Серия «Математика»
2015. Т. 11. С. 69—79

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.946

Точные решения одного класса нелинейных эллиптических систем специального вида *

А. А. Косов
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

Э. И. Семенов
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

Аннотация. В статье изучается задача построения точных решений для нелинейной системы двух уравнений эллиптического типа. Нелинейные системы уравнений эллиптического типа применяются в качестве математических моделей в теории тепло- и массопереноса реагирующих систем, в теории химических реакторов, теории горения и математической биологии. В одномерном случае к этому же классу уравнений можно отнести описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями модель магнитной изоляции вакуумного диода. Нахождение точных решений для нелинейных эллиптических систем играет важную роль как для развития теории и установления свойств всего множества решений, так и для приложений. Точные решения можно использовать для тестирования и верификации численных методов решения краевых задач. В данной статье рассматривается система двух уравнений эллиптического типа с одной нелинейностью, зависящей от разности квадратов искомых функций. Найдены условия на нелинейность, при которых система редуцируется к одному уравнению. Показано, что в этом случае система сводится к полулинейному эллиптическому уравнению специального вида, лишь одним слагаемым отличающимся от уравнения Гельмгольца. Отдельно изучен случай системы, не сводящейся ни при какой нелинейности к одному уравнению. Для этого случая выведено интегро-дифференциальное уравнение, которому должны удовлетворять радиально-симметричные решения. Указаны случаи, когда это уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению и интегрируется в явном виде. Приведен ряд примеров построения точных решений, задаваемых элементарными функциями, для систем с двумерным и трехмерным оператором Лапласа.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, нелинейные системы, точные решения, интегро-дифференциальные уравнения, сингулярная нелинейность.

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5007.2014.9), РФФИ (проект № 15-08-06680).

1. Постановка задачи и основные уравнения

Нелинейные системы двух уравнений эллиптического типа часто встречаются в теории тепло- и массопереноса реагирующих систем, в теории химических реакторов, теории горения и математической биологии [1]. В одномерном случае к этому же классу уравнений можно отнести описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями модель магнитной изоляции вакуумного диода [2]. В [3; 4] была предложена обобщенная модель магнитной изоляции, получаемая путем замены обыкновенной второй производной оператором Лапласа. Как было установлено [5], множество решений обобщенной модели магнитной изоляции заведомо содержит множество решений базовой модели.

В работах [6; 7] была рассмотрена система нелинейных эллиптических уравнений

$$\begin{cases} \Delta\psi = \psi F(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2), \\ \Delta a = a F(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2), \end{cases} \tag{1.1}$$

которая включает в себя обобщенную модель магнитной изоляции [3] и обладает тем свойством, что её решениями могут быть только решения линейного однородного уравнения Гельмгольца $\Delta u = \lambda(\mathbf{x})u$ с функцией $\lambda(\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2)$. В данной статье мы займемся построением точных многомерных решений нелинейных эллиптических систем специального вида, которые не обладают указанным выше свойством.

Итак, рассматривается следующая система нелинейных эллиптических уравнений

$$\begin{cases} \Delta\psi = \lambda\psi + aF(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2), \\ \Delta a = \lambda a + \psi F(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2), \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\psi \stackrel{\triangle}{=} \psi(\mathbf{x})$, $a \stackrel{\triangle}{=} a(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Δ – n -мерный оператор Лапласа, $\lambda \geq 0$ — произвольный параметр.

Аналогично [8], точные решения системы (1.2) будем отыскивать в виде

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{x}) = f\,\mathrm{ch}(\omega), \\ a(\mathbf{x}) = f\,\mathrm{sh}(\omega), \end{cases} \tag{1.3}$$

где $f \stackrel{\triangle}{=} f(\mathbf{x})$, $\omega \stackrel{\triangle}{=} \omega(\mathbf{x})$ – пока произвольные дважды дифференцируемые по переменным $(x_1, \ldots, x_n)$ функции. После подстановки анзатца (1.3) в уравнения (1.1) соответственно получим

$$\begin{cases} A\,\mathrm{ch}(\omega) + B\,\mathrm{sh}(\omega) = 0, \\ A\,\mathrm{sh}(\omega) + B\,\mathrm{ch}(\omega) = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

где приняты обозначения

$$A \stackrel{\triangle}{=} \Delta f + f|\nabla\omega|^2 - \lambda f,\ B \stackrel{\triangle}{=} f\Delta\omega + 2\nabla f \cdot \nabla\omega - fF(\mathbf{x}, f^2).$$

