Серия «Математика»
2017. Т. 20. С. 75—95

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Посвящается 110-летию профессора Владимира Владимировича Васильева — основателя математического факультета Иркутского государственного университета

УДК 517.518.15
MSC 35R25, 47A50, 47N20
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.20.75

Скелетные разложения линейных операторов в теории нерегулярных систем с частными производными*

Н. А. Сидоров
Иркутский государственный университет

Д. Н. Сидоров
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН
Иркутский государственный университет
Иркутский национальный исследовательский технический университет

Аннотация. Рассматриваются линейные системы уравнений с частными производными. В главной части систем стоит линейный необратимый оператор, допускающий скелетное разложение. Входящие в систему дифференциальные операторы имеют достаточно гладкие коэффициенты. Области определения дифференциальных операторов в конкретных ситуациях, рассмотренных в работе, состоят из линейных многообразий достаточно гладких функций со значениями в банаховом пространстве, подчиненных дополнительным граничным условиям. Вводится понятие скелетной цепочки линейного оператора, стоящего в главной части системы. Предполагается, что этот оператор порождает скелетную цепочку конечной длины. В этом случае решение исходной системы сводится к регулярной расщепленной системе уравнений, разрешенных относительно старших дифференциальных выражений с определенными начально-краевыми условиями. Указаны возможные обобщения предложенного подхода и рассмотрено его приложение к постановке

* Работа выполнена при частичной поддержке программы международного научно-технического сотрудничества Китая и России, грант No. 2015DFA70850, а также NSFC No. 61673398.

граничных задач в нелинейном случае. Результаты развивают теорию дифференциальных уравнений с вырождениями, заложенную в монографиях *N. A. Sidorov* [General regularization questions in problems of branching theory. (1982; MR 87a:58036)]; *N. A. Sidorov, B. V. Loginov, A. V. Sinitsyn* and *M. V. Falaleev* [Lyapunov – Schmidt methods in nonlinear analysis and applications (Math. Appl. 550, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht) (2002; Zbl 1027.47001)].

Ключевые слова: некорректная задача, задача Коши, необратимый оператор, скелетное разложение, скелетные цепочки, граничные задачи.

Постановка задачи

Пусть линейный ограниченный оператор $\mathbf{B}$, действующий из банахова пространства E в E, не имеет ограниченного обратного, $x = (t, x_1, \ldots, x_m)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $0 \in \Omega$. Введем дифференциальные операторы

$$\mathbf{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} + \sum_{k_0+k_1+\cdots+k_m \leq n-1} a_{k_0\ldots k_m}(x)\frac{\partial^{k_0+\cdots+k_m}}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots x_m^{k_m}},$$

$$\mathbf{L}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{k_0+k_1+\cdots+k_m \leq n_1} b_{k_0\ldots k_m}(x)\frac{\partial^{k_0+\cdots+k_m}}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots x_m^{k_m}},\ n_1 < n$$

с достаточно гладкими коэффициентами $a_{k_0\ldots k_m} : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^1$, $b_{k_0\ldots k_m} : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^1$, определенными в области Ω. Области определения операторов $\mathbf{L}, \mathbf{L}_1$ в конкретных ситуациях, рассмотренных ниже, будут состоять из линейных многообразий E_∂ достаточно гладких в Ω абстрактных функций со значениями в E, подчиненных дополнительно некоторой системе однородных граничных условий.

Пусть задана абстрактная функция $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+1} \to E$ аргумента x. Требуется найти вектор $u : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+1} \to E_\partial$, удовлетворяющий линейному уравнению

$$\mathbf{B}\,\mathbf{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = \mathbf{L}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u + f(x). \tag{0.1}$$

Если $\mathbf{B}$ имеет ограниченный обратный, то уравнение (0.1) назовем *регулярным* и *нерегулярным* в противном случае. Если $E = \mathbb{R}^N$ и $\det B \neq 0$, то (0.1) — суть система линейных уравнений в частных производных типа Ковалевской и мы имеем хорошо изученную регулярную задачу из теории систем с частными производными. Фундамент многих разделов современной общей теории систем с частными производными заложен И. Г. Петровским [5]. В регулярном случае для уравнения (0.1) можно задать начальные условия

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{t=0} = \varphi_i(x_1, \ldots, x_m),\ i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{0.2}$$

с аналитическими в Ω функциями φ_i. Если при этом f аналитична по t, $x_1, \ldots, x_m$ в Ω, то задача Коши (0.1) – (0.2) будет не только разрешима, но и *корректна* в классе аналитических функций. Сложный вопрос о корректности задачи Коши даже для линейных систем в частных производных в пространствах неаналитических функций обычно решается в классе функций, удовлетворяющих определенным оценкам. После появления работы С. Л. Соболева [6], посвященной исследованию классов уравнений, называемых теперь уравнениями Соболева, И. Г. Петровский и Л. А. Люстерник на своих семинарах привлекли внимание математиков к решению ряда проблем, связанных с построением теории систем дифференциальных уравнений в частных производных, неразрешенных относительно старшей производной по времени.

Помимо теоретического интереса разработка методов решения таких систем уравнений диктуется многочисленными новыми моделями в естественных науках, математической экономике и технике, см., например, [3; 4; 7; 8; 16; 17].

Нерегулярные модели позволяют исследовать поведение систем в критических ситуациях. В настоящее время усилиями ряда математиков основы соответствующей теории завершены для определенных классов уравнений. Например, создан фундамент теории и численные методы для ряда классов систем, получивших название алгебро-дифференциальных уравнений. В связи с рядом новых моделей в науке и технике (см., например, [7]), проводятся интенсивные исследования и в более сложной теории вырожденных уравнений с частными производными и абстрактным дифференциально-операторным уравнениям с вырождениями. Большой цикл исследований с важными приложениями в ряде областей науки и техники проведен в школе Г. А. Свиридюка на основе идей заложенных в работах [8; 16].

Если $\mathbf{B}$ — нормально-разрешимый оператор, то в этом случае в теории уравнений (0.1), следуя [9], можно эффективно использовать разложение банахова пространства на прямые суммы в соответствии с жордановой структурой оператора $\mathbf{B}$, а также теорию полугрупп с ядрами [16]. Достаточно полно разработаны на этой основе аналитические методы построения классических и обобщенных решений задачи Коши для обыкновенных операторно-дифференциальных уравнений при $x \in \mathbb{R}^1$ в банаховых пространствах с необратимым оператором в главной части [18; 9].

В тоже время аналитическая теория вырожденных операторно-дифференциальных уравнений с частными производными в банаховых пространствах в многомерном случае при $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ остается слабо разработанной. Здесь отметим частные результаты, некоторые из которых опубликованы только в малодоступных препринтах [10; 11]. Поэтому построение и изложение общей теории уравнений вида (0.1) с частными производными с необратимым оператором $\mathbf{B}$ представляет теоретический интерес и важно для современного математического моделирования.

