Серия «Математика»
2017. Т. 20. С. 96—108

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.54
MSC 20K01
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.20.96

О периодических группах и группах Шункова, насыщенных группами диэдра и A_5 *

А. А. Шлепкин
Сибирский федеральный университет

Аннотация. Группа называется периодической, если любой ее элемент имеет конечный порядок. Группой Шункова называется группа, в которой любая пара сопряженных элементов порождает конечную подгруппу с сохранением этого свойства при переходе к фактор-группам по конечным подгруппам. Группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X. В работе установлено строение периодических групп и групп Шункова, насыщенных множеством групп $\mathfrak{M}$, состоящим из одной конечной простой неабелевой группы A_5 и групп диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Доказано, что периодическая группа, насыщенная группами из $\mathfrak{M}$, либо изоморфна простой группе A_5, либо изоморфна локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2. Также доказано существование периодической части группы Шункова, насыщенной группами из множества $\mathfrak{M}$, и установлена структура данной периодической части.

Ключевые слова: периодическая группа, насыщенность группы множеством групп, группа Шункова.

1. Введение

Группа H насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из H содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X. Группы с условием насыщенности изучались различными авторами (см. обзор [3]). Одной из задач данного направления является изучение групп с насыщающим множеством,

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-31-50030 и в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ Сибирскому федеральному университету на выполнение НИР в 2014 году, задание № 1.1462.2014/К

состоящим из конечных простых неабелевых групп. При решении этой задачи в различных классах групп возникла необходимость изучения групп с насыщающим множеством, состоящим не только из конечных простых неабелевых групп [16]. Другой задачей данного направления является изучение смешанных групп с насыщающим множеством, состоящим из конечных групп. В частности, в каких случаях данная группа будет обладать периодической частью? Особенно актуальна эта задача для групп Шункова, которые могут не обладать периодической частью [15].

В [7] получено описание периодических групп, насыщенных группами из множества $\mathfrak{F}$, состоящим из конечных простых неабелевых групп с силовской 2-подгруппой, содержащей все свои инволюции в своем центре. Естественно было получить обобщение этого результата на другие классы групп, в частности, на класс групп Шункова. При решении данной задачи возникла необходимость получения структуры централизатора инволюции z в группе R насыщенной группами из множества $\mathfrak{I}$, где $\mathfrak{I}$ – множество централизаторов инволюций в группах из множества $\mathfrak{F}$. Одним из важных частных случаев решения этой задачи является разбор ситуации, когда множество $\mathfrak{I}$ – состоит из групп, изоморфных группе $\langle z\rangle \times A_5$, либо группе диэда с силовской 2-подгруппой, являющейся четверной группой. Переходя к фактор-группе $G = C_R(z)/\langle z\rangle$ мы приходим к задаче установления структуры группы G с насыщающим множеством $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A} = \{A_5\}$ — множество, состоящее из одной группы A_5, $\mathfrak{B}$ — множество, состоящее из конечных групп диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2.

В данной работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, либо изоморфна группе A_5, либо изоморфна локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Теорема 2. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, которая либо изоморфна группе A_5, либо изоморфна локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.*

Несмотря на то, что доказательство теоремы 1 несложно получить, используя результаты работы [4], мы приводим его полностью для иллюстрации различия в технике доказательств при установлении структуры периодических групп и групп Шункова насыщенных, группами из одного множества.

2. Определения, известные факты, вспомогательные утверждения

Определение 1. *Группа G называется группой Шункова (сопряженно-бипримитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу* [8], [9].

Определение 2. *Группа G называется локально диэдральной группой (локально конечным диэдром), если она является объединением бесконечной цепочки вложенных друг в друга конечных групп диэдра* [13].

Определение 3. *Группа G насыщена группами из множества групп X, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из X* [11].

Определение 4. *Пусть группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{R}$. Тогда множество $\mathfrak{R}$ будем называть насыщающим множеством для группы G* [3].

Определение 5. *Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Запись*

$$G \,\widetilde{\in}\, \mathfrak{X}$$

означает, что группа G изоморфна некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Соответственно запись

$$G \,\widetilde{\notin}\, \mathfrak{X}$$

означает, что группа G не изоморфна никакой группе из множества $\mathfrak{X}$.

