\forall i_k, i_l (i_k > i_l \Rightarrow q_{i_k} \succ q_{i_l})$.

Здесь обозначение $q_{i_k} \succ q_{i_l}$ содержательно понимают, что объект q_{i_k} в оговоренном смысле лучше объекта q_{i_l}, т. е. задача монотонной классификации сводится к введению на множестве Q подходящего отношения порядка $\succ$.

Без потери общности будем считать, что направление улучшения каждого i-го объекта по каждому j-му признаку состоит в увеличении значения a_{ij} (все признаки являются максимизируемыми).

Значения разных столбцов матрицы A могут иметь разный физический смысл (баллы, проставленные соответствующим объектам каждым экспертом, значения показателей из некоторого выбранного перечня). Это приводит к вопросу нормирования показателей для приведения их к сравнимой шкале. В литературе рассматриваются различные методы нормирования показателей [12]. Однако, как правило, применение одного и того же метода группового выбора при разных способах нормирования показателей приводит к различным упорядочениям объектов для матрицы A. Поэтому в дальнейшем будем использовать ординалистский подход — предпочтения к выбору объектов не могут измеряться количественно, а только сравниваться: один объект хуже или лучше другого. В этом случае каждый столбец матрицы A - это один из способов упорядочения объектов в порядке предпочтений соответствующего показателя. Это позволяет перейти от значений признаков к рангам, построенным по этим значениям: $\forall j (a_{ij} \in \{1, 2, \dots, m\}, i_1 \neq i_2 \Rightarrow a_{i_1 j} \neq a_{i_2 j})$ (предполагаем отсутствие связанных рангов). Вслед за [12] такой подход можно считать одним из способов нормирования. Тогда каждый j-й признак фактически задает свою перестановку объектов B_j. Причем, в большинстве случаев, такие перестановки для разных признаков не являются согласованными. Поэтому требование найти окончательное ранжирование B - это требование найти компромисс, в некотором смысле наименее противоречащий всем признакам.

Определение 1. *Назовем матрицы вида:*

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_1 & \dots & c_1 \\ c_2 & c_2 & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m & c_m & \dots & c_m \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

$\forall i, j (c_i, c_j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j \Rightarrow c_i \neq c_j)$, *в которых все столбцы одинаковы, матрицами непротиворечивого ранжирования.*

Очевидно, что матрицы непротиворечивого ранжирования относятся к классу одноранговых матриц и являются максимально согласованными - они не требуют в групповом выборе поиска компромисса между противоречащими по разным признакам ранжированиями. Заметим также, что количество таких матриц при отсутствии связанных рангов для m объектов равно $m!$. Используя определение 1, исходная задача ранжирования объектов в порядке предпочтения сводится к нахождению для заданной матрицы A наиболее близкой к ней матрицы непротиворечивого ранжирования C.

2. Подход к построению ранжирования объектов в порядке предпочтения на основе матричных норм

Идея оценки близости матриц естественным образом приводит к рассмотрению различных матричных норм.

Пусть A — заданная оценочная матрица, $\|\cdot\|$ — некоторая матричная норма, тогда из всего множества матриц непротиворечивого ранжирования Θ, $|\Theta| = m!$ необходимо найти подмножество $\Psi \subset \Theta$, такое, что $\|f_1(A, C)\| \to \min, C \in \Psi, f_1(A, C) = A - C$. В качестве возможных матричных норм, например, можно рассматривать [10]:

поэлементная L_p норма:

$$L_p(f_1(A, C)) = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} - c_i|^p \right)^{1/p}, p = 1, 2, \dots, \infty; \tag{2.1}$$

норма $L_{p,q}$:

$$L_{p,q}(f_1(A, C)) = \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} - c_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{1/q}, p, q = 1, 2, \dots, \infty; \tag{2.2}$$

норма Шаттена S_p:

$$S_p(f_1(A,C)) = \left(\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} {\sigma_i}^p \right)^{1/p}, p = 1, 2, \ldots, \infty, \tag{2.3}$$

где σ_i — сингулярные числа матрицы $f_1(A, C)$.

Особо отметим возможность определять меру близости матриц не только по матричной норме их разности $f_1(A, C) = A - C$. Например, можно смотреть на совпадение ковариационных матриц или другие формы:

$$f_2(A, C) = A \cdot A^T - C \cdot C^T \tag{2.4}$$

$$f_3(A, C) = A \cdot C^T - C \cdot A^T \tag{2.5}$$

$$f_4(A, C) = (A \cdot C^T - C \cdot A^T) \cdot (A \cdot A^T - C \cdot C^T) \tag{2.6}$$

Также имеется возможность подбирать матрицы, исходя из апостериорных условий, т. е. когда для некоторых оценочных матриц A_1 соответствующая матрица непротиворечивого ранжирования уже известна — C_1. Тогда критерий может быть таким:

$$\|(A \cdot C^T - A_1 \cdot C_1^T) \cdot (A \cdot A^T - C \cdot C^T)\| \to \min \tag{2.7}$$

Рассмотрим использование матричных норм для ранжирования объектов в порядке предпочтения на примере, заимствованном из [9].