Здесь и далее $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ — градиент, символ $\cdot$ означает скалярное произведение. Относительно переменных A и B система алгебраических уравнений (1.4) является линейной и однородной, её определитель равен единице, поэтому она имеет только тривиальное решение $A = 0$, $B = 0$. Следовательно, с учетом введенных обозначений, (1.4) сводится к следующей нелинейной системе двух уравнений в частных производных

$$\Delta f + f|\nabla\omega|^2 = \lambda f, \tag{1.5}$$

$$f\Delta\omega + 2\nabla f \cdot \nabla\omega = fF(\mathbf{x}, f^2). \tag{1.6}$$

Уравнения (1.5), (1.6) будем называть разрешающими для системы (1.2) в виде анзатца (1.3).

С общих позиций система разрешающих уравнений нисколько не проще исходной системы (1.2), однако, как показано в следующих разделах, такая форма представления задачи может быть полезна для отыскания точных решений.

2. Редукция разрешающей системы к одному уравнению

Основная цель данного раздела — сведение разрешающей системы уравнений (1.5), (1.6), при определенных предположениях, к одному уравнению.

Пусть для компонент решения системы (1.5), (1.6) имеет место функциональная связь $\omega(\mathbf{x}) \equiv u(f(\mathbf{x}))$, где $u(f)$ есть некоторая дважды дифференцируемая функция скалярного аргумента f. После подстановки $\omega(\mathbf{x})$ в систему ((1.5), (1.6) получим для искомых функций $u(f)$ и $f(\mathbf{x})$ систему двух уравнений

$$\Delta f + fu'^2(f)|\nabla f|^2 = \lambda f, \tag{2.1}$$

$$\Delta f + \frac{fu''(f) + 2u'(f)}{fu'(f)}|\nabla f|^2 = \frac{F(\mathbf{x}, f^2)}{u'(f)}. \tag{2.2}$$

Чтобы эта система сводилась к одному уравнению, соотношения (2.1) и (2.2) должны совпадать, для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $u \overset{\triangle}{=} u(f)$ удовлетворяла ОДУ

$$fu'' + 2u' - f^2u'^3 = 0, \tag{2.3}$$

а функция $F(\mathbf{x}, f^2)$ на решениях $u(f)$ ОДУ (2.3) была представима в виде

$$F(\mathbf{x}, t, f^2) \equiv \lambda fu'(f). \tag{2.4}$$

Так как по условию функция $F(\mathbf{x}, f^2)$ не является тождественным нулем, то здесь и далее в этом разделе будем предполагать, что параметр λ является строго положительным и кроме того, будем рассматривать решения ОДУ (2.3) отличные от постоянной. ОДУ (2.3) простой заменой $u'(f) = z(f)$ сводится к уравнению Бернулли

$$fz' + 2z - f^2z^3 = 0,$$

которое имеет общее решение $z(f) = \dfrac{\sigma}{f\sqrt{c_1f^2+1}}$ и, при $c_1 = 0$, частное решение $z(f) = \dfrac{\sigma}{f}$. Отсюда, соответственно, легко предъявить следующие решения ОДУ (2.3):

$$u_1(f) = c_2 - \sigma \mathrm{Arth}\left(\frac{1}{\sqrt{c_1f^2+1}}\right) \quad \text{и} \quad u_2(f) = c_3 + \sigma\ln(f).$$

Здесь $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$, $c_1 \neq 0$, c_2, c_3 — произвольные постоянные. Из (2.5) следует, что на решении $u_2(f)$ функция $F(\mathbf{x}, f^2)$ становится тождественной постоянной и эта ситуация не представляет интереса, так как в этом случае исследуемая система (1.2) будет линейной. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только решение $u_1(f)$. Резюмируя все вышеизложенное, приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть при некотором значении параметра $\lambda > 0$ функция $F(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2)$ представима в виде*

$$F(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2) = \frac{\sigma\lambda}{\sqrt{c_1(\psi^2 - a^2) + 1}}. \tag{2.5}$$

Тогда система (1.2) имеет точное решение

$$\psi(\mathbf{x}) = f\,\mathrm{ch}\left(c_2 - \sigma\mathrm{Arth}\left(\frac{1}{\sqrt{c_1f^2+1}}\right)\right), \tag{2.6}$$

$$a(\mathbf{x}) = f\,\mathrm{sh}\left(c_2 - \sigma\mathrm{Arth}\left(\frac{1}{\sqrt{c_1f^2+1}}\right)\right), \tag{2.7}$$

где $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$, $c_1 > 0$, c_2 — произвольные постоянные, а функция $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет нелинейному уравнению в частных производных

$$\Delta f + \frac{|\nabla f|^2}{f\,(c_1f^2+1)} = \lambda f. \tag{2.8}$$

Отметим, что в справедливости теоремы 1 можно убедиться и непосредственной подстановкой функций (2.6), (2.7) в систему (1.2).

