Серия «Математика»
2015. Т. 11. С. 13—27

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.977

О некоторых свойствах вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений. I *

Н. Д. Банг
Иркутский государственный технический университет

В. Ф. Чистяков, Е. В. Чистякова
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. Рассматриваются линейные системы интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ), с тождественно вырожденной или прямоугольной матрицей перед производной искомой вектор-функции, включая системы со слабой особенностью в ядре. В работе обсуждаются вопросы разрешимости и структура общих решений таких систем.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, общее решение, индекс, особые точки.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$(\Lambda_1 + V)x :=$$

$$= A(t)\dot{x} + B(t)x + \int\limits_{\alpha}^{t} p(t,s)K(t,s)x(s)ds = f,\ t \in T = [\alpha, \beta], \qquad (1.1)$$

где $A(t),\ B(t), K(t,s)$ – $(m \times n)$-матрицы, $x \equiv x(t),\ f \equiv f(t)$–искомая и заданная вектор-функции соответственно,

$$\Lambda_1 x := A(t)\dot{x} + B(t)x, p(t,s) = 1$$

либо

$$p(t,s) = (t-s)^{-\gamma},\ 0 < \gamma < 1, \dot{z} := dz(t)/dt.$$

* Работа поддержана грантом РФФИ № 15-01-03228-а.

Предполагается, что входные данные достаточно гладкие и характер вырождения задается условием

$$\mathrm{rank}\, A(t) < \min\{m, n\} \; \forall t \in T. \tag{1.2}$$

Система 1.1 называется: *замкнутой*, если число уравнений равно числу компонент искомой вектор - функции ($m = n$), *переопределенной*, если $m > n$, и *недоопределенной*, если $m < n$. Для замкнутой системы условие 1.2 эквивалентно равенству $\det A(t) \equiv 0, \; t \in T$.

Системы вида 1.1, удовлетворяющие условию 1.2, встречаются, например, теории электрических систем [4]. В частности, в таком виде можно записать системы дифференциальных и алгебраических уравнений, интегральных уравнений Вольтерра первого и второго рода, связанные по части переменных. В данной работе продолжаются исследования начатые в [2], [3], [6], [7].

Замечание 1. Для упрощения записи указание зависимости от t в работе будет иногда опускаться, если это не вызывает путаницы. Включения $V(t) \in \mathbf{C}^i(T), \; i > 1$, где $V(t)-$ матрица или вектор-функция, означают, что все производные всех ее элементов непрерывны до порядка i включительно. Непрерывности соответствуют обозначения: $V(t) \in \mathbf{C}(T)$. Запись $V(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ означает, что все элементы $V(t)$ являются вещественно-аналитическими функциями на T.

Под решением системы 1.1 мы понимаем любую вектор-функцию $x(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, которая обращает уравнение 1.1 в тождество на T.

Частный случай таких систем $\Lambda_1 x = f, \; t \in T$, называемых дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ), исследуется уже около 40 лет. Данная тематика является относительно новой. В фундаментальной монографии [9] изучены только частные случаи полуявных систем, когда $A(t) = \mathrm{diag}\{E_r, 0\}$. Некоторые классы уравнений в банаховых пространствах с ядром типа свертки изучались в работах [10], [5]. При переходе к конечномерным пространствам операторы, задающие уравнения, являются постоянными матрицами.

Задачей нашей работы является получение условий разрешимости систем вида 1.1 и выяснение структуры общих решений таких систем.

2. Основные определения и вспомогательные сведения

Введем основные для нас понятия.

Определение 1. *Пространство решений (ПР) системы 1.1 конечномерно на T, если существует $(n \times \nu)$-матрица $X_\nu(t) \in \mathbf{C}^1(T)$ с* *минимально возможным* ν *такая, что любая линейная комбинация* $x(t,c) = X_\nu(t)c$, *где вектор* c *пробегает* $\mathbf{R}^\nu$, *удовлетворяет тождеству* $(\Lambda_1 + V)x(t,c) \equiv 0$ *и на* T *нет решений системы* $(\Lambda_1 + V)x = 0$ *отличных от* $x(t,c)$.

Ядро оператора $\Lambda_1 + V$ *конечномерно (*$\dim\ \ker\ (\Lambda_1 + V) < \infty$*), если ПР системы 1.1 конечномерно. Число* ν *будем называть размерностью ПР или размерностью ядра.*

Если мы предположим, что

$$m = n,\ \det\ A(t) \neq 0\ \forall t \in T,\ K(t,s) \equiv 0,$$

то ПР системы $\Lambda_1 x = 0,\ t \in T$ совпадает с множеством функций $x(t,c) = X(t)c$, где $X(t)-$матрицант системы $\dot{x}(t) = -A^{-1}(t)B(t)$, $c \in \mathbf{R}^n$. Следовательно, $\nu = n$.