Пример 1. Пусть компания из 9 человек решает, где совместно провести отдых на море. Они сравнивают варианты Анталья (A), Владивосток (B), Сочи (C), Дубай (D) и Евпатория (E). Имеются следующие профили предпочтений:

– один профиль: $A \succ B \succ C \succ D \succ E$;
– четыре профиля: $C \succ D \succ B \succ E \succ A$;
– один профиль: $E \succ A \succ D \succ B \succ C$;
– три профиля: $E \succ A \succ B \succ D \succ C$.

Оценочная матрица (1.1) представлена в этом случае следующей матрицей рангов (A, B, C, D, E — первая, вторая, третья, четвертая, пятая строки соответственно):

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Использование существующих правил дает следующие результаты:

– правило Кондорсе: победитель отсутствует, ранжирование объектов по предпочтению невозможно;

– относительное большинство: $E \sim C \succ A \succ B \sim D$;
– правило Борда: $E \succ B \sim C \sim D \succ A$;
– правило Копленда: $A \succ B \sim D \succ C \succ E$;
– правило Симпсона: $B \sim C \sim D \sim E \succ A$.

Использование различных матричных норм позволяет получить следующие результаты (для получения результата перебились все возможные матрицы (1.2), поскольку все столбцы матрицы (1.2) одинаковы, результат записан в виде списка, соответствующего одному столбцу такой матрицы, а также в виде интерпретации группового ранжирования):

– при $L_2(f_1(A,C))$ получаем множество возможных решений: $C = (1,4,3,2,5)$,$C = (1,4,2,3,5)$, $C = (1,3,4,2,5)$, $C = (1,3,2,4,5)$, $C = (1,2,4,3,5)$, $C = (1,2,3,4,5)$, (имеем все возможные перестановки объектов B, C, D, что свидетельствует об их безразличии в предпочтении), все это соответствует групповому ранжированию $E \succ B \sim C \sim D \succ A$, совпадающему с правилом Борда;
– при $L_3(f_1(A,C))$ получаем два возможных решения: $C = (2,5,3,1,4)$ и $C = (2,1,3,5,4)$, что соответствует либо групповому ранжированию $B \succ E \succ C \succ A \succ D$, либо ранжированию $D \succ E \succ C \succ A \succ B$. Полученный результат свидетельствует, что лучший и худший объекты выявить не удается — либо лучшим является выбор «Владивосток» и худшим «Дубай», либо наоборот. При этом следует заметить, что на первое место выбираются варианты, которые ни в одном из профилей предпочтения не были худшими. Расчеты показывают, что дальнейшее увеличение параметра $p > 3$ в $L_p(f_1(A,C))$ не меняет выбор $L_3(f_1(A,C))$;
– при $L_2(f_2(A,C))$ получаем одно решение $C = (1,3,5,4,2)$, т.е. групповое ранжирование $C \succ D \succ B \succ E \succ A$, дальнейшее увеличение параметра $p > 2$ в $L_p(f_2(A,C))$ приводит к решению $C = (4,1,3,2,5)$ и соответственно ранжированию $E \succ A \succ C \succ D \succ B$. Таким образом, при возрастании p в данном случае более рискованной цепочке $E \succ A$ отдается предпочтение;
– при $S_2(f_1(A,C))$ получаем одно решение $C = (1,3,2,4,5)$, т.е. групповое ранжирование $E \succ D \succ B \succ C \succ A$, которое при возрастании степени p меняется; так при $S_{10}(f_1(A,C))$ получаем $C = (1,5,2,3,4)$, или ранжирование $B \succ E \succ D \succ C \succ A$, что опять соответствует более осторожному предпочтению варианта «Владивосток» перед «Евпатория»;
– при $S_2(f_2(A,C))$ получаем одно решение $C = (1,3,5,4,2)$, что соответствует наиболее частому профилю $C \succ D \succ B \succ E \succ A$, т. е. в этом случае решение принимается путем выявления диктатора, с которым согласно большинство. При $p = 3$ групповое ранжирование меняется на противоположное первому профилю $E \succ D \succ C \succ B \succ A$, однако дальнейшее увеличение параметра p опять возвращает к решению диктатора $C \succ D \succ B \succ E \succ A$.

Из примера 1 видно, что разные матричные нормы и их параметры могут приводить к разным ранжированиям, учитывающим различные особенности предпочтений при принятии группового решения. Всё это открывает широкие возможности для исследования связи предлагаемого подхода с существующими методами, а также выявления содержательной интерпретации получаемого ранжирования. В дальнейшем изложении ограничимся рассмотрением поэлементной p-нормы при $f_1(A, C)$.