Обратим внимание на *ограниченное* значение классических начальных условий Коши (0.2) для уравнения (0.1). Действительно, в силу необратимости оператора $\mathbf{B}$ выделенное направление t оказывается характеристическим и поэтому функции φ_i в начальных условиях (0.2) нельзя задать произвольными! В силу этого при поиске решений уравнения (0.1) возникает вопрос о разумной постановке и методах решения нестандартных граничных задач для системы (0.1), учитывающих структуру оператора $\mathbf{B}$. Решению этой проблемы и посвящена данная работа. Отметим, что для вырожденной задачи Гурса подобная задача решалась нами в [12] другими методами, использующими аппарат обобщенных жордановых цепочек линейных операторов. В п. 2 и 3 настоящей работы вопрос решается для ряда классов рассматриваемого уравнения при условии, что необратимый оператор $\mathbf{B}$ допускает скелетное разложение $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, где $\mathbf{A}_1 \in \mathcal{L}(E \to E_1)$, $\mathbf{A}_2 \in \mathcal{L}(E_1 \to E)$, E_1 — нормированное пространство.

Статья организована следующим образом. В п.1 излагаются базовые сведения о скелетных цепочках линейных операторов. Некоторые результаты этой работы анонсированы в работах [14; 15]. Вводится понятие невырожденной и вырожденной скелетной цепочки состоящей из последовательности линейных операторов $\mathbf{B}_i \in \mathcal{L}(E_i \to E_i, i = 1, 2, \dots)$, отвечающей оператору $\mathbf{B}$. Доказано, что в случае существования вырожденной скелетной цепочки, оператор $\mathbf{B}$ необходимо нильпотентен. В п. 2 в предположении, что необратимый оператор $\mathbf{B}$ порождает скелетную цепочку линейных операторов конечной длины p, решение нерегулярного уравнения (0.1) сводится к рекуррентной последовательности из $p+1$ уравнений. Отметим, что каждое из уравнений этой последовательности будет регулярным при естественных ограничениях на дифференциальные операторы $\mathbf{L}, \mathbf{L}_1$ и определенных начально-граничных условиях. Таким образом, если оператор $\mathbf{B}$ имеет скелетную цепочку конечной длины p, то решение нерегулярного уравнения (0.1) можно свести к регулярной системе из $p+1$-го уравнения.

Возможности предлагаемого подхода достаточно широки, так как в случае конечномерного оператора $\mathbf{B}$ длина его скелетной цепочки всегда конечна. Приведены формулы, связывающие решение уравнения (0.1) с решением редуцированной регулярной системы. Этот результат позволил доказать основную теорему разрешимости. В п. 2 эта теорема используется для постановки новых корректных начально-краевых задач для систем вида (0.1). Важно, что разработанный метод решения использует последовательность регулярных задач и не предполагает замкнутость значений оператора B. Соответствующие результаты и примеры приводятся в п. 2.

Отметим, что широкий спектр результатов с использованием нелинейных моделей соболевского типа в математической физике был получен авторами монографий [7; 3]. В данной работе рассматриваются линейные модели и показана возможность обобщения полученных результатов на нелинейный случай (см. п. 3).

1. Скелетные цепочки линейных операторов. Основная теорема разрешимости

Пусть $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(E \to E)$, причем $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, где $\mathbf{A}_2 \in \mathcal{L}(E \to E_1), \mathbf{A}_1 \in \mathcal{L}(E_1 \to E)$, E_1, E — линейные нормированные пространства. Представление $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ назовем *скелетным разложением оператора* $\mathbf{B}$. Введем линейный оператор $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$. Очевидно $\mathbf{B}_1 \in \mathcal{L}(E_1 \to E_1)$. Если оператор $\mathbf{B}_1$ имеет ограниченный обратный или он оказывается нулевым оператором из E_1 в E_1, то скажем, что $\mathbf{B}$ порождает *скелетную цепочку* $\{\mathbf{B}_1\}$ длины 1. При этом оператор $\mathbf{B}_1$ назовем *скелетно-присоединенным оператором* к оператору $\mathbf{B}$. Эту цепочку назовем вырожденной, если $\mathbf{B}_1 = 0$ и невырожденной, если $\mathbf{B}_1$ — обратимый оператор. Если $\mathbf{B}_1$ окажется необратимым ненулевым оператором, то будем аналогично допускать для него выполнение скелетного разложения $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$, где $\mathbf{A}_4 \in \mathcal{L}(E_1 \to E_2)$, $\mathbf{A}_3 \in \mathcal{L}(E_2 \to E_1)$, E_2 — новое линейное нормированное пространство. Очевидно, что при этом $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$ и можно ввести еще оператор $\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_4\mathbf{A}_3 \in \mathcal{L}(E_2 \to E_2)$. Если окажется, что $\mathbf{B}_2$ имеет ограниченный обратный или $\mathbf{B}_2 = 0$, то скажем, что оператор $\mathbf{B}$ имеет скелетную цепочку $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$ длины 2. Цепочка $\{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2\}$ вырожденная, если $\mathbf{B}_2 = 0$ и невырожденная, если $\mathbf{B}_2$ — обратимый оператор. Возможен и третий вариант, когда $\mathbf{B}_2$ – необратимый ненулевой оператор. В этом случае длина цепочки будет больше 2 и процесс ее построения должен быть продолжен.

Действительно, этот процесс можно продолжить для ряда классов линейных операторов, вводя линейные нормированные пространства E_i, $i = 1, \ldots, p$ и строя ограниченные операторы $\mathbf{A}_{2i} \in \mathcal{L}(E_{i-1} \to E_i)$, $\mathbf{A}_{2i-1} \in \mathcal{L}(E_i \to E_{i-1})$, удовлетворяющие равенствам

$$\mathbf{A}_{2i}\mathbf{A}_{2i-1} = \mathbf{A}_{2i+1}\mathbf{A}_{2i+2},\ i = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{1.1}$$

Соответственно (1.1) задается последовательность линейных операторов $\{\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_p\}$ формулами

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_{2i}\mathbf{A}_{2i-1},\ i = 1, 2, \ldots, p. \tag{1.2}$$

Очевидно $\mathbf{B}_i \in \mathcal{L}(E_i \to E_i)$. Здесь последний оператор $\mathbf{B}_p$ или имеет ограниченный обратный или $\mathbf{B}_p$ нулевой оператор из E_p в E_p. Соответственно этому процессу построения операторов B_i удобно ввести такое определение.

Определение 1. *Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ и операторы $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^{2p}$ удовлетворяют равенствам (1.1). Пусть при этом операторы $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_p\}$ определяются формулами (1.2), причем ненулевые операторы $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{p-1}\}$ необратимы, а оператор $\mathbf{B}_p$ имеет ограниченный обратный или является нулевым оператором из E_p в E_p. Тогда будем говорить, что оператор $\mathbf{B}$ порождает скелетную цепочку $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_p\}$ линейных операторов длины p, соответственно невырожденную, если $\mathbf{B}_p \neq 0$ обратим и вырожденную, если $\mathbf{B}_p = 0$. Операторы $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_p\}$ назовем скелетно-присоединенными к оператору $\mathbf{B}$.*

Приведем примеры наиболее важных для приложений линейных операторов, порождающих скелетные цепочки конечной длины.