Определение 6. *Пусть G — группа, K — подгруппа G, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Через*

$$\mathfrak{X}_G(K) = \{H \mid K \leq H \leq G, H \,\widetilde{\in}\, \mathfrak{X}\}$$

будем обозначать множество всех подгрупп H группы G, содержащих подгруппу K и изоморфных группам из множества $\mathfrak{X}$. Если 1 — единичная подгруппа группы G, то

$$\mathfrak{X}_G(1) = \{H \mid H \leq G, H \,\widetilde{\in}\, \mathfrak{X}\}$$

будет обозначать множество всех подгрупп H группы G, изоморфных группам из множества $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно, о какой группе G идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$, и соответственно вместо $\mathfrak{X}_G(1)$ будем писать $\mathfrak{X}(1)$.

Определение 7. *Пусть G — группа. Если все элементы конечных порядков из G содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется периодической частью группы G и обозначается $T(G)$* ([2], с. 90, 150).

Предложение 1. *Периодическая группа, содержащая инволюцию с конечным централизатором, локально конечна* [8].

Предложение 2. *Конечное инвариантное множество элементов конечного порядка в любой группе порождает конечную нормальную подгруппу* [1].

Предложение 3. *Группа Шункова с бесконечным числом элементов конечного порядка обладает бесконечной локально конечной подгруппой* [10].

Предложение 4. *Пусть G — группа Шункова, a — элемент простого порядка из G, x — инволюция из G. Тогда $\langle x, a\rangle$ — конечная группа.*

Доказательство. Из определения группы Шункова вытекает, что $\langle a, a^x\rangle$ — конечная группа. Несложно заметить, что $x \in N_G(\langle a, a^x\rangle)$. Следовательно, $\langle a, a^x\rangle\langle x\rangle$ — конечная группа. Так как $\langle x, a\rangle$ является подгруппой $\langle a, a^x\rangle\langle x\rangle$, то $\langle x, a\rangle$ — также конечная группа. □

Предложение 5. *Пусть G — группа Шункова, H — конечная нормальная подгруппа группы G. Тогда фактор-группа $\overline{G} = G/H$ — группа Шункова.*

Доказательство. Пусть $\overline{K}$ — конечная подгруппа в $\overline{G}$, $\overline{a}$ — элемент простого порядка из $N_{\overline{G}}(\overline{K})$, $\overline{g}$ — произвольный элемент из $\overline{G}$. Тогда $\overline{a} = aH$, $\overline{g} = gH, \overline{K} = KH$ для некоторых элементов $a, g \in G$ и конечной подгруппы $K \subset G$. Рассмотрим $N_G(KH)$. Очевидно, $a, g \in N_G(KH)$, а $a_1 = a(KH), b_1 = a^g(KH)$ — элементы фактор-группы $N_G(KH)/KH$, имеют простой порядок и сопряжены в ней. Так как G — группа Шункова, то $\langle a_1, b_1\rangle$ — конечная группа, что и требовалось. □

Предложение 6. *Пусть G — группа Шункова,*

$$H_1 < H_2 < \ldots < H_a < \ldots$$

— цепочка ее нормальных подгрупп, такая, что для любой подгруппы из этой цепочки фактор-группа G/H_a является группой Шункова, и $H = \bigcup H_a$. Тогда G/H — группа Шункова ([12], следствие 2.4.4).

Предложение 7. *Если в группе Шункова G некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы из G конечны и сопряжены.*