3. Анализ связи методов группового выбора на основе матричных норм с существующими методами

В литературе [5; 9; 4] приводится множество методов формирования группового решения. Данные методы в явном виде не используют матричные нормы. Однако анализ показывает, что получаемые с помощью этих методов результаты совпадают с результатами, полученными на основе матричных норм. Дадим здесь краткое описание двух таких методов из [4].

Правило Борда. На рангах данное правило можно сформулировать следующим образом: по каждому признаку p_j каждому объекту q_i выставляется балл: $r_j(q_i) = |\{q_l \in Q : a_{ij} > a_{lj}, l \neq i\}|$. Итоговый балл объекта q_i подсчитывается как сумма оценок по всем признакам: $r(q_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} r_j(q_i)$.

Правило ранжирования по влиянию. Правило опирается на два положения: 1) объекты, имеющие высокий ранг, имеют высокую оценку по критериям с большими весами; 2) вес критерия тем выше, чем больше его значение для объектов с высокими рангами. Сформулированные положения могут быть представлены в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} r_i = a_{i1} \cdot \omega_1 + a_{i2} \cdot \omega_2 + \ldots + a_{in} \cdot \omega_n, i = 1 \ldots m \\ \omega_j = a_{1j} \cdot r_1 + a_{2j} \cdot r_2 + \ldots + a_{mj} \cdot r_m, j = 1 \ldots n \end{cases}$$

Для сходимости в первых m уравнениях элементы a_{ij} заменяют их нормированными значениями

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}},$$

а в оставшихся n уравнениях производят замену на следующие нормированные значения

$$c_{ji} = \frac{a_{ji}}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji}},$$

которые можно представить в виде соответствующих матриц B, C. Тогда указанную систему можно записать в матричном виде:

$$\begin{cases} r = B \cdot \omega \\ \omega = C \cdot r \end{cases}$$

Подставляя в данной системе одно уравнение в другое, получаем $r = B \cdot C \cdot r$, т. е. r является собственным вектором матрицы $B \cdot C$, соответствующим максимальному собственному значению, равному единице.

Покажем, что подобные правила в конечном итоге также связаны с матричными нормами. Докажем, например, что результат ранжирования по правилу Борда на оценочной матрице из рангов всегда совпадает с ранжированием по матричной норме Фробениуса (поэлементная p-норма при $p = 2$).

Теорема 1. *Пусть A — исходная оценочная матрица рангов, $\|\cdot\|$ — матричная норма Фробениуса, тогда $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$, $\forall i, j (x_i, x_j \in \{1, 2, \ldots, m\}, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j)$ — ранжирование объектов матрицы A по предпочтению на основе нормы Фробениуса всегда совпадает с ранжированием этих объектов $\langle y_1, y_2, \ldots, y_m\rangle$, $\forall i, j (y_i, y_j \in \{1, 2, \ldots, m\}, i \neq j \Rightarrow y_i \neq y_j)$ по правилу Борда.*

Доказательство. Согласно условию теоремы выражение:

$$(\|A - X\|)^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} - x_i)^2$$

принимает минимальное из возможных значение. Для ранжирования по правилу Борда выполняется условие:

$$\forall i, l \left(y_i > y_l \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} > \sum_{j=1}^{n} a_{lj} \right) \tag{$*$}$$

.

Предположим, что

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} - x_i)^2 < \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} - y_i)^2,$$

тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} {x_i}^2 - 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot x_i < \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} {y_i}^2 - 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i$$

Поскольку $x_i, y_i \in \{1, 2, \dots, m\}$, то $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} {x_i}^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} {y_i}^2$, поэтому должно выполняться:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot x_i > \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} > \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Однако, в силу условия (*) и перестановочного неравенства, выражение $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ принимает максимальное значение на всех возможных перестановках чисел из множества $\{1, 2, \dots, m\}$, поэтому возможно только $\forall i (x_i = y_i)$ - сортировка Борда совпадает с сортировкой по норме Фробениуса. $\square$

Рассмотрим теперь подробнее правило ранжирования по влиянию. В случае $\forall j (a_{ij} \in \{1, 2, \dots, m\}, i_1 \neq i_2 \Rightarrow a_{i_1 j} \neq a_{i_2 j})$ в выражении $c_{ji} = \frac{a_{ji}}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji}}$ знаменатель всегда одно и тоже число: $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji} = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$. Поэтому $C = \frac{2}{m \cdot (m+1)} \cdot A^T$. Заметим также, что матрица B является некотором изменением от исходной матрицы A. Таким образом, в правиле ранжирования по влиянию рассматривается нахождение собственных векторов от некоторой модификации произведения матриц $A \cdot A^T$, т.е. данное правило связано с сингулярным разложением матрицы A. Центральное место здесь занимает *теорема Эккарта – Янга* [11]: если Y есть сингулярное разложение матрицы A, т.е.

$$Y = s_1 \cdot u_1 \cdot {v_1}^T + \ldots + s_p \cdot u_p \cdot {v_p}^T, p \leq rank(A),$$

то Y есть наилучшее приближение матрицы A среди всех матриц ранга p по норме Фробениуса $\|A - Y\|_2 \to \min$ (здесь s_i - i-е собственное значение матрицы $A \cdot A^T$, u_i, v_i — её i-й левый и правый собственные векторы).