Уравнение (2.8) подстановкой $f(\mathbf{x}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{c_1}}\sqrt{u^2(\mathbf{x}) - 1}$ сводится уравнению следующего вида

$$\Delta u = \lambda \left(u - \frac{1}{u} \right),$$

которое относится к типу полулинейных эллиптических уравнений с сингулярной нелинейностью [9].

3. Точные радиально-симметричные решения системы разрешающих уравнений в частном случае $\lambda = 0$

В этом разделе мы займемся построением точных радиально-симметричных решений уравнений (1.5), (1.6) для частного случая $\lambda = 0$. Этот случай сложен и интересен тем, что при $\lambda = 0$ разрешающие уравнения (1.5), (1.6) ни при какой функции $F(\mathbf{x}, f^2)$, отличной от тождественного нуля, не сводятся к одному уравнению.

Будем искать решения системы (1.5), (1.6) в виде

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{\triangle}{=} f(r), \;\; \omega(\mathbf{x}) \stackrel{\triangle}{=} \omega(r), \;\; \text{где } \; r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \;\; n \geq 2.$$

При этом будем полагать, что для нелинейности $F(\mathbf{x}, f^2)$ выполнено тождество $F(\mathbf{x}, f^2) \equiv F(r, f^2)$. Простыми вычислениями легко показать, что имеют место равенства

$$\Delta f = f'' + \frac{n-1}{r} f', \; \nabla f \cdot \nabla \omega = f'\omega', \; |\nabla \omega|^2 = \omega'^2, \; \Delta \omega = \omega'' + \frac{n-1}{r}\omega',$$

здесь и ниже штрих означает производную по аргументу r. С учетом последних соотношений уравнения в частных производных (1.5), (1.6) преобразуются к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка

$$f'' + \frac{n-1}{r} f' + f\omega'^2 = 0, \tag{3.1}$$

$$f\omega'' + \left(\frac{n-1}{r} f + 2f' \right) \omega' = fF(r, f^2). \tag{3.2}$$

Интегрируя ОДУ (3.2) находим

$$\omega'(r) = c(r) r^{1-n} f^{-2}(r), \tag{3.3}$$

где функция $c(r)$ определяется из соотношения

$$c(r) = \int r^{n-1} f^2(r) F(r, f^2(r))\, dr. \tag{3.4}$$

Подставляя выражение (3.3) в (3.1) получим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) для функции $f(r)$

$$f'' + (n-1)r^{-1} f' + c^2(r) r^{2-2n} f^{-3} = 0. \tag{3.5}$$

Таким образом, задача построения точных радиально-симметричных решений уравнений (1.5), (1.6) свелась к интегрированию нелинейного ИДУ (3.5) для функции $f(r)$, а $\omega(r)$ находится по формуле (3.3) однократным интегрированием по переменной r. При этом $F(r, f^2)$ является заданной и в ряде случаев для некоторых нелинейностей $F(r, f^2)$ ИДУ (3.5) разрешимо в элементарных или специальных функциях.

Пример 1. Пусть $F(r, f^2) \equiv r^\gamma f^{-2}(r)$, γ — пока произвольная постоянная. Тогда из (3.4) получим

$$c(r) = c_{01} + \frac{r^{\gamma+n}}{\gamma+n}, \ \text{ при } \ \gamma \neq -n \tag{3.6}$$