Доказательство. Предположим обратное, пусть R — конечная силовская 2-подгруппа группы G. Положим $\mathfrak{R} = \{R^g | g \in G\}$, и $\mathfrak{F}$ — множество всех силовских 2-подгрупп группы G, не сопряженных с R. Выберем такие $X \in \mathfrak{N}$ и $Y \in \mathfrak{B}$, что число $m = |X \cap Y|$ принимает максимально возможное значение. Используя нормализаторное условие в конечных 2-группах, выбираем элементы $x \in N_X(X \cap Y)$ и $y \in N_Y(X \cap Y)$ так, что $x^2, y^2 \in X \cap Y$. Так как G — группа Шункова, то $\langle x, y, X \cap Y\rangle$ — конечная группа (предложение 4), и все силовские 2-подгруппы в ней сопряжены. Пусть S — одна из них, и $S \leq Z$ — некоторая силовская 2-подгруппа из G. Следовательно, $Z \in \mathfrak{R}$ или $Z \in \mathfrak{F}$. Но в первом случае для некоторого $g \in G$, $\langle x, X \cap Y\rangle \leq Z^g \cap Y$ и $|Z^g \cap Y| > m$, а во втором случае $\langle y, X \cap Y\rangle \leq Z^g \cap X$ и снова $|Z^g \cap Y| > m$. Противоречие с выбором m. □

Предложение 8. *Группа Шункова G, в которой все конечные подгруппы абелевы, обладает абелевой периодической частью $T(G)$.*

Доказательство. Действительно, пусть a — произвольный элемент конечного порядка из G. Предположим, что $|a|$— простое число. Тогда $\langle a, a^g\rangle$ — конечная абелева группа для любого $g \in G$. Следовательно, $N_1 = \langle a^g | g \in G\rangle$ — абелева нормальная подгруппа группы G. В силу произвольного выбора a как элемента простого порядка получим, что все элементы простых порядков из G порождают абелеву нормальную подгруппу N_2 группы G, и более того, любой элемент из N_2 перестановочен с любым элементом $g \in G$, имеющим конечный порядок. Пусть $R(G)$ — подгруппа группы G, порождённая всеми элементами конечных порядков группы G. Очевидно, $N_2 \leq Z(R(G))$, значит, группа $\overline{R} = R(G)/N_2$ — группа Шункова (предложения 5, 6). Ясно, что для $\overline{R}$ условие леммы выполняется, и поэтому можно считать, что для $\overline{R}$ лемма верна (индукция по порядку a). Следовательно, $R(G) = T(G)$ — периодическая часть группы G, и $T(G)$ — абелева группа. □

Поскольку любая локально конечная группа является группой Шункова, то имеет место

Предложение 9. *Локально конечная группа G, насыщенная группами диэдра, изоморфна локально диэдральной группе* [13].

Предложение 10. *Группа Шункова G насыщенная группами диэдра, обладает периодической частью $T(G)$, и $T(G)$ изоморфна локально диэдральной группе* [5].

Предложение 11. *Пусть группа Шункова G насыщенна группами из множества $\{L_2(p^n)\}$. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, и $T(G) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q* [6].

3. Доказательство Теоремы 1

Предположим обратное, и пусть G — контрпример.

Лемма 1. *Группа G бесконечна.*

Доказательство. Действительно, если G — конечная группа, то по условию насыщенности $G \tilde{\in} \mathfrak{M}$. Следовательно, либо G изоморфна A_5, либо G изоморфна группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Противоречие с тем, что G — контрпример. □

Лемма 2. *Пусть z — инволюция из G. Тогда $C_G(z)$ — элементарная абелева группа порядка не более 4.*

Доказательство. Пусть g такой элемент из $C_G(z)$, что порядок g больше двух. Ясно, что $\langle z, g\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, g\rangle \leq H \leq G \text{ и } H \tilde{\in} \mathfrak{M}.$$

Следовательно, либо H изоморфна A_5, либо H изоморфна конечной группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Но в каждом из этих случаев $C_H(z)$ содержит только элементы порядка 2. Противоречие с выбором элемента g. Итак, все элементы из $C_G(z)$ имеют порядок 2, следовательно, $C_G(z)$ — элементарная абелева 2-группа. Предположим, что в $C_G(z)$ нашлась конечная подгруппа A такая, что порядок A больше 4. Ясно, что $\langle z, A\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, A\rangle \leq H \leq G \text{ и } H \tilde{\in} \mathfrak{M}.$$