Пример 1. $E = \mathbb{R}^m$, вырожденная квадратная матрица $B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ очевидно имеет скелетную цепочку, состоящую из конечного числа вырожденных квадратных матриц понижающихся размерностей. При этом последняя матрица цепочки всегда окажется невырожденной или нулевой.

Пример 2. E — бесконечномерное нормированное пространство, конечномерный оператор $\mathbf{B} = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$, где $\{z_i\} \in E$, $\gamma_i \in E^*$ подобно первому примеру имеет скелетную цепочку конечной длины, состоящую из матриц $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_p\}$ понижающихся размерностей. При этом $\mathbf{B}_1 = ||\langle z_i, \gamma_j \rangle||_{i,j=1}^{n}$ — первый скелетно присоединенный элемент цепочки.

В примере 2 согласно определению 1 длина цепочки $p = 1$, если $\det[\langle z_i, \gamma_j \rangle]_{i,j=1}^{n} \neq 0$ или $\langle z_i, \gamma_j \rangle = 0, i, j = 1, 2, \dots, n$. В общем случае, как и в примере 1, цепочка состоит из конечного числа матриц понижающихся размерностей.

На основании формул (1.1), (1.2) и определения 1 сформулируем следующий результат.

Лемма 1. *Если оператор $\mathbf{B}$ имеет скелетную цепочку длины p, то для его степеней $\mathbf{B}^n$, $n = 2, 3, \dots, p+1$ справедливы представления*

$$\mathbf{B}^n = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_3 \dots \mathbf{A}_{2n-1}\mathbf{B}_{n-1}\mathbf{A}_{2n-2}\mathbf{A}_{2n-4} \dots \mathbf{A}_2, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots \mathbf{B}_p$ — элементы скелетной цепочки оператора $\mathbf{B}$.

Из Леммы 1 вытекает

Следствие 1. *Если оператор* $\mathbf{B}$ *имеет вырожденную скелетную цепочку длины* p, *то* $\mathbf{B}$ *— нильпотентный оператор индекса* $p+1$.

Для доказательства следствия достаточно в формуле (1.3) положить $n = p+1$ и убедиться, что степень $\mathbf{B}^{p+1}$ — нулевой оператор, так как в представлении этой степени стоит нулевой оператор $\mathbf{B}_p$ в силу определения вырожденности скелетной цепочки.

Используя введенный аппарат скелетных цепочек оператора $\mathbf{B}$ можно проводить редукцию нерегулярных систем вида (0.1) к последовательности регулярных задач.

С этой целью введем условие.
$\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^{2p}$ из представленной скелетной цепочки оператора $\mathbf{B}$ коммутируют с линейными операторами $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_1$, а оператор $\mathbf{L}_1$ является обратимым. Предполагается, что операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_1$ могут быть и отличными от указанных во введении дифференциальных операторов.

Рассмотрим абстрактное линейное уравнение

$$\mathbf{BL}u = \mathbf{L}_1 u + f. \tag{1.4}$$

Замечание. Очевидно, что уравнение (0.1) можно рассматривать как частный случай абстрактного уравнения (1.4), так как в (1.4) не уточняется вид операторов $\mathbf{L}, \mathbf{L}_1$. Введенное условие выполнено для уравнения (0.1) с постоянным оператором $\mathbf{B}$ и указанными там дифференциальными операторами $\mathbf{L}, \mathbf{L}_1$.

Проведем редукцию уравнения (1.4) к системе из $p+1$ уравнений, являющихся регулярными при определенных условиях на операторы $\mathbf{L}, \mathbf{L}_1$. Начнем с простейшего случая $p = 1$. Введем систему двух уравнений

$$\mathbf{B}_1\mathbf{L}u_1 = \mathbf{L}_1 u_1 + \mathbf{A}_2 f, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{L}_1 u = -f + \mathbf{A}_1\mathbf{L}u_1. \tag{1.6}$$

относительно элементов $u \in E$ и $u_1 \in E_1$. К системе (1.5), (1.6) мы придем и формально умножая уравнение (1.4) на опаратор $\mathbf{A}_2$ из скелетного разложения оператора $\mathbf{B}$ и вводя обозначение $u_1 = \mathbf{A}_2 u$.

Заметим, что система (1.5), (1.6) расщеплена и при этом $\mathbf{B}_1$ - обратимый оператор. Поэтому, если операторы $\mathbf{B}_1\mathbf{L} - \mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_1$ имеют ограниченные обратные, то ее единственное решение можно построить. Конечно, без дополнительных условий остается открытым вопрос будет ли построенное решение u удовлетворять уравнению (1.4)?

Приведем две леммы, устанавливающие связь между решениями уравнения (1.4) и системой (1.5), (1.6) и отвечающие на этот вопрос.

Лемма 2. *Пусть элемент* u^* *удовлетворяет уравнению (1.4) и оператор* $\mathbf{L}_1$ *имеет левый обратный. Тогда пара* $u_1^* = A_2 u^*, u^*$ *удовлетворяет системе (1.5), (1.6).*

Доказательство. По условию имеем тождество

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{L}u^* = \mathbf{L}_1u^* + f. \tag{1.7}$$

Из (1.7) в силу условия коммутирования вытекает тождество

$$\mathbf{A}_1\mathbf{L}\mathbf{A}_2u^* = \mathbf{L}_1u^* + f. \tag{1.8}$$

и тождество

$$\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1\mathbf{L}\mathbf{A}_2u^* = \mathbf{L}_1\mathbf{A}_2u^* + \mathbf{A}_2f. \tag{1.9}$$

Последнее тождество означает, что элемент $u_1^* = \mathbf{A}_2u^*$ – суть решение уравнения (1.5). Подставляя u_1^* в правую часть уравнения (1.6) с учетом коммутирования операторов получим следующее уравнение относительно элемента u :

$$\mathbf{L}_1u = -f + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{L}u^*$$

с известной правой частью. Это уравнение разрешимо. Действительно, в этом уравнении в силу тождества (1.7) правая часть тождественно равна $\mathbf{L}_1u^*$. Поэтому при заданном элементе u^* и $u_1^* = \mathbf{A}_2u^*$ правая часть принадлежит области значений оператора $\mathbf{L}_1$.