Если рассматривать матрицу Y единичного ранга, то

$$Y_1 = s_1 \cdot u_1 \cdot {v_1}^T = u_1 \cdot u_1^T \cdot A$$

может быть однозначно сопоставлена с некоторой матрицей непротиворечивого ранжирования. Действительно, так как Y_1 является матрицей единичного ранга, то все ее столбцы линейно зависимы, а значит ранжирования, которые дает каждый столбец матрицы Y_1, одинаковы и соответствуют некоторой матрице непротиворечивого ранжирования C_1.

А поскольку по теореме Эккарта-Янга $\|A-Y_1\|_2 \to \min$, то $\|A-C_1\|_2 \to \min$ на множестве матриц непротиворечивого ранжирования.

4. Исследование отличий в ранжировании при различных параметрах матричных норм

При доказательстве теоремы 1 было показано, что нахождение минимума матричной нормы Фробениуса $\|A-C\|_2 \to \min, C \in \Psi$ фактически эквивалентно решению следующей оптимизационной задачи:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\cdot x_i \to \max, \forall i,j (x_i, x_j \in \{1,2,\ldots,m\}, i\neq j \Rightarrow x_i \neq x_j),$$

в которой согласно перестановочному неравенству максимум достигается при максимальном совпадении a_{ij} и x_i. Рассмотрим, как различаются ранжирования в случае других параметров матричных норм. Проведем анализ различий для класса поэлементных p-норм на примере.

Пример 2. Пусть дана исходная оценочная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

при $p = 1$ получаем множество ранжирований из одного элемента:

$$\{(3,4,2,1,5)\}$$

при $p = 2$ получаем следующее множество ранжирований:

$$\{(3,5,2,1,4),(3,5,1,2,4),(3,4,2,1,5),(3,4,1,2,5)\}$$

при $p = 3$ опять получаем множество ранжирований из одного элемента:

$$\{(3,5,1,2,4)\}$$

при $p = 4,5,\ldots,100$ результат также из одного, но другого элемента:

$$\{(3,1,5,2,4)\}$$

при $p > 100$ множество окончательных ранжирований состоит из двух элементов:

$$\{(4,1,5,2,3),(2,1,5,3,4)\}$$

Полученные результаты примера 2 при $p = 2$ согласуются, как было показано, с правилом Борда: сумма рангов объектов представлена вектором $(15, 16, 14, 14, 16)$. Таким образом, 2-й, 5-й объекты наиболее предпочтительны (при $p = 2$ им присваивается наибольший приоритет - в разных комбинациях 4, 5), 3-й, 4-й объекты наименее предпочтительны (им присваиваются наименьшие приоритеты 1, 2). С дальнейшим ростом p вплоть до $p = 100$ множество ранжирований остается устойчивым и состоит из одного элемента. Наконец, при $p > 100$ порождается множество окончательных ранжирований, в котором относительно $p = 2, 3$ ранжирование меняется почти на противоположное: наиболее предпочтительный 2-й объект становится худшим, а наименее предпочтительный 3-й объект становится лучшим. Дальнейшие расчеты для матрицы в примере также показывают, что при $p > 100$ окончательное ранжирование уже не меняется и остается таким же, как для $p = 101$ (проверено численно вплоть до $p = 5000$). Это позволяет предположить, что всегда, начиная с некоторой степени, множество окончательных ранжирований уменьшается до некоторого фиксированного множества, которое при последующем увеличении степени уже не меняется.

Докажем соответствующую теорему.

Теорема 2. *Для любой оценочной матрицы A из рангов и поэлементной p-нормы $\|\cdot\|_p$, начиная с некоторого d, имеем:*

$$\forall p_1, p_2 (d < p_1 < p_2, \|A - C_1\|_{p_1} \to \min, C_1 \in \Psi_1,$$

$$\|A - C_2\|_{p_2} \to \min, C_2 \in \Psi_2)$$

$$\Rightarrow (\Psi_1 = \Psi_2),$$

где Ψ_1, Ψ_2 — подмножества подходящих матриц непротиворечивого ранжирования.