Следовательно, либо H изоморфна A_5, либо H изоморфна конечной группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Но в каждом из этих случаев конечные подгруппы из $C_H(z)$ являются 2-группами и имеют порядок не более 4. Поскольку $A \leq C_H(z)$, то мы приходим к противоречию с выбором группы A. Итак, все конечные подгруппы из $C_G(z)$ являются элементарными абелевыми 2-группами порядка не более 4, следовательно, $C_G(z)$ — элементарная абелева 2-группа порядка не более 4. □

Завершим доказательство теоремы. По предложению 1 и леммам 1, 2 G — бесконечная локально конечная группа. Пусть R — произвольная конечная подгруппа группы G. Так как G — бесконечная локально конечная группа, то в ней найдется конечная подгруппа K такая, что $R < K$, и $|K| > |A_5|$. По условию насыщенности в G найдется такая конечная подгруппа H, что $K < H$ и $H \tilde{\in} \mathfrak{M}$. Следовательно, либо H изоморфна A_5, либо H изоморфна конечной группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Так как $|H| > |A_5|$, то H не изоморфна A_5. Следовательно, H изоморфна группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. В силу произвольности выбора группы R как конечной подгруппы группы G получаем, что G насыщена группами диэдра, и по предложению 9 G — локально диэдральная группа. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Теорема доказана. □

4. Доказательство теоремы 2

Предположим обратное, и пусть G — контрпример.

Лемма 3. *Группа G содержит бесконечно много элементов конечного порядка.*

Доказательство. Действительно, если G содержит конечное число элементов конечного порядка, то G обладает конечной периодической частью $T(G)$ (предложение 2). По условию насыщенности $T(G) \tilde{\in} \mathfrak{M}$. По теореме 1, либо $T(G)$ изоморфна A_5, либо $T(G)$ изоморфна группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Противоречие с тем, что G — контрпример. □

Лемма 4. *Все инволюции в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y — две различные инволюции из группы G. Из предложения 4 вытекает, что $\langle x, y\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle x, y\rangle \leq R \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, либо R изоморфна A_5, либо R изоморфна конечной группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. В каждом из этих случаев инволюции x, y сопряжены в R. Так как R — подгруппа G, то инволюции x, y сопряжены в группе G. □

Лемма 5. $\mathfrak{M}(1)$ – *бесконечное множество и для него возможны только следующие взаимоисключающие случаи:*

(A) $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1)$.

(B) $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{B}(1)$.

(C) $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$, *где* $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$, $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$.

Доказательство. То, что $\mathfrak{M}$ — бесконечное множество вытекает из леммы 3. Второе утверждение леммы является непосредственным следствием определения множеств $\mathfrak{M}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. □

Дальнейшее доказательство теоремы проведем отдельно для каждого из случаев, перечисленных в лемме 5. В случае **(A)** теорема доказана по предложению 11. В случае **(B)** теорема доказана по предложению 10. Ниже до окончания доказательства будет рассматриваться только случай **(C)**.

Лемма 6. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G, z — инволюция из S. Тогда*

1. *$C_G(z)$ обладает периодической частью $T(C_G(z))$.*
2. *$T(C_G(z))$ — элементарная абелева группа порядка 4 (четверная группа).*
3. *$T(C_G(z)) = S$.*

Доказательство. Пусть g — такой элемент конечного порядка из $C_G(z)$, что порядок g больше двух. Ясно, что $\langle z, g\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, g\rangle \leq H \leq G \text{ и } H \tilde{\in} \mathfrak{M}.$$

Следовательно, либо H изоморфна A_5, либо H изоморфна конечной группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Но в каждом из этих случаев $C_H(z)$ содержит только элементы порядка 2. Противоречие с выбором элемента g. Итак, все элементы конечного порядка из $C_G(z)$ имеют порядок 2, т. е. являются инволюциями. Так как $C_G(z)$ — группа Шункова, то по предложению 4 все элементы конечного порядка из $C_G(z)$ порождают элементарную абелеву 2-группу, которая, очевидно, совпадает с $T(C_G(z))$. Итак, пункт 1 доказан.