Таким образом, $\mathbf{L}_1u = \mathbf{L}_1u^*$. Так как оператор $\mathbf{L}_1$ имеет левый обратный, то элемент u^* при $u_1 = \mathbf{A}_2u^*$ будет единственным решением уравнения (1.6). Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Пусть существует пара (u_1^*, u^*), удовлетворяющая системе (1.5), (1.6). Пусть оператор $\mathbf{L}_1$ имеет правый обратный $\mathbf{L}_1^{-1}$. Тогда элемент u^* удовлетворяет уравнению (1.4).*

Доказательство. Элемент $-f + \mathbf{A}_1\mathbf{L}u_1^*$ принадлежит области значений оператора $\mathbf{L}_1$, т.к. пара u_1^*, u^* удовлетворяет системе (1.5), (1.6). Поэтому $u^* = \mathbf{L}_1^{-1}(-f + \mathbf{A}_1\mathbf{L}u_1^*)$, т.к.

$$-f + \mathbf{A}_1\mathbf{L}u_1^* \in \mathcal{R}(\mathbf{L}_1),$$

где $\mathcal{R}(\mathbf{L}_1)$ — область значений оператора $\mathbf{L}_1$. Убедимся, что построенный элемент u^* удовлетворяет уравнению (1.4), т.к. по условию u_1^* удовлетворяет уравнению (1.5). Действительно, подставляя построенное u^* в уравнение (1.4), где $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, придем к равенству

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{L}\mathbf{L}_1^{-1}(-f + \mathbf{A}_1\mathbf{L}u_1^*) = \mathbf{A}_1\mathbf{L}u_1^*.$$

С учетом коммутирования операторов получаем равенство

$$\mathbf{A}_1\mathbf{L}\{\mathbf{A}_2\mathbf{L}_1^{-1}(-f + \mathbf{A}_1\mathbf{L}u_1^*) - u_1^*\} = 0. \tag{1.10}$$

Так как $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{L}$ — линейные операторы, то осталось убедиться, что в (1.10) элемент, стоящий в фигурных скобках, равен нулю. Так как элемент u_1^* из пространства E_1 удовлетворяет уравнению (1.5), где $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$, то справедливо тождество

$$\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_1\mathbf{L}u_1^* - f) = \mathbf{L}_1 u_1^*. \tag{1.11}$$

Следовательно, $\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_1\mathbf{L}u_1^* - f) \in \mathcal{R}(\mathbf{L}_1)$ и $u_1^* = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{A}_2(\mathbf{A}_1\mathbf{L}u_1^* - f)$, где $\mathbf{L}_1^{-1}$ – правый обратный к оператору $\mathbf{L}_1$. В силу условия коммутирования $\mathbf{A}_2\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1\mathbf{A}_2$ справедливо тождество $\mathbf{A}_2 = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{L}_1$. Тогда и

$$\mathbf{A}_2\mathbf{L}_1^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{L}_1\mathbf{L}_1^{-1}.$$

Т.к. $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_1^{-1} = \mathbf{I}$, то правый обратный $\mathbf{L}_1^{-1}$ также коммутирует с оператором $\mathbf{A}_2$. Поэтому тождество (1.11) можно переписать в виде

$$\mathbf{A}_2\mathbf{L}_1^{-1}(\mathbf{A}_1\mathbf{L}u_1^* - f) - u_1^* = 0.$$

Итак, мы показали, что в (1.10) выражение в фигурных скобках равно нулю. Лемма 3 доказана. □

Приведем аналоги Лемм 2 и 3 в общем случае скелетной цепочки произвольной конечной длины p. Предполагая, что оператор $\mathbf{B}$ имеет скелетную цепочку $\{\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_p\}$, $1 \le p < \infty$, а линейные операторы $\{A_i\}_{i=1}^{2p}$ представляют разложение скелетно присоединенных к $\mathbf{B}$ операторов $\mathbf{B}_i$, введем элементы

$$u_i = \prod_{j=1}^{i} \mathbf{A}_{2j} u,\ i = 1, \ldots, p, \tag{1.12}$$

$u_i \in E_i$, $u_i = \mathbf{A}_{2i}u_{i-1}, u_0 := u$.

Если u_0 удовлетворяет уравнению (1.4), то как и при $p = 1$, при $p \in \mathbb{N}$ в силу представления (1.13) приходим к равенствам

$$\mathbf{B}_p\mathbf{L}u_p = \mathbf{L}_1 u_p + \prod_{j=1}^{p} \mathbf{A}_{2j} f, \tag{1.13}$$

$$\mathbf{L}_1 u_i = -\prod_{j=1}^{i} \mathbf{A}_{2j} f + \mathbf{A}_{2i+1}\mathbf{L}u_{i+1}, \tag{1.14}$$

$$\mathbf{L}_1 u = -f + \mathbf{A}_1\mathbf{L}u_1. \tag{1.15}$$

Как и в случае $p = 1$ при $p \ge 2$ между решением уравнения (1.4) и системы (1.13) – (1.15) есть связь. А именно, имеют место следующие две леммы.

Лемма 4. *Пусть элемент u^* удовлетворяет уравнению (1.4) и оператор $\mathbf{L}_1$ имеет левый обратный. Тогда элементы $u_i^* = \prod_{j=1}^{i} \mathbf{A}_{2j} u^*$, $i = p, p-1, \ldots, 1$ удовлетворяют уравнениям (1.13), (1.14), а u^* удовлетворяет уравнению (1.15).*

Лемма 5. *Пусть элементы $u_p^*, u_{p-1}^*, \dots, u_1^*, u^*$ удовлетворяют уравнениям (1.13), (1.14), (1.15) и оператор $\mathbf{L}_1$ имеет правый обратный. Тогда элемент u^*, определяемый из последнего уравнения (1.15) расщепленной системы (1.13), (1.14), (1.15), является решением уравнения (1.4).*

Доказательство лемм 4 и 5 в случае $1 \leq p < \infty$ сводится, как и при $p = 1$, к использованию представлений скелетной цепочки через операторы $\{\mathbf{A}_j\}_{j=1}^{2p}$ и повторяет рассуждения, изложенные в случае $p = 1$ в леммах 2 и 3. На основании Лемм 1-5 справедлива

Теорема 1. (Основная теорема) *Пусть необратимый ограниченный оператор $\mathbf{B}$ имеет скелетную цепочку $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_p\}$, оператор $\mathbf{B}_p\mathbf{L} - \mathbf{L}_1$ с областью определения в E_p имеет ограниченный обратный. Пусть в пространствах E_i, $i = 1, \dots, p$ и E заданы свои области определения оператора $\mathbf{L}_1$, причем определенный на любой из этих областей оператор $\mathbf{L}_1$ имеет ограниченный обратный. Тогда система (1.13), (1.14), (1.15) имеет единственное решение $\{u_p^*, u_{p-1}^*, \dots, u_1^*, u^*\}$, определенное формулами*

$$u_p^* = (\mathbf{B}_p\mathbf{L} - \mathbf{L}_1)^{-1} \prod_{j=1}^{p} \mathbf{A}_{2j} f,$$

$$u_i^* = \mathbf{L}_1^{-1}\{-\prod_{j=1}^{i} \mathbf{A}_{2j} f + \mathbf{A}_{2j+1}\mathbf{L}u_{i+1}^*\}, i = p-1, \dots, 1,$$

$$u^* = \mathbf{L}_1^{-1}\{-f + \mathbf{A}_1 u_1^*\}.$$

Более того, элемент u^* удовлетворит уравнению (1.4) и при этом $u_i^* = \prod_{j=1}^{i} \mathbf{A}_{2j} u^*, i = 1, \dots, p$.