Доказательство. Имеем

$$\left(\|A - C\|_p\right)^p = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij} - c_i|^p \to \min,$$

.

$$|a_{ij} - c_i| \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, (m-1)\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij} - c_i|^p = w_0 \cdot 0^p + w_1 \cdot 1^p + w_2 \cdot 2^p + \ldots + w_{m-1} \cdot (m-1)^p, \sum_{i=0}^{m-1} w_i = mn.$$

Пусть $w_l \neq 0$ — коэффициент при l^p, причем все остальные коэффициенты равны нулю: $\forall r > l (w_r = 0)$. Поскольку каждый элемент

w_l ограничен, т.к. $\sum\limits_{i=1}^{m-1} w_i = m \cdot n$, то, начиная с некоторой степени d_1, можно обеспечить, чтобы всё выражение

$$\frac{w_0 \cdot 0^{d_1}}{l^{d_1}} + \frac{w_1 \cdot 1^{d_1}}{l^{d_1}} + \frac{w_2 \cdot 2^{d_1}}{l^{d_1}} + \ldots + \frac{w_{l-1} \cdot (l-1)^{d_1}}{l^{d_1}} \ll 1.$$

Тогда достижение минимума выражения

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}-c_i|^p = l^{d_1} \cdot \left(\frac{w_1 \cdot 1^{d_1}}{l^{d_1}} + \frac{w_2 \cdot 2^{d_1}}{l^{d_1}} + \ldots + \frac{w_{l-1} \cdot (l-1)^{d_1}}{l^{d_1}} + w_l \right),$$

начиная с некоторого d_1, определяется только минимально возможным коэффициентом w_l при l. Пусть теперь для некоторых зафиксированных d_1, l, w_l имеется несколько различных выражений $w_0 \cdot 0^{d_1} + w_1 \cdot 1^{d_1} + w_2 \cdot 2^{d_1} + \ldots + w_{l-1} \cdot (l-1)^{d_1}$, дающих для зафиксированного d_1 несколько различных значений. Тогда аналогично увеличением степени до d_2 добиваемся, чтобы достижение минимума определялось только минимально возможным коэффициентом w_{l-1}. Повторяя подобные рассуждения, приходим к выводу, что начиная с некоторой степени $d > d_2 > d_1$ существует единственный набор коэффициентов $\{w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}\}$ доставляющих при всех $p > d$ минимум выражения

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij} - c_i|^p = w_0 \cdot 0^p + w_1 \cdot 1^p + w_2 \cdot 2^p + \ldots + w_{m-1} \cdot (m-1)^p \to \min,$$

$\sum\limits_{i=1}^{m-1} w_i = m \cdot n.$

Для завершения доказательства теоремы заметим, что поскольку набор $\{w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}\}$ не меняется при увеличении степени матричной нормы, начиная с некоторой степени p, то если C_1 (которому соответствует набор $\{w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}\}$) является решением для $\|A - C_1\|_p \to \min$, то оно является решением и для $\|A - C_1\|_{p+1} \to \min$. □

Замечание 1. Рассмотренный пример, а также идея доказательства теоремы приводят к выводу, что при увеличении степени в выражении

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij} - c_i|^p \to \min$$

существенно возрастают штрафы от больших отклонений подбираемых c_i к a_{ij}. Поэтому при увеличении степени предлагаемые ранжирования можно часто трактовать как более сбалансированные. Тогда окончательные ранжирования (которые уже не меняются при увеличении степени) становятся наиболее сбалансированным. Назовём такие ранжирования *сбалансированными ранжированиями*.

5. Анализ направлений использования сбалансированных ранжирований

Результаты, представленные в примере 2, приводят к выводу о возможных существенных отличиях ранжирования по правилу Борда, сингулярному разложению оценочной матрицы от введенного сбалансированного ранжирования, и ставят вопрос о направлениях возможного использования каждого из них. Для ответа на этот вопрос, введем понятие функции потерь $G(x, y)$, где x, y — некоторые ранжирования объектов из множества Q. Пусть x_i - ранжирование объектов множества Q, полученное i-м методом группового выбора, y_j - ранжирование объектов, совпадающее с j-м столбцом оценочной матрицы A (j-й столбец — диктатор). Тогда ранжирование x^0 будем считать лучшим, если оно удовлетворяет соотношению:

$$x^0 = \arg\left(\min_{x_i}\max_{y_j} G(x_i, y_j)\right) \tag{5.1}$$

Рассмотрим эволюцию стратегий группового выбора, удовлетворяющих выражению (5.1), для разных параметров возможной функции потерь на основе оценочной матрицы примера 2. Пусть для этого x_i будет принимать все возможные перестановки m объектов (т. е. реализуем полный перебор всех возможных методов ранжирования), из матрицы A подбираем такой столбец ранжирований y_j,который обеспечивал бы для заданного x_i максимально возможное значение функции потерь: $G(x_i, y_j) \to \max$. Согласно (5.1) из всех полученных значений $G(x_i, y_j)$ выбираем минимальное значение, соответствующее ему $x_i = x^0$ признается лучшим ранжированием для заданной функции потерь. В качестве функции потерь при различных значениях p используем:

$$G(x, y, p) = \ln\left(\sum_{i=1}^{m} p^{|x_i - y_i|}\right) \tag{5.2}$$

Ясно, что увеличение p позволяет учесть нелинейный рост штрафов от сильного отклонения векторов x, y. Результаты расчета для примера 2 представлены на рисунке 1. Для сопоставимости потерь при разных $p = 1.1, 2, 1000, 10000$ использованы нормированные значения функции потерь для каждого из 120 ранжирований примера 2:

$$\overline{G}(x, y, p) = \frac{G(x, y, p) - G_{min}(x, y, p)}{G_{max}(x, y, p) - G_{min}(x, y, p)}$$

.