Так как мы рассматриваем случай **(C)** из утверждения леммы 5, то в G найдется четверная группа. Следовательно, $T(C_G(z))$ — элементарная абелева 2-группа порядка не менее 4 (лемма 4). Предположим, что в $T(C_G(z))$ нашлась конечная подгруппа A такая, что порядок A больше 4. Ясно, что $\langle z, A\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle z, A\rangle \leq H \leq G \text{ и } H \tilde{\in} \mathfrak{M}.$$

Следовательно, либо H изоморфна A_5, либо H изоморфна конечной группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. Но в каждом из этих случаев конечные подгруппы из $C_H(z)$ являются элементарными абелевыми 2-группами и имеют порядок не более 4. Поскольку $A \leq C_H(z)$, то мы приходим к противоречию с выбором группы A. Итак, все конечные подгруппы из $T(C_G(z))$ являются элементарными абелевыми группами порядка не более 4, следовательно, $T(C_G(z))$ — элементарная абелева 2-группа порядка 4. Пункт 2 доказан.

Пункт 3 вытекает из пункта 2. □

По лемме 5 в G существует подгруппа H, изоморфная A_5. Возьмем в H четверную подгруппу A, элемент $a \in A$ с тем свойством, что порядок a равен 5, и инволюцию $v \in A$, такие, что $H = \langle a, v\rangle$. По лемме 6 $A = T(C_G(v))$. Зафиксируем группы H, A, элемент a и инвлюцию v.

Лемма 7. *$N_G(A)$ обладает периодической частью, и*

$$T(N_G(A)) = N_H(A) = A \leftthreetimes \langle b\rangle \simeq S_3.$$

Доказательство. Рассмотрим-фактор группу $\overline{N} = N_G(A)/A$. По предложению 5 $\overline{N}$ — группа Шункова. Покажем, что $\overline{N}$ насыщена одной циклической группой порядка 3. Действительно, пусть $\overline{R}$ — конечная подгруппа группы $\overline{N}$, и R – её полный прообраз в N. По условию насыщенности $R < K < G$, и поскольку $A < K$, то $K \simeq A_5$. Следовательно, $R \le N_K(A) = A \leftthreetimes \langle b\rangle \simeq S_3$, для некоторого элемента $b \in K$ такого, что порядок b равен 3. Переходя к фактор-группе $\overline{N}$, получаем включение $\overline{R} \le \overline{\langle b\rangle}$, что и требовалось. По предложению 8 $\overline{N}$ обладает периодической частью $T(\overline{N})$, и $T(\overline{N}) \simeq \overline{\langle b\rangle}$. Возвращаясь в группу $N_G(A)$, получаем, что $N_G(A)$ обладает периодической частью $T(N_G(A))$, и $T(N_G(A)) = N_K(A) = A \leftthreetimes \langle b\rangle \simeq S_3$. Поскольку $N_H(A) \le T(N_G(A))$, то $T(N_G(A)) = N_H(A) = A \leftthreetimes \langle b\rangle \simeq S_3$.

□

Пусть b — элемент порядка 3 из утверждения леммы 7. Положим

$$B = T(N_G(A)) = N_H(A) = A \leftthreetimes \langle b\rangle,$$

$$\mathfrak{N} = \{\langle v, a^g\rangle | g \in G \setminus N_G(\langle a\rangle)\},$$

и зафиксируем множество $\mathfrak{N}$, группу B и элемент b.

Лемма 8. *Множество $\mathfrak{N}$ содержит бесконечное подмножество групп $\mathfrak{D}$, и каждая группа из множества $\mathfrak{D}$ изоморфна A_5.*

Доказательство. Покажем, что $\mathfrak{N}$ — бесконечное множество. Действительно, в противном случае множество a^G конечно, и по предложению 2 $K = \langle a^G\rangle$ — конечная нормальная подгруппа группы G. Очевидно, $H \le K$. Из условия насыщенности вытекает, что $K = H$. По лемме 3 существует элемент конечного порядка $d \in G \setminus H$. Так как H — нормальная подгруппа в G, то $\langle H, d\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle H, b\rangle < L$ и $L \simeq A_5$. Следовательно, $L = H$, что невозможно, так как H — собственная подгруппа группы L. Итак, $\mathfrak{N}$ — бесконечное множество.