Задавая начально-граничные условия, обеспечивающие обратимость операторов $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{B}_p\mathbf{L} - \mathbf{L}_1$ при конкретных операторах $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_1$ и используя основную теорему, можно получать теоремы существования и единственности для уравнения (0.1). Более того, полученные в теореме формулы позволят эффективно строить искомое классическое решение уравнения (0.1) при достаточной гладкости функции $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{m+1} \to E$ и коэффициентов дифференциальных операторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}_1$. Такие приложения построенной теории рассмотрены далее в п.2.

2. Постановка и решение неклассических граничных задач

2.1. Нерегулярные ОДУ в банаховых пространствах

Рассмотрим простейшее нерегулярное ОДУ

$$\mathbf{B}\frac{du(t)}{dt} = u(t) + f(t), \tag{2.1}$$

$f(t) : [0, \infty) \to E$, $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(E \to E)$. Пусть $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_p\}$ — скелетная цепочка оператора $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_{2i}\mathbf{A}_{2i-1}$.

Тогда на основании основной теоремы можно сформулировать следующие результаты.

Теорема 2. *Пусть* $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_p\}$ *— регулярная скелетная цепочка, функция* $f(t)$ $p-1$*-раз дифференцируема. Тогда уравнение (2.1) с начальным условием*

$$\prod_{j=1}^{p} A_{2j}u(t)|_{t=0} = c_0,\ c_0 \in E_p \tag{2.2}$$

имеет единственное классическое решение

$$u(t, c_0) = -f(t) + \mathbf{A}_1\frac{du_1}{dt}. \tag{2.3}$$

Опишем схему построения $u_1(t, c_0)$ в решении (2.3).

1) Если $p = 1$ то $u_1(t, c_0)$ удовлетворяет регулярной задаче Коши

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1\frac{du_1}{dt} = u_1 + \mathbf{A}_2 f(t), \\ u_1(0) = c_0. \end{cases}$$

2) Если $p \geq 2$ то $u_1(t, c_0)$ можно построить рекурсией

$$\begin{cases} \mathbf{B}_p\frac{du_p}{dt} = u_p + \prod_{j=1}^{p}\mathbf{A}_{2j}f(t), \\ u_p(0) = c_0. \end{cases}$$

$$u_i(t, c_0) = \mathbf{A}_{2i+1}\frac{du_{i+1}(t, c_0)}{dt} - \prod_{j=1}^{i}\mathbf{A}_{2j}f(t),\ i = p-1, p-2, \dots, 1.$$

Теорема 3. *Пусть* $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{p-1}, 0\}$ *— сингулярная цепочка длины* $p \geq 1$, 0 *— нулевой оператор, действующий из* E_p *в* E_p*. Тогда* $\mathbf{B}$ *— нильпотентный оператор и однородное уравнение* $\mathbf{B}\frac{du}{dt} = u$ *имеет только тривиальное решение. Если при этом функция* $f(t)$ *–* p*-раз* *дифференцируема, то неоднородное уравнение (2.1) имеет единственное классическое решение. Для построения этого решения проведем итерации*

$$u_n(t) = -f(t) + \mathbf{B}\frac{d}{dt}u_{n-1}(t),\ u_0(t) = -f(t),\ n = 1, 2, \ldots, p.$$

Тогда в условиях теоремы 3 итерация $u_p(t)$ — суть единственное классическое решение неоднородного уравнения (2.1).

Для иллюстрации теорем 2, 3 рассмотрим два простых примера, предполагая, что $E = \mathbb{R}^3$.

Пример 1. Пусть в уравнении (2.1)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))^T$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$. Очевидно $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, где

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{A}_2 = (a, \cdot)$ (скалярное произведение), $a = (0, 1, 1)^T$. Поэтому согласно (1.2) $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = 1$, и матрица $\mathbf{B}$ порождает регулярную скелетную цепочку длины $p = 1$. Используя теорему 3 введем следующую систему

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = v + f_2(t) + f_3(t), \\ v(0) = 0, \\ u(t) = -f(t) + \mathbf{A}_1\frac{dv}{dt}, \end{cases}$$

где $v = \mathbf{A}_2 u = u_2(t) + u_3(t)$. Начальное условие $u_2(0) + u_3(0) = 0$ следует из условия $v(0) = 0$. Предположим, что $f_i(t)$ — непрерывные функции. Тогда

$$v(t) = \int_0^t e^{t-s}(f_2(s) - f_3(s))\,ds$$

и система (2.1) с матрицей $\mathbf{B}$ и начальным условием $u_2(0) + u_3(0) = 0$ имеет единственное классическое решение $u(t) = -f(t) + (2v(t) + 2f_2(t) + 2f_3(t), v(t) + f_2(t) + f_3(t), 0)^T$.

Пример 2. Пусть в уравнении (2.1) как и в примере 1 $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, где теперь

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{A}_2 = (a, \cdot)$, $a = (0, 1, -1)^T$. Тогда согласно (1.2) $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = 0$. Таким образом, в примере 2 $\{\mathbf{B}_1\}$ — суть сингулярная скелетная цепочка длины $p = 1$ соответствует матрице $\mathbf{B}$. Поэтому согласно теореме 3 решение системы (2.1) с такой матрицей $\mathbf{B}$ строим с помощью итераций

$$u_n(t) = -f(t) + \mathbf{B}\frac{d}{dt}u_{n-1}(t), n = 1, 2, \dots p, u_0(t) = -f(t).$$

Так как $p = 1$, то единственное решение неоднородной системы (2.1) в этом примере имеет вид

$$u(t) = -f(t) + (2(f_2(t) - f_3(t))', (f_2(t) - f_3(t))', (f_2(t) - f_3(t))')^T.$$

Если $f(t)$ — дифференцируемая функция, то получаем классическое решение. Если $f_i(t)$ кусочно абсолютно непрерывная функция с точками разрывов первого рода и кусочно непрерывными производными, то получим решение в пространстве распределений K'. Таким образом, предложенный метод позволяет строить и обобщенные решения сингулярных ОДУ.

2.2. Системы в частных производных с вырожденной матрицей в главной части

Рассмотрим две системы с вырожденной матрицей $\mathbf{B}$ в главной части. Сначала рассмотрим систему

$$\mathbf{B}\sum_{k_1+k_2\le n} a_{k_1k_2}\frac{\partial^{k_1+k_2}u(x,t)}{\partial t^{k_1}\partial x^{k_2}} = \sum_{k_1+k_2\le m} c_{k_1k_2}\frac{\partial^{k_1+k_2}u(x,t)}{\partial t^{k_1}\partial x^{k_2}} + f(x,t). \quad (2.4)$$

Здесь $m < n$, $\mathbf{B}$ — постоянная вырожденная матрица размерности $N \times N$, $a_{k_1k_2}$, $c_{k_1k_2}$ — постоянные, $a_{n0\neq 0,}$ $a_{0n} = 0$, $c_{0m} \neq 0$, $c_{m0} = 0$. Вектор-функции

$$u(x,t) = (u_1(x,t), \dots, u_N(x,t))', f(x,t) = (f_1(x,t), \dots, f_N(x,t))'$$

определены и аналитичны при $-\infty < x, t < \infty$.