Пример 1. Рассмотрим одно уравнение

$$\Lambda_1 y := t\dot{y} - 2y = 0,\ t \in T = [-1, 1],$$

где

$$y(t,c) = h_1(t)c_1 + h_2(t)c_2 \in \mathbf{C}^1(T),\quad c_1,\ c_2 \in \mathbf{R},$$

$$h_1(t) = \{0,\ t \in T_1;\ t^2,\ t \in T_2\},\ h_2(t) = \{t^2,\ t \in T_1;\ 0,\ t \in T_2\},$$

$T_1 = [-1, 0],\ T_2 = (0, 1]$. Чтобы выделить одно решение из семейства $y(t,c)$, надо определить две константы $c_1,\ c_2$. Таким образом, здесь $\dim\ \ker\ \Lambda_1 = 2$. Более того, можно строить одномерные уравнения $\zeta(t)\dot{y} - y = 0,\ t \in T$, где $\zeta(t)-$ аналитическая функция с нулями на T, с наперед заданной размерностью ПР в нашем смысле.

Пример 2. Пусть задана система

$$(\Lambda_1 + V)x =$$

$$= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} x + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g(t)s & g(t) \end{pmatrix} x(s)ds = 0,\ t \in [0,\ 1], \quad (2.1)$$

где $\gamma-$ вещественный параметр, $g(t)-$заданная функция из $\mathbf{C}^A(T)$. Здесь $x_2 = -tx_1$, где $(x_1\ x_2)^\top = x$. Тогда из первого уравнения следует, что $(\gamma - 1)x_1 = 0 \Leftrightarrow \dim\ \ker\ \Lambda_1 = 0$ при $\gamma \neq 1$, включая значение $\gamma = 0$. При $\gamma = 1$ подстановкой проверяется, что любая вектор-функция вида $(-u(t)\ tu(t))^\top$, где $u(t)-$ произвольная функция из $\mathbf{C}^1[0,\ 1]$, $\top-$символ транспонирования, является решением системы, а вектор-функции $\phi_j = \left(-t^j\ \ t^{j+1}\right)^\top$, $j = 0, 1, \cdots$, образуют базис в пространстве решений: $\dim\ \ker\ (\Lambda_1 + V) = \infty$.

Изучим структуры обших решений систем вида 1.1 в случае полного ранга матрицы $A(t)$. Ниже предполагается, что входные данные по крайней мере непрерывны в своих областях определения. Нам потребуется такое понятие.

Определение 2. *(см. например,* [1] *). Полуобратной матрицей к $(m \times n)$-матрице $M(t)$, $(t) \in T$, называется $(n \times m)$-матрица $M^{-}(t)$, удовлетворяющая для любых $t \in T$ уравнению*

$$M(t)M^{-}(t)M(t) = M(t). \tag{2.2}$$

Полуобратная матрица будет псевдообратной (обозначается $M^{+}(t)$), если, кроме 2.2 для всех $t \in T$ выполнены равенства

$$M^{+}(t)M(t)M^{+}(t) = M^{+}(t), (M^{+}(t)M(t))^{\top} = M^{+}(t)M(t),$$
$$(M(t)M^{+}(t))^{\top} = M(t)M^{+}(t). \tag{2.3}$$

Полуобратная и псевдообратные матрицы определены поточечно для любого $t \in T$ и любой $(m \times n)$-матрицы $M(t)$. Псевдообратная матрица единственна. Теория постоянных обобщенных обратных матриц изложена в ряде монографий (см. например, [1]). Если матрица $M(t)$ квадратная и неособенная, то $M^{-1}(t) = M^{+}(t) = M^{-}(t)$.

Согласно [6], существуют матрицы $A^{-}(t) \in \mathbf{C}^{q}(T)$, $q = 0, 1, 2, \cdots$, в частности $A^{+}(t) \in \mathbf{C}^{q}(T)$, если rank $A(t) = r = const\ \forall t \in T$.

Используя свойства полуобратных матриц перепишем систему 1.1 в эквивалентной форме

$$\dot{x} = -A^{-}(t)B(t)x + \int_{\alpha}^{t} A^{-}(t)K(t,s)x(s)ds + A^{-}(t)f(t) + [E_n - A^{-}(t)A(t)]u(t),$$

$$[E_m - A(t)A^{-}(t)][-B(t)x + \int_{\alpha}^{t} K(t,s)x(s)ds + f(t)] = 0,\ t \in T, \tag{2.4}$$

где $u(t)-$произвольная вектор-функция. Эта запись основана на представлении решения линейной системы $My = b$ в виде соотношения

$$y = M^{-}b + [E_n - M^{-}M]v,\ [E_m - MM^{-}]b = 0,$$

где $v-$произвольный вектор. Второе равенство является условием совместности (см. например, [1]).