или

$$c(r) = c_{02} + \ln(r), \ \text{ при } \ \gamma = -n.$$

В дальнейшем, для удобства произвольные постоянные c_{01}, c_{02} положим тождественно равными нулю. Для функции (3.6) ИДУ (3.5) сводится к нелинейному ОДУ второго порядка следующего вида

$$f'' + (n-1)r^{-1} f' + (\gamma+n)^{-2} r^{2\gamma+2} f^{-3} = 0. \tag{3.7}$$

При $\gamma \neq -2,\ -n,\ 2-2n$, ОДУ (3.7) имеет частное точное решение $f(r) = Ar^{(\gamma+2)/2}$, для которого из формулы (3.3) имеем $\omega(r) = \dfrac{\ln(r)}{A^2(\gamma+n)} + \omega_0$, где

$$A = \pm \frac{\sqrt{2}}{[(\gamma+n)^2(\gamma+2)(2-2n-\gamma)]^{1/4}}. \tag{3.8}$$

Заметим, что ОДУ (3.7) преобразованием $f(r) = f(\xi)$, $\xi = \ln(r)$ сводится к следующему неавтономному уравнению

$$\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} + (n-2)\frac{df(\xi)}{d\xi} + \frac{e^{(2\gamma+4)\xi}}{(\gamma+n)^2} f^{-3}(\xi) = 0,$$

которое при $\gamma = -2$ становится автономным

$$\frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} + (n-2)\frac{df(\xi)}{d\xi} + \frac{1}{(n-2)^2} f^{-3}(\xi) = 0.$$

Возвращаясь к исходной системе находим, что система нелинейных эллиптических уравнений

$$\Delta\psi(\mathbf{x}) = \frac{||\mathbf{x}||^{\gamma} a(\mathbf{x})}{\left(\psi^2(\mathbf{x}) - a^2(\mathbf{x})\right)^2}, \quad \Delta a(\mathbf{x}) = \frac{||\mathbf{x}||^{\gamma}\psi(\mathbf{x})}{\left(\psi^2(\mathbf{x}) - a^2(\mathbf{x})\right)^2},$$

с параметром $\gamma \neq -2, -n, 2-2n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, обладает точным радиально-симметричным решением

$$\psi(\mathbf{x}) = A||\mathbf{x}||^{\gamma+2}\operatorname{ch}\left(\omega_0 + \frac{\ln||\mathbf{x}||}{A^2(\gamma+n)}\right),$$

$$a(\mathbf{x}) = A||\mathbf{x}||^{\gamma+2}\operatorname{sh}\left(\omega_0 + \frac{\ln||\mathbf{x}||}{A^2(\gamma+n)}\right).$$

Здесь $||\mathbf{x}||$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, ω_0 — произвольная константа, а постоянная A определяется формулой (3.8).

Утверждение 1. *Пусть $n = 2$ и*

$$F(r, f^2) = \frac{2\sigma}{r^2}\sqrt{\frac{1}{f^2} - 1}, \tag{3.9}$$

где $\sigma = \pm 1$, тогда ИДУ (3.5) обладает точными решениями

$$f(r) = \sin(\ln r) \;\; \text{и} \;\; f(r) = \cos(\ln r).$$

Доказательство. Легко видеть, что ИДУ (3.5) при $c(r) = f^2(r)$ становится линейным ОДУ второго порядка

$$f'' + (n-1)r^{-1}f' + r^{2-2n}f = 0. \tag{3.10}$$

В свою очередь, для $c(r) = f^2(r)$ из формулы (3.4) следует, что нелинейность $F(r, f^2)$ должна на решениях ОДУ (3.10) удовлетворять соотношению

$$F(r, f^2) = 2r^{1-n}\frac{f'(r)}{f(r)}. \tag{3.11}$$

Сравнивая соотношения (3.9), (3.11) при $n = 2$ получим, что функция $f(r)$, кроме ОДУ (3.10), должна удовлетворять ОДУ первого порядка

$$f'(r) = \frac{\sigma}{r}\sqrt{1 - f^2(r)}. \tag{3.12}$$

Здесь значение параметра $\sigma = \pm 1$ выбирается в зависимости от знака функции $f(r)$. Интегрируя ОДУ (3.10), при $n = 2$ получим его общее решение вида

$$f(r) = C_1\sin(\ln r) + C_2\cos(\ln r), \tag{3.13}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Нетрудно убедиться, что при следующих наборах значений постоянных $\{C_1 = 1, C_2 = 0\}$ и $\{C_1 = 0, C_2 = 1\}$ функция (3.13) будет удовлетворять ОДУ (3.12). Утверждение доказано. □

Пример 2. Система нелинейных эллиптических уравнений

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{2a}{x^2+y^2}\sqrt{\frac{1}{\psi^2-a^2}-1},$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}=\frac{2\psi}{x^2+y^2}\sqrt{\frac{1}{\psi^2-a^2}-1},$$

имеет точное решение

$$\psi(x,y)=\sin\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\operatorname{ch}\left(c+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

$$a(x,y)=\sin\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\operatorname{sh}\left(c+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

где c — произвольная постоянная.