Пусть $\operatorname{rank}\mathbf{B} = r < N$. Тогда на основании [2] $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, где $\mathbf{A}_1$ – $[N \times r]$, $\mathbf{A}_2$ – $[r \times N]$ матрицы. Введем матрицу $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ размерности $r \times r$ и предположим, что $\det\mathbf{B}_1 \neq 0$. Тогда на основании изложенного (см. Лемму 3) решение системы (2.4) сведется к последовательному решению уравнений (1.5), (1.6), которые в нашем случае имеют вид

$$\mathbf{B}_1\sum_{k_1+k_2\le n} a_{k_1k_2}\frac{\partial^{k_1+k_2}u_1(x,t)}{\partial t^{k_1}\partial x^{k_2}} = \sum_{k_1+k_2\le m} c_{k_1k_2}\frac{\partial^{k_1+k_2}u_1(x,t)}{\partial t^{k_1}\partial x^{k_2}} + \mathbf{A}_2 f(x,t), \quad (2.5)$$

$$\sum_{k_1+k_2\le m} c_{k_1k_2}\frac{\partial^{k_1+k_2}u(x,t)}{\partial t^{k_1}\partial x^{k_2}} = -f(x,t) + \mathbf{A}_1 \sum_{k_1+k_2\le n} a_{k_1k_2}\frac{\partial^{k_1+k_2}u_1(x,t)}{\partial t^{k_1}\partial x^{k_2}}, \tag{2.6}$$

где $\det \mathbf{B}_1 \neq 0$, $u_1(x,t) = (u_{11}(x,t),\dots,u_{1r}(x,t))', r < N$, $u_1 = A_2 u$. Так как по условию $a_{n0} \neq 0, c_{0m} \neq 0$, то для системы (2.4) можно ввести начальные условия

$$\left.\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x^i}\right|_{x=0}, \; i = 0,1,\dots,m-1, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{A}_2 \left.\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0} = 0, \; i = 0,1,\dots,n-1. \tag{2.8}$$

Вектор-функция $u_1(x,t)$ на основании теоремы Ковалевской определится, как единственное решение системы (2.5) с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^i u_1(x,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0} = 0, \; i = 0,1,\dots,n-1.$$

Подставляя найденный вектор $u_1(x,t)$ в правую часть системы (2.6), найдем искомый вектор $u(x,t)$ как единственное решение задачи Коши (2.6), (2.7).

Теперь рассмотрим систему

$$\mathbf{B}\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) + f(x,t), \; n \geq 3. \tag{2.9}$$

Здесь, как в системе (2.4), $\mathbf{B}$ — вырожденная матрица размерности $[N \times N], \mathrm{rank}\mathbf{B} = r < N$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$, $\det B_1 \neq 0$. Пусть $f(x,t) = (f_1(x,t),\dots,f_N(x,t))'$ — вектор-функция, определенная при $0 \le x \le 1, 0 < t < \infty$, непрерывная по x и аналитическая по t. Требуется построить решение системы (2.9) в полосе $\Omega = \{0 \le x \le 1, 0 < t < \infty\}$. На основании леммы 4 и теоремы введем систему из двух уравнений

$$\mathbf{B}_1\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_1(x,t) + \mathbf{A}_2 f(x,t). \tag{2.10}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = -f(x,t) + \mathbf{A}_1\frac{\partial^n u_1(x,t)}{\partial x^n}. \tag{2.11}$$

с начально-граничными условиями

$$\left.\frac{\partial^i u_1(x,t)}{\partial x^i}\right|_{x=0} = 0, i = 0,1,\dots,n-1 \tag{2.12}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = 0, \tag{2.13}$$

$$u(x,t)|_{x=0} = 0,\ u(x,t)|_{x=1} = 0. \tag{2.14}$$

Так как $\det B_1 \neq 0$, то вектор-функция $u_1(x,t)$ на основании теоремы Ковалевской определится как единственное решение задачи Коши (2.10), (2.12). Подставив найденное $u_1(x,t)$ в правую часть системы (2.11), построим единственное решение первой краевой задачи (2.11), (2.13), (2.14) для уравнения теплопроводности по известной формуле (см. стр. 214-215 в [13]), используя функцию источника. Построенное решение $u(x,t)$ будет классическим единственным решением системы (2.9) в полосе $\Omega = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 < t < \infty\}$ и удовлетворяет начальным условиям

$$\mathbf{A}_2 \frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x^i}\bigg|_{x=0} = 0,\ i = 1,\dots,n-1$$

и условиям (2.13), (2.14).

2.3. Интегро-дифференциальное уравнение первого рода

Рассмотрим теперь интегро-дифференциальное уравнение первого рода

$$\int_a^b K(,s)\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3}\,ds = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a^2 u(x,t) + f(x,t), \tag{2.15}$$

где $K(x,s) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(s)$ – непрерывное ядро, функция $f(x,t)$ определена и непрерывна при $a \leq x \leq b$, $0 \leq t \leq 1, a \neq n\pi$. Здесь оператор $\mathbf{B} := \int_a^b K(x,s)[\cdot]\,ds, E = \mathcal{C}_{[a,b]}$. Пусть $\det\left[\int_a^b a_i(x)b_j(x)\,dx\right]_{i,j=1}^n \neq 0$. Тогда согласно определению 1 невырожденная матрица

$$\mathbf{B}_1 = \left|\left|\int_a^b a_i(x)b_j(x)\,dx\right|\right|_{i,j=1}^n$$

составит невырожденную скелетную цепочку интегрального оператора $\mathbf{B}$ длины 1. Поэтому согласно Лемме 3 можно ввести систему (2.10), (2.11). В этой задаче такой системой служат уравнения (2.16), (2.17).

$$\mathbf{B}_1 \frac{d^3 u_1(t)}{dt^3} = \left(\frac{d^2}{dt^2} + a^2\right) u_1(t) + \beta(t), \tag{2.16}$$

где $\beta(t) = \left(\int_a^b f(x,t)b_1(x)\,dx, \dots, \int_a^b f(x,t)b_n(x)\,dx,\right)^T$,

$$u_1(t) = (u_{11}(t), \dots, u_{1n}(t))^T,$$

$u_{1j}(t) = \int_a^b b_j(s)u(s,t)\,ds,\ j = 1,2,\dots,n,\ \det\mathbf{B}_1 \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a^2 u(x,t) = -f(x,t) + \sum_{j=1}^n a_j(x)u_{1j}^{(3)}(t). \tag{2.17}$$