Пусть в системе 1.1 $A(t) \in \mathbf{C}^{q}(T)$ и rank $A(t) = \min\{m, n\}\ \forall t \in T$. Для определенности примем $A^{-}(t) = A^{+}(t)$, $m \leq n$. Тогда в 2.4 $E_m - A(t)A^{+}(t) = 0$ и несложные выкладки позволяют записать

$$x(t,c) = Z(t)c + \varphi(t),\ t \in T, \tag{2.5}$$

где

$$Z(t) = X(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} \mathbf{K}(t,s)X(s)ds,\ \varphi(t) = \phi(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} \mathbf{K}(t,s)\phi(s)ds,$$

$\phi(t) = A^{+}(t)f(t) + [E_n - A^{+}(t)A(t)]u(t),\ X(t)-$матрицант системы $\dot{x} = -A^{+}(t)B(t)x,\ c-$ произвольный вектор, $\mathbf{K}(t,s)-$ядро произведения $A^{+}(t)V$ и оператора Вольтерра с ядром $X(t)X^{-1}(s)$. Если $A(t),\ B(t),\ f(t),\ u(t) \in \mathbf{C}^{l}(T)$, то $A^{+}(t) \in \mathbf{C}^{l}(T)$ и $x(t,c) \in \mathbf{C}^{l}(T)$.

Рассмотрим теперь случай $m > n$. Здесь $E_n - A(t)A^{+}(t) = 0$. Тогда для существования решений у системы 1.1 необходимо существование постоянных решений у системы

$$\mathcal{L}(t)c = \psi(t), \tag{2.6}$$

где $\mathcal{L}(t) = -[E_m - A^{+}(t)A(t)]B(t)Z(t),\ \psi(t) = [E_m - A^{+}(t)A(t)][-f(t) + B(t)\varphi(t)]$. Известно [1, с.34], что система 2.6 имеет постоянные решения c тогда и только тогда, когда

$$\psi(t) = \mathcal{L}(t)\mathcal{C}^{-}\theta, \tag{2.7}$$

где $\mathcal{C}^{-}$полуобратная матрица к матрице $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}\mathcal{C}^{-}\mathcal{C} = \mathcal{C}$,

$$\mathcal{C} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathcal{L}^{\top}(s)\mathcal{L}(s)ds,\ \theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathcal{L}^{\top}(s)\psi(s)ds, \qquad c = \mathcal{C}^{-}\theta + [E_n - \mathcal{C}^{-}\mathcal{C}]w, \tag{2.8}$$

$w-$произвольный вектор из $\mathbf{R}^{n}$. Тогда множество решений системы 1.1 имеет вид

$$x(t,w) = Z(t)(\mathcal{C}^{-}\theta + [E_n - \mathcal{C}^{-}\mathcal{C}]w) + \varphi(t), \tag{2.9}$$

Определение 3. *Пусть заданы операторы*

$$\Lambda_l := \sum_{j=0}^{l} L_j(t)(d/dt)^j,\ \tilde{\Lambda}_q := \sum_{j=0}^{q} \tilde{L}_j(t)(d/dt)^j,\ \bar{\Lambda}_\omega := \sum_{j=0}^{\omega} \bar{L}_j(t)(d/dt)^j,$$

где $L_j(t) \in \mathbf{C}(T),\ \tilde{L}_j(t) \in \mathbf{C}^{l}(T)$ *–* $(\rho \times \rho)$*-матрицы,* $\bar{L}_\omega(t) = E_\rho$*, со свойством*

$$\Lambda_l \circ \tilde{\Lambda}_q y = \bar{\Lambda}_\omega y\ \forall y \in \mathbf{C}^{l+q}(T).$$

Тогда оператор Λ_l *будем называть левым нормализатором (ЛН) для оператора* $\tilde{\Lambda}_q$*, а оператор* $\tilde{\Lambda}_q$ *будем называть правым нормализатором (ПН) для оператора* Λ_l*.*

Определение 4. *Пусть для оператора*

$$\Lambda_{l,*} := \sum_{j=0}^{l} L_j(t)(d/dt)^j,$$

где $L_j(t) \in \mathbf{C}(T)$ *–* $(m \times m)$*-матрицы, определен ЛН и он обладает свойством*

$$\Lambda_{l,*} \circ (\Lambda_1 + V)y =$$

$$= \begin{pmatrix} A_l(t) \\ 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} + \begin{pmatrix} B_l(t) \\ 0 \end{pmatrix} y + \int\limits_{\alpha}^{t} \begin{pmatrix} K_l(t,s) \\ 0 \end{pmatrix} y(s)ds \ \forall y \in \mathbf{C}^{l+1}(T), \quad (2.10)$$

где матрицы $A_l(t), B_l(t), K_l(t,s)$ *имеют размерность* $(k \times n)$ $, 0 < k \leq \min\{m,n\}$*, причем матрица* $A_l(t)$ *имеет полный ранг для всех* $t \in T$ *кроме, возможно, конечного числа точек* $t_j \in T, \ j = 0,1,2,...,\mu$.