Пример 3. Система нелинейных эллиптических уравнений

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\frac{2a}{x^2+y^2}\sqrt{\frac{1}{\psi^2-a^2}-1},$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}=-\frac{2\psi}{x^2+y^2}\sqrt{\frac{1}{\psi^2-a^2}-1},$$

имеет точное решение

$$\psi(x,y)=\cos\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\operatorname{ch}\left(c+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

$$a(x,y)=\cos\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\operatorname{sh}\left(c+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

где c — произвольная постоянная.

Утверждение 2. *Пусть $n>2$ и*

$$F(r,f^2)=2\sigma r^{2-2n}\sqrt{\frac{1}{f^2}-1}\,, \tag{3.14}$$

где $\sigma=\pm1$, тогда ИДУ (3.5) обладает точными решениями

$$f(r)=\sin\left(\frac{r^{2-n}}{n-2}\right)\quad \text{и}\quad f(r)=\cos\left(\frac{r^{2-n}}{n-2}\right).$$

Доказательство этого утверждения аналогично схеме доказательства утверждения 1, поэтому приводить его не будем.

Пример 4. Система нелинейных эллиптических уравнений

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-\frac{2a}{(x^2+y^2+z^2)^2}\sqrt{\frac{1}{\psi^2-a^2}-1},$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = -\frac{2\psi}{(x^2+y^2+z^2)^2}\sqrt{\frac{1}{\psi^2-a^2}-1},$$

имеет точное решение

$$\psi(x,y,z) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\operatorname{ch}\left(c+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

$$a(x,y,z) = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\operatorname{sh}\left(c+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

где c — произвольная постоянная.

Пример 5. Система нелинейных эллиптических уравнений

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{2a}{(x^2+y^2+z^2)^2}\sqrt{\frac{1}{\psi^2-a^2}-1},$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \frac{2\psi}{(x^2+y^2+z^2)^2}\sqrt{\frac{1}{\psi^2-a^2}-1},$$

имеет точное решение

$$\psi(x,y,z) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\operatorname{ch}\left(c+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

$$a(x,y,z) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\operatorname{sh}\left(c+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

где c — произвольная постоянная.

Список литературы

1. Полянин А. Д. Нелинейные системы двух уравнений эллиптического типа [Электронный ресурс] / А. Д. Полянин. – URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/syspde/spde-toc3.htm.
2. Ben Abdallah N. Mathematical model of magnetic insulation / N. Ben Abdallah, P. Degond, F. Mehats // Physics of plasmas. – 1998. – Vol. 5. – P. 1522–1534.
3. Косов А. А. Интегрируемость модели магнитной изоляции и ее точные радиально-симметричные решения / А. А. Косов, Э. И. Семенов, А. В. Синицын // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 45–56.
4. Косов А. А. О построении решений систем нелинейных уравнений, применяемых для моделирования магнитной изоляции / А. А. Косов, Э. И. Семенов, А. В. Синицын // Сиб. журн. индустр. математики. – 2015. – Т. XVIII, № 1(61). – С. 69–83.

5. Семенов Э. И. Математическая модель магнитной изоляции вакуумного диода и ее точные решения / Э. И. Семенов, А. В. Синицын // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – № 1. – С. 78–91.
6. Косов А. А. Многомерные точные решения одного класса нелинейных эллиптических систем / А. А. Косов, Э. И. Семенов // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2014. – Т. 9, № 3. – С. 49–60.
7. Семенов Э. И. О многомерных точных решениях одной нелинейной системы двух уравнений эллиптического типа / Э. И. Семенов, А. А. Косов // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51, № 2. – С. 229–239.
8. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/syspde/spde3108.pdf
9. Canino A. Symmetry of solutions of some semilinear elliptic equations with singular nonlinearities / A. Canino, M. Grandinetti, B. Sciunzi // Journal of Differential Equations. – 2013. – Vol. 255. – P. 4437–4447.