Пусть a^g — такой элемент из a^G, что $\langle v, a^g\rangle \not\simeq A_5$. По предложению 4 $\langle v, a^g\rangle$ – конечная группа для любого $g \in G$). По условию насыщенности $\langle v, a^g\rangle = \langle a^g\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle$ и $(a^g)^v = (a^g)^{-1}$. Если теперь предположить, что бесконечного множества $\mathfrak{D}$ не существует, то в множестве a^G существует бесконечное подмножество

$$\mathfrak{R} = \{a^{g_1}, a^{g_2}, \cdots, a^{g_n}, \cdots\}$$

такое, что $\langle a^{g_n}, z\rangle = \langle a^{g_n}\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle$ и $(a^{g_n})^v = (a^{g_n})^{-1}$ ($n = 1, 2, \cdots$). Следовательно, $\langle a^{g_{n_1}}, a^{g_{n_2}}, v\rangle$ – конечная группа для любых n_1, n_2. Ввиду бесконечности множества $\mathfrak{R}$, множество групп $\langle a^{g_{n_1}}, a^{g_{n_2}}, z\rangle \simeq A_5$ бесконечно. В каждой из таких групп найдется элемент $a^{g_{n_3}}$ такой, что

$$\langle a^{g_{n_3}}, v\rangle = \langle a^{g_{n_1}}, a^{g_{n_2}}, v\rangle \simeq A_5.$$

Но тогда $\mathfrak{D} = \{\langle v, a^{g_{n_3}}\rangle\}$ — бесконечное множество, удовлетворяющее утверждению леммы. Противоречие с предположением, что такого множества не существует. □

Зафиксируем множество $\mathfrak{D}$ из утверждения леммы 8.

Лемма 9. *Пусть X – группа из $\mathfrak{D}$ такая, что $X \neq H$. Тогда $X \cap H = B$.*

Доказательство. Так как $C_H(v)$ и $C_X(v)$ являются четверными группами, то по лемме 6 $A = C_H(v) = C_X(v)$, следовательно, $A \leq X \cap H$. По лемме 7 $N_H(A) = N_X(A) = B$, и $X \cap H = B$. □

Лемма 10. *Группа $N_G(\langle b\rangle)$ обладает периодической частью, и*

$$T(N_G(\langle b\rangle)) = L \leftthreetimes \langle t\rangle \ –$$

бесконечная локально диэдральная группа, L – бесконечная локально циклическая группа, t – инволюция и для любого $x \in L$, $x^t = x^{-1}$.

Доказательство. Пусть $N = N_G(\langle b\rangle)$. Покажем, что N насыщена группами диэдра. Действительно, пусть R — конечная подгруппа группы N, и R — её полный прообраз в N. По условию насыщенности $R < K < G$, где либо K изоморфна A_5, либо K изоморфна группе диэдра с силовской 2-подгруппой порядка 2. В каждом из этих случаев $N_K(\langle b\rangle)$ является группой диэдра. Так как $R \leq N_K(\langle b\rangle$, то насыщенность группы N конечными группами диэдра доказана. По предложению 10 группа N обладает периодической частью $T(N)$, и $T(N) = T(N_G(\langle b\rangle)) = L \leftthreetimes \langle t\rangle$ — бесконечная локально диэдральная группа, L — бесконечная локально циклическая группа, t — инволюция, и для любого $x \in L$, $x^t = x^{-1}$. □

Зафиксируем группу L из утверждения леммы 10.

Лемма 11. *Для любой группы X из $\mathfrak{D}$ найдется элемент $g \in L$ такой, что $X^g = H$.*

Доказательство. По лемме 9 $X \cap H = B = A \leftthreetimes \langle b \rangle$. Возьмем в H инволюцию i такую, что $b^i = b^{-1}$. Возьмем в X инволюцию j такую, что $b^j = b^{-1}$. Очевидно, инволюции i, j лежат в $T(N_G(\langle b \rangle))$. По лемме 10 найдется такой элемент $l \in L$, что $j^l = i$. Следовательно,

$$\langle b \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle \leq H \cap X^l.$$

По лемме 6 $T(C_G(i)$ — четверная группа, следовательно, $T(C_G(i)) \leq H \cap X^l$. В этом случае, как нетрудно видеть, $H = \langle b, C_G(i) \rangle = X^l$.