Если матрица $A_l(t)$ *имеет полный ранг для всех* $t \in T$*, то оператор* $\Lambda_{l,*}$ *будем называть обобщенным левым регуляризирующим оператором (ОЛРО) для оператора* $\Lambda_1 + V$*, а минимально возможное* l *левым индексом.*

Если $k = \min\{m,n\}$*, то оператор* $\Lambda_{l,*}$ *будем называть ЛРО для оператора* $\Lambda_1 + V$.

Определение 5. *Особыми точками системы 1.1 будем называть точки* $t_j \in T, \ j = 0,1,...,\mu$ *со свойством* $\operatorname{rank} A_l(t_J) < k$.

Пример 3. Пусть задана система 2.1. Если $\gamma \neq 1$, то индекс $l = 2$ и в определении 3 можно принять

$$\Lambda_{l,*} = \mathbf{d}L\mathbf{d}, \ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d/dt) \end{pmatrix}, \ L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\det \ A_l(t) = \gamma - 1 \ \forall g(t), \ k = 2$.

Если $\gamma = 1, \ g(t) = e^t$, то индекс $l = 3$ и можно принять

$$\Lambda_{l,*} = L\mathbf{d}L\mathbf{d}\mathrm{diag}\{1, e^{-t}\}L\mathbf{d}.$$

Очевидно, что для замкнутых систем достаточным условием конечномерности ПР является условие $k = n$. В случае, когда $\gamma = 1, \ g(t) = \sin(t)$, пока непонятно как построить ЛРО в виде произведения дифференциальных операторов первого порядка.

Понятие ЛРО тесно связано с понятием $i-$продолженной системы. Под $i-$продолженной системой 1.1 понимается совокупность самой системы и i ее полных производных

$$\{(\Lambda_1 + V)x - f = 0, \ (d/dt)[(\Lambda_1 + V)x - f] = 0, \ \cdots (d/dt)^i[(\Lambda_1 + V)x - f] = 0\}. \quad (2.11)$$

Справедлива формула

$$\mathcal{M}_i[M(t)F(t)] = \mathcal{M}_i[M(t)]\mathrm{d}_i[F(t)], \tag{2.12}$$

вытекающая из формулы Лейбница для дифференцирования произведений $[M(t)F(t)]^{(i)} = \sum\limits_{j=0}^{i} C_i^j A^{(i-j)}(t)B^{(j)}(t)$, где $M(t), F(t)-$некоторые матрицы из $\mathbf{C}^i(T)$, $C_i^j = j!(i-j)!/i!-$ биномиальные коэффиценты,

$$\mathrm{d}_i[M] = \{M^\top, (d/dt)M^\top, \cdots (d/dt)^i M^\top\}^\top,$$

$$\mathcal{M}_i[M(t)] = \begin{pmatrix} C_0^0 M(t) & 0 & \cdots & 0 \\ C_1^0 M^{(1)}(t) & C_1^1 M(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_i^0 M^{(i)}(t) & C_i^1 M^{(i-1)}(t) & \cdots & C_i^i M(t) \end{pmatrix}.$$

С использованием формулы 2.12 систему 2.11 можно записать в виде соотношения

$$D_i[A,B,K](t)\mathrm{d}_{i+1}[x] + \int\limits_{\alpha}^{t} \mathrm{d}_i[K](t,s)x(s)ds = \mathrm{d}_i[f], \tag{2.13}$$

где $D_i[A,B,K](t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M}_l[A(t)] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{M}_l[B(t)] & 0 \end{pmatrix} + \sum\limits_{j=0}^{l} \mathcal{M}_l[\overline{K}_j(t)]\mathcal{E}_j$, нулевые блоки имеют размерность $(m[i+1]\times n)$, $\overline{K}_j(t) = \partial K^j(t,s)/\partial t^j|_{t=s}$, $\mathcal{E}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n(i+1-j)} & 0 \end{pmatrix} - (m_i \times n_i)-$матрицы, $m_i = m[i+1],\ n_i = n[i+2]$. Ниже мы будем использовать разбиение

$$D_i[A,B,K](t) = \begin{pmatrix} \tilde{B}_i & \Gamma_i[A,B,K](t) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

где $\Gamma_i[A,B,K](t)-$блочно-треугольная квадратная матрица с блоками $A(t)$ на диагонали.

3. Теоремы о разрешимости

В разделе сформулированы утверждения о разрешимости систем 1.1 для некоторых случаев, когда $m \le n$. Нам ниже потребуется такое утверждение из [11].

Лемма 1. *Пусть:*
1) $(n\times n)$*-матрица* $A(t) \in \mathbf{C}^A(T)$*;*
2) $\operatorname{rank} A(t) \le r$.