На рисунке 1 выделены ранжирования при $\overline{G}(x, y, p) = 0$ для разных значений p. Как видно из полученных результатов, при малых

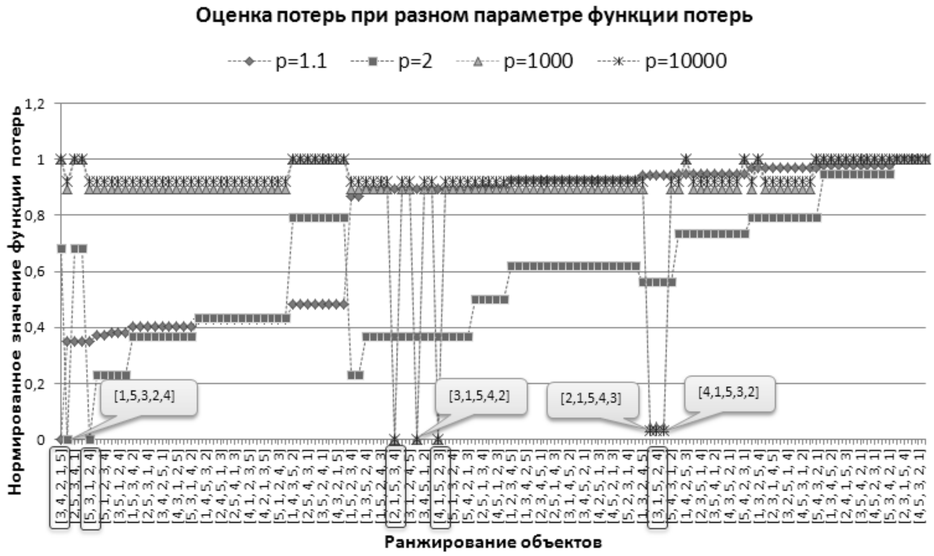

Рис. 1. Результаты расчета потерь при ранжировании

значениях $p = 1.1$ минимальное значение функции потерь (5.2) обеспечивает ранжирование $(3, 4, 2, 1, 5)$, что, как видно из примера 2, совпадает с ранжированием на основе поэлементной матричной нормы при $p = 1$. Небольшое увеличение до $p = 2$ приводит к ранжированиям $(1, 5, 3, 2, 4), (5, 3, 1, 2, 4)$, что отличается от рекомендуемого ранжирования $(3, 5, 1, 2, 4)$ на основе матричной нормы при $p = 2, 3$. Хотя, как видно из рисунка 1, ранжирование $(3, 5, 1, 2, 4)$ также имеет низкое значение функции потерь, но не минимальное из возможных. Дальнейшее увеличение p до 1000 в (5.2) позволяет выделить ранжирования $(2, 1, 5, 3, 4), (4, 1, 5, 2, 3)$, которые рекомендуются поэлементной матричной нормой при $p > 101$. Причем, как видно из рис. 1, эти ранжирования сохраняются и при последующем увеличении p до 10 000. Все это позволяет выдвинуть тезис: *сбалансированные ранжирования, получаемые нелинейным ростом штрафов на отклонения ранжирования групповым методом от возможного реализованного в действительности ранжирования, устойчивы на широком наборе функций потерь и значений их параметров.*

Исходя из данного тезиса, принимать решения, ориентируясь на сбалансированные ранжирования, во многих случаях оказывается выгоднее. Однако нахождение таких ранжирований полным перебором всех $m!$ объектов является неприемлемым.

В теореме 1 доказано совпадение ранжирования по правилу Борда с ранжированием по норме Фробениуса. С другой стороны, ранжирование по правилу Борда совпадает с ранжированием по среднему арифметическому рангов для каждого объекта. Известно, что среднее арифметическое c минимизирует векторную норму:

$$\sum_{i=1}^{m} |a_i - c|^2 \to \min \tag{5.3}$$

Заметим, что выражение (5.3) является одномерным вариантом выражения $\|A - C\| \to \min$ при $p = 2$, используемого в теореме 2. Таким образом, можно утверждать, что существует такое c:

$$\forall p : \sum_{i=1}^{m} |a_i - c|^p \to \min \tag{5.4}$$

Более того, согласно теореме 2, с ростом p такое значение c перестает существенно меняться. В связи с наличием в выражении (5.4) функции модуля аналитические решения достаточно просто получаются только для четных p. Соответственно, действительный корень данного уравнения можно считать еще одной формой среднего, а округление этого значения — значением c для ранговых оценочных матриц.