□

Завершим доказательство теоремы. Из леммы 11 вытекает существование бесконечного множества

$$\{l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots\}$$

элементов группы L со свойством

$$A^{l_1} = A^{l_2} = \cdots = A^{l_n} = \cdots$$

Следовательно,

$$A = A^{l_2 l_1^{-1}} = \cdots = A^{l_n l_1^{-1}} = \cdots$$

и

$$\{l_2 l_1^{-1}, \cdots, l_n l_1^{-1} \cdots\} -$$

бесконечное множество элементов группы L, лежащее в $T(N_G(A))$. Так как $T(N_G(A))$ – группа Шункова, то по предложению 4 она содержит бесконечную локально конечную подгруппу F. Поскольку

$$|F : C_F(A)| \leqslant 3,$$

то $C_F(A)$ – бесконечная локально конечная группа. Ясно, что $C_F(A) \leq T(N_G(A))$. Противоречие с утверждением леммы 7. □

Список литературы

1. Дицман А. П. О центре p-групп / А. П. Дицман // Тр. семинара по теории групп. – М., 1938. – С. 30–34.
2. Каргаполов М. И. Основы теории групп / М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. – М. : Наука, 1982.
3. Кузнецов А. А. Группы, насыщенные заданным множеством групп / А. А. Кузнецов, К. А. Филиппов// Сиб. электрон. мат. изв. – 2011. – Т. 8. – С. 230–246.

4. Мазуров В. Д. О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций / В. Д. Мазуров // Алгебра и логика. – 2000. – Т. 39, № 1. – С. 74–86.
5. Рубашкин А. Г. Группы, насыщенные заданными множествами конечных групп : дис. ... канд. физ.-мат. наук / А. Г. Рубашкин ; Краснояр. гос. ун-т. – Красноярск, 2005. – 10 с.
6. Филиппов К. А. О периодической части группы Шункова, насыщенной $L_2(p^n)$ / К. А. Филиппов// Вестн. СибГАУ. – 2012. – № 1. – С. 611–617.
7. Филиппов К. А. О периодических группах, насыщенных конечными простыми группами / К. А. Филиппов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 2. – С. 430–438.
8. Остыловский А. Н. О локальной конечности одного класса групп с условием минимальности / А. Н.Остыловский, В. П. Шунков // Исследования по теории групп. – Красноярск, 1975. – С. 32–48.
9. Сенашов В. И. Группы с условиями конечности / В. И. Сенашов, В. П. Шунков. – Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2001.
10. Шлепкин А. К. О сопряженно-бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. – 1983. – № 22. – С. 226–231.
11. Шлепкин А. К. Сопряженно-бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы / А. К. Шлепкин // Третья междунар. конф. по алгебре : сб. тез. – Красноярск, 1993.
12. Шлепкин А. К. Группы Шункова с дополнительными ограничениями : дис. ... док. физ.-мат. наук / А. К. Шлепкин; Краснояр. гос. ун-т. – Красноярск, 1999. – 20 с.
13. Шлепкин А. К. Об одном классе периодических групп / А. К. Шлепкин, А. Г. Рубашкин // Алгебра и логика. – 2005. – Т. 44, № 1. – С. 114–125.
14. Шунков В.П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией / В. П. Шунков // Алгебра и логика. – 1972. – № 4. – С. 470–494.
15. Череп А. А. Об элементах конечного порядка в бипримитивно конечных группах / А. А. Череп // Алгебра и логика. – 1987. – № 26. – С. 518–521.
16. Amberg B. Periodic groups saturated by dihedral subgroups / B. Amberg, L. Kazarin // Book of abstracts of the international algebraic conference dedicated to 70-th birthday of Anatoly Yakovlev. – Saint-Petersburg, 2010. – P. 79–80.