Тогда существуют $(n \times n)$-матрицы $L(t),\ R(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, неособенные для любого $t \in T$, такие, что

$$L(t)A(t)R(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $A_{11}(t)$ – $(r \times r)$-блок, $\det\ A_{11}(t) \not\equiv 0$ *на T.*

Теорема 1. *Пусть для недоопределенной системы 1.1 выполнены условия:*
1) $A(t),\ B(t) \in \mathbf{C}^A(T),\ K(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$;
2) существует ЛРО и индекс оператора $\Lambda_1 + V$ равен $l < \infty$;
3) $f \in \mathbf{C}^{l+1}(T)$;
4) $\operatorname{rank}\ \Upsilon_{l-1} = \operatorname{rank}\ \begin{pmatrix}\Upsilon_{l-1} & \mathrm{d}_{l-1}[f](\alpha)\end{pmatrix},\ \Upsilon_{l-1} = D_{l-1}[A,B,K](\alpha)$.

Тогда найдутся $(n \times d)$-матрица $X_d(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, $\operatorname{rank}\ X_d(\alpha) = d$ *и $(n \times m)$-матрицы $K_0(t,s),\ K_1(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T),\ \ \tilde{C}_0(t),\ C_j(t) \in \mathbf{C}^A(T),\ j = 0, 1, \cdots, l$, такие, что любая линейная комбинация*

$$x(t,c) = X_d(t)c + \psi(t),\ t \in T,$$

$$\psi(t) = \int\limits_\alpha^t K_0(t,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{l} C_j(t)(d/dt)^j f(t) + \tilde{C}_0(t)w(t) + \int\limits_\alpha^t K_1(t,s)w(s)ds,$$

где c — произвольный вектор из $\mathbf{R}^d$, $w(t)$ — произвольная гладкая вектор-функция, является решением на системы 1.1 и на отрезке T нет других решений.

Доказательство. В условиях теоремы справедлива альтернатива:

$$\operatorname{rank} A = m\ \forall t \in T \text{ либо } \operatorname{rank} A < m\ \forall t \in T.$$

Действительно, по определению 4 $L_l A \equiv 0\ \forall t \in T$. Пусть $R = (n \times n)$-матрица из леммы 1, применительно к $(n \times n)-$матрице $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ обладает свойством $AR = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \end{pmatrix}$, где блок A_{11} имеет размерность $(m \times m)$. Если $\det\ A_{11}(\gamma) \neq 0,\ \gamma \in T$, то существует окрестность $\mathcal{O} = (\gamma - \delta, \gamma + \delta) \subset T:\ \det\ A_{11}(t) \neq 0,\ t \in \mathcal{O}$ (или полуинтервалы $[\alpha, \alpha + \delta)$, $(\beta - \delta, \beta]$, и невозможно равенство $L_l A \equiv 0\ \forall t \in \mathcal{O}$ при любой матрице L_l. Выпишем с использованием леммы 1 нужные в последующем равенства

$$LAR = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ LA = \begin{pmatrix} A_1^0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in T,\ L, R \in \mathbf{C}^A(T), \tag{3.1}$$

где A_{11} – $(r \times r)$-блок, $\det\ A_{11}(t) \not\equiv 0$ на T, $r = \max\ \{\operatorname{rank} A(t),\ t \in T\}$.

Далее, из формулы 2.12 следует

$$M\Gamma_l[A,B,K]=\Gamma_l[LA,LB,LK],\ M\mathrm{d}_l[K]=\mathrm{d}_l[LK],\ M\mathrm{d}_l[f])=\mathrm{d}_l[Lf], \tag{3.2}$$

где $M=\mathcal{M}_l[L]$. Первое из равенств 3.2, позволяет выписать соотношение

$$P\Gamma_l[A,B,K]=P(SM)^{-1}(SM)\Gamma_l[A,B,K]=U\Gamma_l^1[A,B,K], \tag{3.3}$$

где $P=\begin{pmatrix}L_0 & L_1 & \cdots & L_l\end{pmatrix}$-матрица из коэффициентов ЛРО, S -матрица перестановок блочных строк по правилу: на место второй-четвертую, четвертой-шестую и т. д. Вторую строку поставим последней. В результате этих преобразований получим новую матрицу.

$$\Gamma_l^1[A,B,K]=\begin{pmatrix}\Gamma_{l-1}[A_1,B_1,K_1] & 0\\ W^0 & A_1^0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ t\in T, \tag{3.4}$$

$$A_1=\begin{pmatrix}A_1^0\\ B_2^0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}B_1^0\\ \dot B_2^0+K_2^0(t,t)\end{pmatrix},\ K_1=\begin{pmatrix}K_1^0(t,s)\\ \partial K_2^0(t,s)/\partial t\end{pmatrix},$$

$$LB=\begin{pmatrix}B_1^0\\ B_2^0\end{pmatrix},\ LK=\begin{pmatrix}K_1^0\\ K_2^0\end{pmatrix},$$