Следуя основной теореме для определения вектор-функции $u_1(t)$ зададим начальные условия

$$\left.\frac{d^i u_1(t)}{dt^i}\right|_{t=0} = 0, i = 0, 1, 2, \tag{2.18}$$

а для уравнения (2.17) и краевые условия

$$u(x,t)|_{t=0} = 0, \tag{2.19}$$

$$u(x,t)|_{t=1} = 0. \tag{2.20}$$

Вектор-функцию $u_1(t)$ найдем как решение обычной регулярной задачи Коши (2.16), (2.18). Подставим $u_1(t)$ в правую часть уравнения (2.17). Так как $a \neq n\pi$, то искомое решение $u(x,t)$ уравнения (2.15) определится как единственное решение краевой задачи (2.17), (2.19), (2.20) по формуле

$$u(x,t) = \int\limits_0^1 K(t,t_1)\left\{-f(x,t_1) + \sum_{j=1}^n a_j(x) u_{1j}^{(3)}(t_1)\right\} dt_1,$$

где $K(t,t_1)$ – функция Грина

$$K(t,t_1) = \begin{cases} \frac{\sin a(t_1-1)\sin at}{a \sin a} & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{\sin at_1 \sin a(t-1)}{a\sin a} & t_1 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Построенное решение $u(x,t)$ на основании основной теоремы удовлетворит уравнению (2.15) и граничным локальным и нелокальным условиям

$$u(x,t)|_{t=0} = 0,\ u(x,t)|_{t=1} = 0,$$

$$\int_a^b b_j(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,dx\Big|_{t=0} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

3. Возможные обобщения и другие подходы к постановке граничных задач

Изложенный подход, использующий скелетные цепочки оператора $\mathbf{B}$, можно применять и в нелинейном случае. Действительно, заменим в уравнении (0.1) элемент $f(x)$ на нелинейное относительно u отображение $f(Mu, x)$ в предположении, что $M = \prod_{j=1}^p \mathbf{A}_{2j}$, где $\{\mathbf{A}_{2j}\}$ – операторы, порождающие скелетную цепочку оператора $\mathbf{B}$. Тогда уравнение (1.13) редуцированной системы станет нелинейным уравнением относительно u_p. По условию при этом в уравнении (1.13) оператор $\mathbf{B}_p$

обратим. Поэтому, как и в линейном случае нетрудно сформулировать аналоги Лемм 1-5 и основной теоремы для такого нелинейного случая, предполагая, что отображение f удовлетворяет условию Липшица по переменной u.

Возможен и подход в построении теории неклассических граничных задач для уравнения (0.1), основанный на разложении банахова пространства E в соответствии с жордановой структурой оператора $\mathbf{B}$. Этот подход применялся нами в изучении граничных задач для гиперболических систем в задаче Гурса с вырожденной матрицей в главной части [12]. Покажем на примере системы (2.9), что метод работы [12] можно применять и к уравнению вида (0.1).

Действительно, пусть матрица $\mathbf{B}$ в системе (2.9) размерности $N \times N$ является симметрической, $\operatorname{rank} \mathbf{B} = r$, $\{\varphi_i\}_1^{N-r}$ — ортонормированный базис в $\ker \mathbf{B}$. Введем матрицу $\Gamma = (\mathbf{B} + \sum_{i=1}^{N-r} \langle \cdot, \varphi_i \rangle \varphi_i)^{-1}$. Тогда, не ограничивая общности, можно искать решение системы (2.9) в виде суммы

$$u(x,t) = \Gamma v(x,t) + \sum_{i=1}^{N-r} c_i(x,t)\varphi_i, \tag{3.1}$$

с неизвестными функциями $v(x,t)$ и $c_i(x,t)$ при условии

$$\langle v(x,t), \varphi_i \rangle = 0,\ i = 1, 2, \dots N - r. \tag{3.2}$$

Введем проектор $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N-r} \langle \cdot, \varphi_i \rangle \varphi_i$. В силу (3.2) $\mathbf{P}v = 0$, $\mathbf{P}\Gamma = \Gamma\mathbf{P}$. Поэтому, подставляя (3.1) в систему (2.9) и применяя оператор $\mathbf{I} - \mathbf{P}$, а затем оператор $\mathbf{P}$ к обеим частям полученного равенства, получим два уравнения

$$\frac{\partial^n v(x,t)}{\partial x^n} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \Gamma v(x,t) + (\mathbf{I} - \mathbf{P}) f(x,t),\ n \geq 3, \tag{3.3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) c(x,t) = \beta(x,t), \tag{3.4}$$

где $c(x,t) = (c_1(x,t), \dots, c_{N-r}(x,t))^T$,
$\beta(x,t) = (\langle f(x,t), \varphi_1 \rangle, \dots, \langle f(x,t), \varphi_{N-r} \rangle)^T$.

Уравнения (3.3), (3.4) позволяют построить искомые функции $v(x,t)$, $c_i(x,t)$ в представлении (3.1). Действительно, зададим для системы (2.9) граничные условия

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}) \frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x^i}\Big|_{x=0} = 0,\ i = 0, 1, \dots n - 1, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{P}u(x,t)|_{t=0} = 0, \mathbf{P}u(x,t)|_{x=0} = 0, \mathbf{P}u(x,t)|_{x=1} = 0. \tag{3.6}$$

Условия (3.5) порождают для системы (3.3), имеющей форму Ковалевской, условия Коши

$$\frac{\partial^i v(x,t)}{\partial x^i}\Big|_{x=0} = 0,\ i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.7}$$

Условия (3.6) порождают для параболических уравнений (3.4) известные граничные условия первой краевой задачи

$$c_i(x,0) = 0, c_i(0,t) = 0, c_i(1,t) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, N-r, \tag{3.8}$$

позволяющие строить $c(x,t)$ в замкнутом виде с помощью функции источника [13].

Если вектор-функция $f(x,t)$ — непрерывна по t и аналитична по x, то $v(x,t)$ найдем как классическое решение задачи Коши (3.3), (3.7) согласно теореме Ковалевской. Вектор-функцию $c(x,t)$ определим, решая параболическое уравнение (3.4) с условиями (3.8).

В заключение отметим, что используя аппарат обобщенных жордановых цепочек [1] можно поставить и решить и другие сложные граничные задачи для систем с частными производными.

Список литературы

1. Вайнберг М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин // М.: Наука. 1969. – 528 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория мартриц / Ф.Р. Гантмахер // М.: Наука, 1986.
3. Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях / М.О. Корпусов // М.: Либроком. 2010. 240 с.
4. Логинов Б. В. Дифференциальные уравнения с вырожденным зависящим от неизвестного оператором при производной / Б. В. Логинов, Ю. Б. Русак, Л. Р. Ким-Тян // Труды Седьмой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. Часть 2, СМФН, 59. – РУДН, М., 2016. – С. 119—147.
5. Петровский И. Г. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. Избранные труды. / И.Г. Петровский // М: Наука, 1986, 499 с.
6. Соболев С. Л. Задача Коши для частного случая систем не принадлежащих типу Ковалевской / С. Л. Соболев // ДАН СССР, 82. – 1952. – С. 205–208.
7. Свешников А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корусов, Ю.Д. Плетнер // М: Физматлит, 2007, 734 с.
8. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп с ядрами / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук, 49:4. – 1994. – С. 47–74.
9. Сидоров Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н.А. Сидоров // Иркутск: Изд-во ИГУ, 1982.
10. Сидоров Н.А. Дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператром при старшем дифференциальном выражении / Н.А. Сидоров, Е.Б. Благодатская // Препринт N. 1, Иркутск: СО АН СССР, Иркутский вычислительный центр, 1986. – 34 с.

