Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 1. С. 72—77

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 512.572

О метабелевых многообразиях алгебр Лейбница – Пуассона *

С. М. Рацеев
Ульяновский государственный университет

О. И. Череватенко
Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова

Аннотация. В работе приводится конструкция алгебр, порождающих многообразие метабелевых алгебр Лейбница – Пуассона с тождеством $\{x, y\} \cdot \{z, t\} = 0$. Также асимптотически описаны все классы подмногообразий данного многообразия.

Ключевые слова: алгебра Пуассона; алгебра Лейбница – Пуассона; многообразие метабелевых алгебр; рост многообразия.

На протяжении всей работы, если это специально не оговорено, предполагается, что основное поле имеет нулевую характеристику. Алгебра Лейбница над полем K — неассоциативная алгебра с умножением $\{,\}$, определяемая тождеством Лейбница

$$\{\{x, y\}, z\} = \{\{x, z\}, y\} + \{x, \{y, z\}\},$$

которое превращает правое умножение в дифференцирование этой алгебры. При этом заметим, что если в алгебре Лейбница выполнено тождество $\{x, x\} = 0$, то она является алгеброй Ли. Таким образом, любая алгебра Ли является, в частности, алгеброй Лейбница.

Напомним, что многообразие метабелевых алгебр Лейбница определяется тождеством $\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\} = 0$.

Данное многообразие подробно изучено в работе [4]. Если в данном многообразии выполнено тождество $\{x, x\} = 0$, то из работы [1] следует, что полученное многообразие метабелевых алгебр Ли, которое обозначим $\mathbf{A^2}$, является наименьшим многообразием алгебр Ли, не являющееся нильпотентным. Другими словами, многообразие алгебр Ли $\mathbf{V}$ является нильпотентным тогда и только тогда, когда $\mathbf{A^2} \not\subseteq \mathbf{V}$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 10-01-00209-а.

Алгебра $A = A(+,\cdot,\{,\},K)$ над произвольным полем K называется алгеброй Лейбница-Пуассона, если $A(+,\cdot,K)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+,\{,\},K)$ — алгебра Лейбница с операцией умножения $\{,\}$ и для любых $a,b,c \in A$ выполнены правила:

$$\{a\cdot b,c\} = a\cdot\{b,c\} + \{a,c\}\cdot b, \ \ \{c,a\cdot b\} = a\cdot\{c,b\} + \{c,a\}\cdot b.$$

Заметим, что если в алгебре Лейбница – Пуассона выполнено тождество $\{x,x\} = 0$, то данная алгебра будет являться алгеброй Пуассона. Таким образом, алгебры Лейбница-Пуассона являются обобщениями алгебр Пуассона, которые возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики и т. д.

Пусть G_L — двумерная метабелева алгебра Ли с базисом a,b и таблицей умножения $[a,b] = -[b,a] = a$. Обозначим через G алгебру Пуассона $G_L \oplus K$ с операциями

$$(a+\alpha)\cdot(b+\beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta,$$
$$\{a+\alpha, b+\beta\} = [a,b], \quad a,b \in G_L, \quad \alpha,\beta \in K.$$

В работе [2] показано, что многообразие алгебр Пуассона, определенное тождествами

$$\{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\} = 0, \quad \{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\}\} = 0,$$

порождается алгеброй Пуассона G и имеет почти полиномиальный рост последовательности коразмерностей, т.е. рост самого многообразия экспоненциален, в то время как рост любого собственного подмногообразия данного многообразия является полиномиальным.

Пусть $F(X)$ — свободная алгебра Лейбница-Пуассона со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, ...\}$. Договоримся опускать скобки $\{,\}$ при их левонормированной расстановке:

$$\{\{\{x_1,x_2\},x_3\},...,x_n\} = \{x_1,x_2,...,x_n\}.$$

Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1,...,x_n$.