где W^0 -некоторый блок подходящей размерности. Число нулевых строк в матрице из 3.4 равно r. По матрицам A_1,B_1,K_1 построим оператор

$$(\Lambda_{0,1}+V_1)x=[\Omega_0\circ(\Lambda_0+V)]x=A_1\dot x+B_1x+\int\limits_\alpha^t K_1(t,s)x(s)ds,\ t\in T, \tag{3.5}$$

который можно получить действием на исходную систему оператором

$$\Omega_0=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}0\\ L_2^0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}L_1^0\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}L_1^0\\ L_2^0\end{pmatrix}=L, \tag{3.6}$$

Число строк в блоке L_1^0 равно r. Введем обозначение

$$U=P(SM)^{-1}=\begin{pmatrix}U_0 & U_1 & \cdots & U_l\end{pmatrix}.$$

По условию $P_lA\equiv 0$ на T и из равенств 3.1 следует, что

$$P_lL^{-1}LA=U_l\begin{pmatrix}A_1^0\\ 0\end{pmatrix},\ U_l\begin{pmatrix}A_1^0\\ 0\end{pmatrix}R=U_l\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0, \tag{3.7}$$

Введем разбиение на блоки

$$U_l=\begin{pmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix},$$

где V_{11} – $(r \times r)$-блок. Согласно 3.1 из 3.4 получаем:

$$V_{11}A_{11} \equiv 0,\ V_{21}A_{11} \equiv 0,\ t \in T,$$

где $\det\ A_{11} \not\equiv 0,\ t \in T$. Таким образом, с учетом аналитичности сомножителей видим, что $V_{11} \equiv 0,\ V_{21} \equiv 0$. Отсюда имеем равенство

$$\begin{pmatrix} U_0 & U_1 & \cdots & U_{l-1} \end{pmatrix} \Gamma_{l-1}[A_1, K_1] = \begin{pmatrix} A_l & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Следовательно, оператор $\sum\limits_{j=0}^{l-1} U_j(d/dt)^j$ является ЛРО для оператора 3.5.

Матрицу Υ_{l-1} и вектор $\mathrm{d}_{l-1}[f](\alpha)$ умножим на матрицу $\mathcal{M}_{l-1}[L](\alpha)$ и переставим блочные строки. Таким образом, мы выделим из условия 4) теоремы новые условия разрешимости

$$\mathrm{rank}\ \Upsilon^1_{l-2} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} \Upsilon^1_{l-2} & \mathrm{d}_{l-2}[f_1](\alpha) \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

где $\Upsilon^1_{l-2} = \Gamma_{l-2}[A_1, B_1, K_1](\alpha),\ f_1 = \Omega_0 f$.

Для матрицы A_1 из формулы 3.5 в силу существования ЛРО с коэффициентами из формулы 3.8 справедлива альтернатива:

$$\mathrm{rank}\ A_1 = m\ \forall t \in T \text{ либо } \mathrm{rank}\ A_1 < m\ \forall t \in T.$$

Проводя аналогичные рассуждения, получив систему интегральных уравнений, определяемую матрицами A_2, B_2, K_2 и новые условия совместности. В силу условия 2) теоремы мы за конечное число шагов получим систему с матрицей A_l полного ранга для всех $t \in T$, для которой можно выписать общее решение по формуле 2.5.

Рассмотрим системы на шагах процесса понижения индекса с номерами l и $l-1$

$$[\Lambda_{0,l} + V_l]y = f_l,\ [\Lambda_{0,l-1} + V_{1-1}]y = f_{l-1}, \tag{3.10}$$

где

$$f_i = \Omega_{l-1}\Omega_{l-2}\cdots\Omega_0 f,\ i = l-1, l. \tag{3.11}$$

Пусть $y \equiv y(t)$ решение первой из систем. Первые r_{l-1} уравнений у обеих систем совпадают, где $r_{l-1} = \max\{\mathrm{rank}\ A_{l-1}(t),\ t \in T\}$. Условие 3.9 здесь имеет вид

$$\mathrm{rank}\ A_{l-1}(\alpha) = \mathrm{rank}\ \begin{pmatrix} A_{l-1}(\alpha) & B_{l-1}(\alpha) & f_{l-1}(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Напомним, что первая из систем 3.10 получена умножением второй системы на оператор Ω_{l-1}. При этом система умножается на неособенную матрицу L_{l-1} из леммы 1 и последние $n - r_{l-1}$ уравнений дифференцируются.