В предельном случае в выражении (5.4) при $p \to \infty$ решение соответствует

$$c = \frac{\max\{a_i\} + \min\{a_i\}}{2} \tag{5.5}$$

Все это дает возможность находить приближения к матрице непротиворечивого ранжирования при сбалансированном ранжировании. Для этого следует находить значение (5.5) построчно для оценочной матрицы. Тогда матрица, заполненная построчно этими средними, будет приближением к матрице непротиворечивого ранжирования при сбалансированном ранжировании.

В заключение для демонстрации выгод, получаемых от сбалансированного ранжирования, рассмотрим пример решения следующей задачи [8; 7]:

«Имеется 2009 мешочков с 1, 2, 3,..., 2008 и 2009 монетами. Каждый день разрешается взять из одного или нескольких мешочков по одинаковому числу монет. За какое минимальное число дней можно взять все монеты?»

Один из подходов к решению данной задачи — это представление всех чисел последовательности $1, 2, 3, \dots, 2008, 2009$ в двоичной системе счисления. Задача будем решена, если из всех разрядов этих чисел путем вынимания нужного количества монет убрать все единицы. Тогда ясно, что верхнее ограничение количества дней, за которое это можно сделать равняется количеству разрядов самого большого числа в статистической совокупности: $\lceil \log_2 \max\{a_i\} \rceil$. Это доставляет одно решение: $[1024, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1]$ (данная запись означает: первый день необходимо вынуть 1024 монеты из всех мешков, из которых это возможно, второй день — 512 монет и т.д.).

С другой стороны, поскольку в равномерном распределении монет по мешкам (в каждом мешке содержится одинаковое количество монет) требование задачи можно удовлетворить за один день, то стратегия может заключаться в выравнивании распределения монет по мешкам в ходе очередного вынимания монет. В этом случае необходимо выбирать типичного представителя статистической совокупности 1, 2, 3, ..., 2008, 2009. Если для определения типичного представителя использовать среднее арифметическое, и вынимать каждый день количество монет, соответствующее округленному в большую сторону среднему арифметическому из оставшихся монет, то это доставляет следующее решение: [1005, 502, 251, 126, 63, 31, 16, 8, 4, 2, 1]. Аналогичное решение получается, если в качестве типичного представителя взять среднее по формуле (5.5),т.е. при такой статистической совокупности эти средние совпадают. Однако для других статистических совокупностей это оказывается неверным. В качестве контрпримера рассмотрим следующую статистическую совокупность: a = [2, 6, 9, 15, 22, 23, 25, 27, 32, 33, 34, 35, 41, 44, 46, 47, 48, 52, 57, 59, 63, 65, 67, 70, 73, 76, 79, 83, 89, 93, 95, 97, 99, 103, 105, 107, 108, 109, 110, 111, 115, 118, 119, 120]. Использование среднего арифметического дает следующее решение: [67, 34, 17, 9, 4, 2, 1, 1], т. е. за 8 дней, что хуже известного тривиального ограничения: $\lceil \log_2 \max\{a_i\} \rceil = \lceil \log_2 120 \rceil = 7$

Использование среднего по формуле (5.5) позволяет получить решение по верхнему ограничению в 7 дней: [61, 31, 14, 7, 4, 2, 1]. Кроме того, следует указать на еще одно экстремальное свойство полученного решения: сумма значений 61+31+14+7+2+1=120 является минимальной из возможных (действительно, иначе невозможно вынуть все монеты из мешка со 120 монетами).

Таким образом, использование в качестве среднего значения величины, доставляющей минимум (5.4) при достаточно большом p, позволяет в ряде случаев выбирать выигрышную стратегию. Экстремальные свойства таких средних можно использовать для дальнейшего обоснования эффективности методов группового выбора, построенных на основе сбалансированного ранжирования.