Шлепкин Алексей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерной безопасности, Институт космических и информационных технологий, Сибирский федеральный университет, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, (e-mail: shlyopkin@mail.ru)

A. A. Shlepkin

On Periodic Groups and Shunkov Groups that are Saturated by Dihedral Groups and A_5

Abstract.
A group is said to be periodic, if any of its elements is of finite order. A Shunkov group is a group in which any pair of conjugate elements generates Finite subgroup with preservation of this property when passing to factor groups by finite Subgroups. The group G is saturated with groups from the set of groups X if any A finite subgroup K of G is contained in the subgroup of G, Isomorphic to some group in X. The paper

establishes the structure of periodic groups And Shunkov groups saturated by the set of groups $\mathfrak{M}$ consisting of one finite simple non-Abelian group A_5 and dihedral groups with Sylow 2-subgroup of order 2. It is proved that A periodic group saturated with groups from $\mathfrak{M}$, is either isomorphic to a prime Group A_5, or is isomorphic to a locally dihedral group with Sylow 2 subgroup of order 2. Also, the existence of the periodic part of the Shunkov group saturated with groups from the set $\mathfrak{M}$ is proved, and the structure of this periodic part is established.

Keywords: Periodic groups, groups saturated with the set of groups, Shunkov group.

References

1. Ditsman A.P. On the center of p -groups. *In Sat. Proceedings of the seminar on group theory.* Moscow, 1938, pp. 30-34.
2. Kargapolov M.И., Merzlyakov Yu.I. Fundamentals of group theory. Moscow, Nauka Publ., 1982. .
3. Kuznetsov A.A., Filippov K.A. Groups. Saturated with given Set of groups. *Siberian electronic mathematical repots,* 2011, vol. 8, pp. 230-246.
4. Mazurov V.D. On infinite groups with Abelian centralizers of involutions. *Algebra and logic,* 2009, vol. 39, no 1, pp. 74-86.
5. Rubashkin A.G. Groups saturated with given sets of finite groups. PhD thesis. 2005.
6. Filippov K.A. On the periodic part of the Shunkov group saturated with $L_2(p^n)$. *Bulletin of SibSAU,* 2012, no 1, pp. 611-617.
7. Filippov K.A. On periodic groups saturated by finite simple groups. *Sib. mat. Journal*, 2012, vol. 53, no 2, pp. 430-438.
8. Ostylovsky A.N., Shunkov V.P. On the local finiteness of a class of groups with the minimality condition. *Studies on the theory of groups*. Krasnoyarsk, 1975, pp. 32-48.
9. Senashov V.I., Shunkov V.P. Groups with finiteness conditions. Novosibirsk, Izdatel'stvo SB RAN, 2001.
10. Shlepkin A.K. On conjugately biprimitively finite groups with a primary minimum condition, *Algebra and logic*, 1983, no 22, pp. 226-231.
11. Shlepkin A.K. Conjugately biprimitively finite groups containing finite unsolvable subgroups. *Third Intern. Conf. In algebra*. Krasnoyarsk, 1993.
12. Shlepkin A.K. Shunkov groups with additional restrictions. *Thesis doc. Phys. Sciences*. Krasnoyarsk State Univer, 1999.
13. Shlepkin A.K., Rubashkin A.G. On a class of periodic groups. *Algebra and Logic*, 2005, no 1, pp. 114-125. https://doi.org/10.1007/s10469-005-0008-x
14. Shunkov V.P. On periodic groups with almost regular involution. *Algebra and logic*, 1972, no 4, pp. 470-494. https://doi.org/10.1007/BF02219098
15. A.A. Skull, On elements of finite order in biprimitively finite groups. *Algebra and logic*, 1987, no 26, pp. 518-521.
16. Amberg B., Kazarin L. Periodic groups saturated by dihedral subgroups. *Book of abstracts of the international algebraic conference dedicated to the 70th birthday of Anatoly Yakovlev*. Saint-Petersburg, 2010, pp. 79-80.

Shlepkin Alexey Anatolievich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Siberian Federal University, 79, Svobodny av., Krasnoyarsk, 660041, (e-mail: shlyopkin@mail.ru)

Известия Иркутского государственного университета.
2017. Т. 20. Серия «Математика». С. 96–108