Предложение 1. ([*3*]). *Базис пространства P_n состоит из всех элементов вида*

$$x_{k_1}\cdot ... \cdot x_{k_r}\cdot\{x_{i_1},...,x_{i_s}\}\cdot ... \cdot\{x_{j_1},...,x_{j_t}\}, \tag{0.1}$$

для каждого из которых выполнены следующие условия:

(i) $r \geq 0$, $k_1 < ... < k_r$;

(ii) каждая из переменных x_1,...,x_n встречается в (0.1) *ровно один раз;*

(iii) *каждый множитель* $\{x_{i_1},...,x_{i_s}\}$,..., $\{x_{j_1},...,x_{j_t}\}$ *в* (0.1) *левонормирован и имеет длину* ≥ 2*;*

(iv) *множители в* (0.1) *упорядочены по длине:* $s \leq ... \leq t$*;*

(v) *если два соседних множителя в* (0.1)*, являющиеся скобками* $\{,\}$*, имеют одинаковую длину*

$$... \cdot \{x_{p_1},...,x_{p_s}\} \cdot \{x_{q_1},...,x_{q_s}\} \cdot ...,$$

то $p_1 < q_1$.

Обозначим через Γ_n подпространство в P_n, являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1},...,x_{i_s}\} \cdot ... \cdot \{x_{j_1},...,x_{j_t}\}, \quad s \geq 2,..., \ t \geq 2.$$

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Лейбница – Пуассона с идеалом тождеств $Id(\mathbf{V})$. Обозначим

$$P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap Id(\mathbf{V})), \ \ \Gamma_n(\mathbf{V}) = \Gamma_n/(\Gamma_n \cap Id(\mathbf{V})),$$

$$c_n(\mathbf{V}) = dim \ P_n(\mathbf{V}), \ \ \gamma_n(\mathbf{V}) = dim \ \Gamma_n(\mathbf{V}).$$

Далее нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть* A_L*— некоторая алгебра Ли с операцией умножения* $[,]$ *над произвольным полем* K*. В линейном пространстве* $A = A_L \times A_L \times K$ *над полем* K *определим операции умножения* $\cdot$ *и* $\{,\}$ *элементов множества* A *следующим образом:*

$$(x_1, x_2, \alpha) \cdot (y_1, y_2, \beta) = (\beta x_1 + \alpha y_1, \beta x_2 + \alpha y_2, \alpha\beta),$$

$$\{(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta)\} = ([x_1, y_1], [x_2, y_1], 0),$$

где $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A_L$*,* $\alpha, \beta \in K$*. Тогда полученная алгебра* A *будет являться алгеброй Лейбница-Пуассона, в которой выполнено тождество* $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$.

Пусть $\sigma \in S_n$, где S_n — симметрическая группа порядка n. Действие $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$ естественным образом продолжается до автоморфизма свободной алгебры Лейбница-Пуассона $F(X)$. Пространство $\Gamma_n(\mathbf{V})$ становится при этом S_n-модулем. Исследование структуры $\Gamma_n(\mathbf{V})$ как S_n-модуля играет важную роль при изучении многообразия $\mathbf{V}$, так как из работы [3] следует, что идеал тождеств многообразия алгебр Лейбница-Пуассона $\mathbf{V}$ порождается системой тождеств из множества

$$\bigcup_{n\geq 2} (\Gamma_n \cap Id(\mathbf{V})).$$

Модуль $\Gamma_n(\mathbf{V})$ является вполне приводимым, разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров имеет следующий вид:

$$\chi_n^{\Gamma}(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})\chi_\lambda.$$

Обозначим через U_2 алгебру Лейбница-Пуассона $G_L \times G_L \times K$, построенную с помощью предыдущего предложения.

Теорема 1. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Лейбница-Пуассона U_2 справедливы следующие утверждения.*

(i) Полилинейные тождества

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\} = 0 \tag{0.2}$$

порождают идеал тождеств алгебры U_2.

(ii) Для любого натурального $n \geq 2$ элементы вида

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{j_1}, ..., x_{j_{n-2}}\}, \tag{0.3}$$

где $\{i_1, i_2, j_1, ..., j_{n-1}\} = \{1, 2, ..., n\}$ как множества, $j_1 < ... < j_{n-2}$, образуют базис пространства $\Gamma_n(U_2)$.