Список литературы

1. Артамонов Ю. Н. Модель оценки результативности научных и образовательных организаций на основе сингулярного разложения матрицы / Ю. Н. Артамонов, И. О. Каманин // Информ. и телекоммуникац. технологии. – 2013. – № 17. – С. 3–9.
2. Артамонов Ю. Н. Метод оценки результативности научно-технических проектов целевых программ // Ю. Н. Артамонов // Изв. Ин-та инженер. физики. – 2012. – Т. 1, № 23. – С. 78–81.
3. Емелин Н. М. Сотрудничество российских вузов и предприятий оборонно-промышленного комплекса и оценка его эффективности / Н. М. Емелин, Ю. Н. Артамонов // Изв. Ин-та инженер. физики. – 2015. – Т. 2, № 36. – С. 92–95.
4. Миркин Б. Г. Методы многокритериальной стратификации и их экспериментальное сравнение / Б. Г. Миркин, М. А. Орлов. – М. : Издат. дом Высш. шк. экономики, 2013. – С. 8–11.
5. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели / Э. Мулен. – М. : Мир, 1991. – 464 с.
6. Мушик Э. Методы принятия технических решений / Э. Мушик, П. Мюллер. – М. : Мир, 1990. – 208 с.
7. Научный форум dxdy [Электронный ресурс]. – URL: http://dxdy.ru/topic111132.html.
8. Национальный открытый университет «ИНТУИТ» [Электронный ресурс]. – URL: http://www.diofant.ru/problem/383/.
9. Филатов А. Ю. Неоднородность и ее учет при принятии экономических решений / А. Ю. Филатов. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. – 107 с.
10. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир, 1989. – 656 с.
11. Eckart C. The approximation of one matrix by another of lower rank / C. Eckart, G. Young // Psychometrika. – 1936. – Vol. 1. – P. 211–218.
12. Handbook on Constructing Composite Indicators // Methodology and user guide. – OECD : European Commission, 2008. – P. 83–89.

Артамонов Юрий Николаевич, кандидат технических наук, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Государственный научно-методический центр», 115093, Москва, ул. Люсиновская, 51 тел.: (499) 706-81-25 (e-mail: junaart@mail.ru)

Y. N. Artamonov

Group Choice Using Matrix Norms

Abstract. The article describes the approach to the construction of methods of the group choice and ranking of objects in order of preference, based on the minimizing the deviation of the matrix, characterizing objects (of an evaluation matrix) from some peer matrix, the columns of which are the same (the matrix of consistent ranking). To evaluate the deviation is proposed to use matrix norms: p-norm, p-q norm, Schatten norm based on the difference of evaluation and peer matrix, on the difference of their covariances matrix, as well as on other forms. It is proved that the ranking, obtained by minimizing the difference between the evaluation matrix of ranks and matrix of consistent ranking by the Frobenius matrix norm coincides with the ranking obtained by evaluation matrix of the ranks by the Borda rule. It is considered the connection between matrix of consistent ranking, obtained by the Frobenius matrix norm with peer matrix in the singular decomposition of an evaluation matrix and related results of ranking by influence method. For matrix p-norm is proved that under sufficiently large exponent matrix norm the set of rankings, that give the minimum of this matrix norms from the difference between the evaluation matrix and a matrix consistent ranking, becomes stable - does not change during the subsequent increase in the degree (the results of this a ranking are called balanced ranking). The examples show that balanced ranking gives the minimum losses under non-linear increase of penalties from mismatches ranking with actually realized ranking.

Keywords: monotonic classification, rank scale, matrix norm, Eckart – Young theorem, low-rank matrix, Borda count, ranking of the influence.

References

1. Artamonov Yu.N., Kamanin I.O. Model evaluate the performance of scientific and educational organizations based on singular value decomposition of the matrix. *Informacionnye i telekommunikacionnye tehnologii*, 2013, no 17, pp. 3-9. (in Russian)
2. Artamonov Yu.N. Method evaluate the performance of science and technology projects of purpose-oriented programs. *Izvestija Instituta inzhenernoj fiziki*, 2012, vol. 1, no 23, pp. 78-81. (in Russian)
3. Emelin N.M., Artamonov Yu.N. Cooperation between Russian universities and enterprises of the military-industrial complex and an assessment of its effectiveness. *Izvestija Instituta inzhenernoj fiziki*, 2015, vol. 2, no 36, pp. 92-95. (in Russian)
4. Mirkin B.G., Orlov M.A. Methods of multicriteria stratification and experimental comparison. Moscow, Izdat. dom Vysshej shkoly jekonomiki, 2013, pp. 8-11. (in Russian)
5. Moulin H. Axioms of cooperative decision making. Moscow, Mir, 1991. 464 p. (in Russian)
6. Mushik E. Mueller P. Methods of technical decisions. Moscow, Mir, 1990. 208 p. (in Russian)
7. Scientific forum dxdy. URL: http://dxdy.ru/topic111132.html.
8. National Open University «INTUIT», project diofant.ru. URL: http://www.diofant.ru/problem/383/.
9. Filatov A.Yu. Heterogeneity and its account in making economic decisions. Irkutsk, Izd-vo IGU, 2008. 107 p. (in Russian)
10. Horn R., Johnson C. Matrix analysis. Moscow, Mir, 1989. 656 p. (in Russian)
11. Eckart C., Young G. The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1936, vol. 1, pp. 211-218.
12. Handbook on Constructing Composite Indicators. Methodology and user guide. OECD. European Commission, 2008, pp. 83-89.

Artamonov Yuriy Nikolaevich, Candidate of Sciences (Engineering Sciences), Federal State Budget Scientific Institution "State Scientific-Methodological Centre", 51, Lyusinovskaya st., Moscow, 115093
tel.: (499) 706-81-25 (e-mail: `junaart@mail.ru`)