Косов Александр Аркадьевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 427100 (e-mail: `kosov_idstu@mail.ru`)

Семенов Эдуард Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 453099
(e-mail: `edwseiz@gmail.com`)

A. A. Kosov, E. I. Semenov

Exact Solutions of a Class of Nonlinear Elliptic Systems of a Special Type

Abstract. In paper the problem of construction of exact solutions for nonlinear system of two equations of elliptic type is studied. Nonlinear systems of the equations of elliptic type are applied as mathematical models in the theory warm and a mass transfer of the reacting systems, in the theory of chemical reactors, the theory of burning and mathematical biology. In a one-dimensional case can carry the model of magnetic isolation of the vacuum diode described by the ordinary differential equations to the same class of the equations. Finding of exact solutions for nonlinear elliptic systems plays an important role as for development of the theory and establishment of properties of all set of solutions, and for applications. Exact solutions can be used for testing and verification of numerical methods of the solution of boundary value problems. In this paper the system of two equations of elliptic type with one nonlinearity depending on a difference of squares of required functions is considered. Conditions on nonlinearity under which the system is reduced to one equation are found. It is shown that in this case the system is reduced to the semi-linear elliptic equation of a special kind, only one component different from Helmholtz's equation. The case of the system which isn't reduced is separately studied at any nonlinearity to one equation. For this case the integro-differential equation to which have to satisfy radially symmetric solutions is obtained. Cases when this equation is reduced to the ordinary differential equation are specified and is integrated in an explicit form. A number of examples of construction of the exact solutions set by elementary functions for systems with the two-dimensional and three-dimensional operator of Laplace is given.

Keywords: elliptic equations, nonlinear systems, exact solutions, integro-differential equations, singular nonlinearity.

References

1. Polyanin A.D. Nonlinear systems of two equations of elliptic type (in Russian) [Nelineinye sistemy dvukh uravneniy ellipticheskogo tipa] (http://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/syspde/spde3108.pdf)
2. Ben Abdallah N., Degond P., Mehats F. Mathematical model of magnetic insulation // *Physics of plasmas*, 1998, vol. 5, pp. 1522–1534.
3. Kosov A.A., Semenov E.I., Sinitsyn A.V. Integrable models of magnetic insulation and its exact radially symmetric solutions (in Russian) [Integriruemost' modeli magnitnoy izolyatsii i eye tochnye radial'no simmetrichnye resheniya] // *Izvestia ISU. Ser. Mathematics*, 2013, vol. 6, № 1, pp. 45–56.
4. Kosov A.A., Semenov E.I., Sinitsyn A.V. On the construction of solutions of systems of nonlinear equations used to model the magnetic insulation(in Russian) [O postroenii reschenii sistem nelineinykh uravnenii, primenyaemykh dlya modelirovaniya magnitnoi izolatsii] // *Sibirskii zhurnal industrialnoi matematiki*, 2015, vol. XVIII, no 1(61), pp. 69–83.
5. Semenov E.I., Sinitsyn A.V. A mathematical model of magnetic insulation vacuum diode and its exact solutions (in Russian) [Matematicheskaya model magnitnoi izolyatsii vakuumnogo dioda i ee tochnye rescheniya] // *Izvestia ISU. Ser. Mathematics*, 2010, no 1, pp. 78–91.
6. Kosov A.A., Semenov E.I. Multidimensional exact solutions to a class of nonlinear elliptic systems (in Russian) [Mnogomernye tochnye resheniya odnogo klassa nelineynykh ellipticheskikh sistem] // *Izvestia ISU. Ser. Mathematics*, 2014, vol. 9, no 3, pp. 49–60.
7. Semenov E.I., Kosov A.A. Multidimensional exact solutions to a nonlinear system of two equations of elliptic type (in Russian) [O mnogomernykh tochnykh rescheniyakh odnoy nelineynoy sistemy dvukh uravneniy ellipticheskogo tipa] // *Differentsialnye uravnenia*, 2015, vol. 51, no 2, pp. 229–239.
8. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/syspde/spde3108.pdf
9. Canino A., Grandinetti M., Sciunzi B. Symmetry of solutions of some semilinear elliptic equations with singular nonlinearities // *Journal of Differential Equations*, 2013, vol. 255, pp. 4437–4447.

Kosov Alexander Arkad'evich, Leading Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS); Post Box 292, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: (3952) 427100
(e-mail: kosov_idstu@mail.ru)

Semenov Edward Ivanovich, Senior Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS); Post Box 292, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel.: (3952) 453099 (e-mail: edwseiz@gmail.com)