Проинтегрируем последние $n - r_{l-1}$ уравнений системы 3.10, которые имеют вид

$$(d/dt)\left[B_{l-1,2} + \int\limits_{\alpha}^{t} K_{l-1,2}(t,s)y(s)ds - f_{l-1,2} = 0\right],$$

от α до t. Получим выражение, стоящее в квадратных скобках, и в силу равенства 3.12 это выражение в точке α равно нулю. Итак, вектор-функция $y(t)$ является решением второй системы 3.10. Продолжая этот процесс, убеждаемся в справедливости утверждения. □

Замечание 2. В случае замкнутой системы 1.1произвольные функции в решении отсутствуют. Общее решение имеет вид

$$x(t,c) = X_d(t)c + \int\limits_{\alpha}^{t} K_0(t,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{l} C_j(t)(d/dt)^j f(t),\ t \in T.$$

Лемма 2. *Если в условии 4) теоремы ранг матрицы Υ_{l-1} полный, система (1) разрешима при любой вектор-функции $f \in \mathbf{C}^l(T)$.*

Доказательство. Доказательство вытекает из того факта, что в этом случае гарантирована разрешимость системы алгебраическое системы $\Upsilon_{l-1}z = \mathrm{d}_{l-1}[f](\alpha)$ при любой правой части $\mathrm{d}_{l-1}[f](\alpha)$. Условие теоремы 1 под номером 4) автоматически выполняется. □

Лемма 3. *В качестве ЛРО в условиях теоремы можно принять произведение операторов*

$$\Lambda_l = \prod_{j=0}^{l-1} \Omega_j = \prod_{j=0}^{l-1}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ L^0_{2,j}\end{pmatrix}\frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} L^0_{1,j} \\ \dot{L}^0_{2,j}\end{pmatrix}\right]x,\ \begin{pmatrix} L^0_{1,j} \\ L^0_{2,j}\end{pmatrix} = L^0_j.$$

При исследовании вырожденных систем полезны теоремы о частных случаях системы 1.1.

Теорема 2. *Пусть в замкнутой системе 1.1:*
1)$A(t),\ B(t),\ f(t) \in \mathbf{C}^1(T),\ K(t,s) \in \mathbf{C}^1(T \times T)$; 2) характеристический многочлен имеет вид

$$\det[\lambda A(t) + B(t)] = a_r(t)\lambda^r + \cdots,\ a_r(t) \neq 0\ \forall t \in T, \tag{3.13}$$

где $r = \max\{\mathrm{rank}\ A(t),\ t \in T\}$.

Тогда система 1.1 разрешима при любой $f(t)$ и ее общее решение имеет вид

$$x(t,c) = X_r(t)c + C_0(t)f(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} K_0(t,s)f(s)ds, t \in T,$$

Более, того замкнутая система 1.1 с конечномерным ПР имеет индекс $l = 1$ тогда и только тогда, когда выполнено условие 3.13.

Лемма 4. *Если входные данные системы 1.1 удовлетворяют условиям теоремы 2, то любая система $(\Lambda_1 + V + V_1)y = f$, где V_1—произвольный оператор Вольтерра с гладким ядром, разрешима и структура общего решения не меняется.*

Теорема 3. *Пусть в замкнутой системе 1.1:*
1)$A(t),\ B(t),\ f(t) \in \mathbf{C}^2(T),\ K(t,s) \in \mathbf{C}^2(T \times T)$;
2) многочлен

$$\det[\lambda A(t) + \mu B(t) + K(t,t)] = b_0(t)\lambda^r \mu^k + \cdots,\ b_0(t) \neq 0\ \forall t \in T,$$

где $r = \max\{\text{rank } A(t),\ t \in T\}$,

$$r + k = \max\{\text{rank } (A(t)|B(t)),\ t \in T,\ t \in T\};$$

3) $\text{rank } (A(\alpha)|B(\alpha)) = \text{rank } (A(\alpha)|B(\alpha)|f(\alpha))$.

Тогда, система 1.1 разрешима, имеет индекс 2 и ее общее решение имеет вид

$$x(t,c) = X_r(t)c + C_0(t)f(t) + C_1(t)\dot{f}(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} K_0(t,s)f(s)ds, t \in T,$$

Лемма 5. *Если входные данные системы 1.1 вещественно-аналитические, то в условиях теорем 2,3 любая точка $\gamma \in T$, в которой выполнены условия $a_0(\gamma) = 0$ или $b_0(\gamma) = 0$ является особой.*

Теоремы 2,3 и леммы 4,5 являются компиляциями из работ [2], [6], [3], [7] с некоторым ослаблением условий на постоянство ранга матриц $A(t),\ (A(t)|B(t))$. Постоянство вытекает из условий необращения в нуль функций $a_0(t),\ b_0(t),\ t \in T$.

4. Заключение

Во второй части работы предполагается рассмотреть линейные системы интегро-дифференциальных уравнений с вырожденной или прямоугольной матрицей перед производной искомой вектор-функции, переопределенные системы и системы со слабой особенностью в ядре. Сложность задачи существенно возрастает, если входные данные не являются аналитическими. Применение леммы 1 невозможно, так как для гладких матриц $A(t)$ в случае переменного ранга она не верна. Например, для матрицы из [8] вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & v(t) \\ w(t) & 0 \end{pmatrix},\ v(t), w(t) \in \mathbf{C}^\infty(T),\ v(t)w(t) = 0,$$

не существует неособенной матрицы $L(t) \in \mathbf{C}(T)$ такой, что

$$L(t)A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нужно менять всю технику доказательства. И в настоящее время непонятно как.