11. Сидоров Н.А. Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части / Н.А. Сидоров, О.А. Романова, Е.Б. Благодатская // Препринт N. 3, Иркутск: СО АН СССР, Иркутский вычислительный центр, 1992. – 29 с.
12. Сидоров Н.А. Дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором / Н.А. Сидоров, Е.Б. Благодатская // ДАН СССР, 319:5. – 1991. – С. 1087–1090.
13. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский // Учеб. пособие. 6-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во МГУ, 1999.
14. Sidorov N. Skeleton decomposition of linear operators in the theory of degenerate differential equations / N. Sidorov, D. Sidorov and Y. Li // arXiv, arXiv:1511.08976. – 2015.
15. Sidorov D.N. Solution of irregular systems of partial differential equations using skeleton decomposition of linear operators / D. N. Sidorov, N. A. Sidorov // Vestn. YuUrGU. Ser. Matem. modelirovanie i programmirovanie, 10:2. – 2017. – P. 63–73.
16. Sviridyuk G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov // Inverse and Ill-Posed Problems Series, De Gruyter, 2003, 224 p.
17. Sidorov D. Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control / D. Sidorov; Ed. by L. O. Chua. —Singapore, London: World Scientific Publ., 2015. — Vol. 87 of World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A. — 258 p.
18. Sidorov N. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. Mathematics and Its Applications // Springer Netherlands, 2013.

Сидоров Николай Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)242210 (e-mail: `sidorov@math.isu.runnet.ru`)

Сидоров Денис Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 130; Иркутский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1; Иркутский национальный исследовательский технический университет, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, тел.: (3952)421342, (e-mail: `dsidorov@isem.sei.irk.ru`)

N. A. Sidorov, D. N. Sidorov

Skeleton Decomposition of Linear Operators in the Theory of Nonregular Systems of Partial Differential Equations

Abstract. The linear system of partial differential equations is considered. It is assumed that there is the irreversible linear operator in the main part of the system, which enjoy the skeletal decomposition. The differential operators is such system are assumed to have a sufficiently smooth coefficients. In the concrete situations the domains of such differential operators are linear manifolds of smooth enough functions with ranges in Banach space. Such functions are assumed to satisfy an additional boundary conditions. The concept of a skeleton chain of linear operator is introduced. It is assumed that the operator generates a skeleton chain of the finite length. In this case, the problem of solution of given system is reduced to a regular split system of equations. The system is resolved with respect to the highest differential expressions taking into account the certain initial and boundary conditions. The possible generalization of the approach and the application to the formulation of boundary value problems in the nonlinear case. Presented results develop the theory of degenerate differential equations in the monographs *N. A. Sidorov* [General regularization questions in problems of branching theory. (1982; MR 87a:58036)]; *N. A. Sidorov, B. V. Loginov, A. V. Sinitsyn* and *M. V. Falaleev* [Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications (Math. Appl. 550, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht) (2002; Zbl 1027.47001)].

Keywords: ill-posed problems, Cauchy problems, irreversible operator, skeleton decomposition, skeleton chain, boundary value problems.

References

1. Vainberg M. M. *Theory of branching of solutions of non-linear equations.* Leyden, 1974.
2. Gantmacher F. R. *The theory of matrices.* F. Trans. from Russian by K. A. Hirsch, vols. I and II. New York, Chelsea, 1959.
3. Korpusov M.O. *Blow-up in nonclassic wave equations.* Moscow. Libercom Publ. 2010. 240 p.
4. Loginov B.V., Rousak Yu.B., Kim-Tyan L.R. *Differential equations with degenerate, depending on the unknown function operator at the derivative.*/ Proceedings of the Seventh International Conference on Differential and Functional-Differential Equations (Moscow, August 22–29, 2014), Part 2, CMFD, 59, PFUR, M., 2016, p.119—147.
5. Petrowsky I.G., Oleinik O.A. ed. *Selected works. Part I: Systems of partial differential equations and algebraic geometry.* Classics of Soviet Mathematics, 5, part 1, Amsterdam, Gordon and Breach Publishers, 1996.
6. Sobolev S.L. The Cauchy problem for a special case of system that are not of Kovalevskaya type. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1952, vol. 82, no. 2, p. 1007–1009.
7. Sveshnikov A.G., Alshin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu. D. *Linear and Nonlinear Sobolev Equations.* Fizmatlit, Moscow, 2007.
8. Sviridyuk G.A. On the general theory of operator semigroups. *Russian Mathematical Surveys*, 1994, vol. 49, no. 4, 45p. https://doi.org/10.1070/RM1994v049n04ABEH002390
9. Sidorov N. A. *General Issues of Regularisation in the Problems of the Theory of Branching.* Irkutsk State University Publ., Irkutsk, 1982, 312 p.
10. Sidorov N.A., Blagodatskaya E.B. Differential equations with a Fredholm operator at the higher order derivative, Irkutsk. ICC AS USSR. *Preprint No.1*, 1986, 34 p (in Russian).
11. Sidorov N.A., Romanova O.A., Blagodatskaya E.B. PDE with finie index operator in the main part. Irkutsk. ICC AS USSR. *Preprint No. 3,* 1992, 29 p (in Russian).
12. Sidorov N. A., Blagodatskaya E.B. Differential Equations with Fredholm Operator in the Leading Differential Expression. *Soviet Math. Dokl,* 1992, vol. 44, no.1, p. 302–305.
13. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Equations of mathematical physics.* Courier Corporation, 2013.
14. Sidorov N., Sidorov D. and Li Y. *Skeleton decomposition of linear operators in the theory of degenerate differential equations. arXiv:* 1511.08976, 2015.

15. Sidorov D.N., Sidorov N.A. Solution of irregular systems of partial differential equations using skeleton decomposition of linear operators. *Vestn. YuUrGU. Ser. Matem. modelirovanie i programmirovanie,* 10:2, 2017, P. 63–73.
16. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Inverse and Ill-Posed Problems Series, De Gruyter, 2003, 224 p. https://doi.org/10.1515/9783110915501
17. Sidorov D. Integral Dynamical Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control; Ed. by L. O. Chua, Singapore, London: World Scientific Publ., 2015, vol. 87 of *World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A*, 258 p.
18. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A. and Falaleev M. *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications.* Mathematics and Its Applications Ser. Springer Netherlands, 2013.

Sidorov Nikolai Alexandrovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)242210 (e-mail: sidorov@math.isu.runnet.ru)

Sidorov Denis Nikolaevich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Senior Research Fellow, Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, 130, Lermontov st., Irkutsk, 664033; Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003; Irkutsk National Research Technical University, 84, Lermontov st., Irkutsk, 664074,
(e-mail: dsidorov@isem.sei.irk.ru)