Список литературы

1. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев. — Новосибирск : Наука, 1980. – 222 с.
2. Бояринцев Ю. Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования / Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков. – Новосибирск : Наука, 1998. – 224 с.
3. Булатов М. В. Об одном семействе вырожденных интегродифференциальных уравнений / М. В. Булатов, Е. В. Чистякова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. -– 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1665—1673.
4. Ушаков Е. И. Статическая устойчивость электрических систем / Е. И. Ушаков. – Новосибирск : Наука, 1988. – 271 с.
5. Федоров В. Е. Неоднородные линейные уравнения соболевского типа с запаздыванием / В. Е. Федоров, Е. А. Омельченко // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т.53, № 2. – С. 418–429.
6. Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. – Новосибирск : Наука, 1996. – 280 с.
7. Чистякова Е. В. О свойствах разностных схем для вырожденных интегродифференциальных уравнений индекса 1 / Е. В. Чистякова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2009. – Т.49, № 9. – С. 1579–1588
8. Brenan K. E. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations (classics in applied mathematics; 14)/ S. L. Campbell, L. R. Petzold. – Philadelphia : SIAM, 1996.
9. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations / H. Brunner. – N. Y. : Published in the United States of America by Cambridge University Press, 2004.
10. Falaleev M. V. Degenerate integro-differential operators in Banach spaces and their applications / M. V. Falaleev, S. S. Orlov // Russian Mathematics. – 2011. – Vol. 55, N 10. – P. 59–69.
11. Silverman L. M. Generalizations of theorem of Dolezal / L. M. Silverman, R. S. Bucy // Math. System Theory. – 1970. – Vol.4. – P.334–339.

Нгуен Дык Банг, аспирант, Иркутский государственный технический университет, 664074, Иркутск, ул. Лермонтова, 83,
(e-mail: ducbang@mail.ru)

Виктор Филимонович Чистяков, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: 453029 (e-mail: chist@icc.ru)

Елена Викторовна Чистякова, кандидат физико-математических наук, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: 8(3932)453029
(e-mail: elena.chistyakova@icc.ru)

N. D. Bang, V. P. Chistyakov, E. V. Chistyakova

About Some Properties of Degenerate Systems of Linear Integro-Differential Equations. I

Abstract. This paper contains the linear system integro-differential equations (IDE), with an identically degenerate or rectangular matrix at the derivative of the unknown vector functions, including systems with a weak singularity in the kernel. This paper discusses the structure of the common solutions of such systems.

Keywords: integro-differential equations, index, general solution, singular points.

References

1. Boyarintsev Y.E. Regular and singular systems of linear ordinary differential equations. Novosibirsk, Nauka, 1980.
2. Boyarintsev Y.E., Chistyakov V.F. Algebro-differentsial'nye sistemy. Metody resheniya i issledovaniya. Novosibirsk, Nauka, 1998.
3. Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations (classics in applied mathematics; 14). Philadelphia, SIAM, 1996.
4. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations. New York, Published in the United States of America by Cambridge University Press, 2004.
5. Chistyakova E.V. On a family of singular integro-differential equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, September 2011, vol. 51, iss. 9, pp 1558-1566.
6. Chistyakova E.V. Properties of finite-difference schemes for singular integrodifferential equations of index 1. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, September 2009, vol. 49, iss, 9, pp. 1507-1515.
7. Chistyakov V.F. Algebro-differentsial'nye operatory s konechnomernym yadrom (Algebraic-Differential Operators with Finite-Dimensional Kernel). Novosibirsk, Nauka, 1996.
8. Falaleev M.V., Orlov S.S. Degenerate integro-differential operators in Banach spaces and their applications. *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no 10, pp. 59–69.
9. Fedorov V.E., Omel'chenko E.A. Inhomogeneous degenerate Sobolev type equations with delay. *Siberian Mathematical Journal*, March 2012, vol. 53, iss. 2, pp. 335-344.
10. Silverman L.M., Bucy R.S. Generalizations of theorem of Dolezal. *Math. System Theory*, 1970, vol. 4, pp. 334-339.
11. Ushakov E.I. Staticheskaia ustoichivost elektricheskikh sistem (Russian). Novosibirsk, Hauka, 1988.

Bang Nguen Dik, Postgraduate, Irkutsk State Technical University, 83, Lermontov st., Irkutsk, 664034, tel. 89247047998,
(e-mail: ducbang@mail.ru)

Chistyakov Victor Pholomonovich , Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Institute of System Dynamics and Control Theory RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: 8(3932)453029
(e-mail: chist@icc.ru)

Chistyakova Elena Victorovna, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Institute of System Dynamics and Control Theory RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: 453029,
(e-mail: elena.chistyakova@icc.ru)