(iii) Для любого натурального n элементы вида

$$x_1 \cdot ... \cdot x_n,$$
$$x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdot ... \cdot x_{k_{n-s}} \cdot \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{j_1}, ..., x_{j_{s-2}}\},$$

где $s = 2, ..., n$, $\{k_1, ..., k_{n-s}, i_1, i_2, j_1, ..., j_{s-2}\} = \{1, 2, ..., n\}$ как множества, $k_1 < ... < k_{n-s}$, $j_1 < ... < j_{s-2}$, образуют базис пространства $P_n(U_2)$.

(iv) $\gamma_n(U_2) = n(n-1)$, $n \geq 2$, и

$$\chi^{\Gamma}(U_2) = \chi_{(n)} + 2 \cdot \chi_{(n-1,1)} + \chi_{(n-2,2)} + \chi_{(n-2,1^2)}.$$

(v) $c_n(U_2) = 1 + n(n-1)2^{n-2}$, $n \geq 1$.

Доказательство. Очевидно, что в алгебре U_2 выполнены тождества (0.2).

Обозначим через $\mathbf{V}$ многообразие алгебр Лейбница – Пуассона, порожденное тождествами (0.3). Понятно, что пространство $\Gamma_n(\mathbf{V})$ является линейной оболочкой элементов вида (0.3). Покажем, что по модулю идеала тождеств алгебры U_2 элементы (0.3) являются линейно независимыми. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого $n \geq 2$ в алгебре U_2 выполнено нетривиальное тождество

$$\sum_{i_1, i_2, j_1, ..., j_{n-2}} \alpha_{i_1, i_2, j_1, ..., j_{n-2}} \{x_{i_1}, x_{i_2}, x_{j_1}, ..., x_{j_{n-2}}\} = 0.$$

Пусть $i_1, i_2, j_1, ..., j_{n-2}$ такой набор индексов, при котором коэффициент $\alpha_{i_1,i_2,j_1,...,j_{n-2}} \neq 0$. Сделаем следующую подстановку:

$$x_{i_1} \to (0,b,0),\ x_{i_2} \to (a,0,0),\ x_{j_1} \to (b,0,0), ...,\ x_{j_{n-2}} \to (b,0,0).$$

Тогда получаем равенство

$$\alpha_{i_1,i_2,j_1,...,j_{n-2}}(0,-a,0) = (0,0,0).$$

Отсюда $\alpha_{i_1,i_2,j_1,...,j_{n-2}} = 0$. Таким образом, условия (i) и (ii) доказаны. Условие (iii) следует из условия (ii) и предложения 4 работы [3].

Условие (iv) следует из условия (ii) и работы [4].

Условие (v) следует из (iii), при этом

$$c_n(U_2) = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \gamma_k(U_2) = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k k(k-1) = 1 + n(n-1)2^{n-2},$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k. □

Пусть $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — два многообразия алгебр Лейбница-Пуассона с соответствующими идеалами тождеств $Id(\mathbf{U})$ и $Id(\mathbf{V})$. Будем говорить, что многообразия $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ асимптотически равны, если существует такое N, что для любого $n \geq N$ выполнено равенство $Id(\mathbf{U}) \cap P_n = Id(\mathbf{V}) \cap P_n$.

Рассмотрим двумерную алгебру Лейбница H_L над полем K с базисом a, b и таблицей умножения $\{a,b\} = a$, $\{a,a\} = \{b,b\} = \{b,a\} = 0$. Обозначим через H алгебру Лейбница-Пуассона $H_L \oplus K$ с операциями

$$(a+\alpha)\cdot(b+\beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta,$$
$$\{a+\alpha, b+\beta\} = \{a,b\}, \quad a,b \in H_L, \quad \alpha,\beta \in K.$$

В работе [3] показано, что многообразие алгебр Лейбница-Пуассона, определенное тождествами

$$\{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\} = 0, \quad \{x_1,\{x_2,x_3\}\} = 0, \tag{0.4}$$

порождается алгеброй Лейбница-Пуассона H и имеет почти полиномиальный рост последовательности коразмерностей.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{V}$ *— подмногообразие в* $var(U_2)$ *над полем нулевой характеристики, где* $var(U_2)$ *— многообразие алгебр Лейбница-Пуассона, порожденное алгеброй* U_2*. Тогда многообразие* $\mathbf{V}$ *асимптотически совпадает с одним из следующих многообразий:*

(i) *многообразие абелевых алгебр Лейбница – Пуассона, определенное тождеством* $\{x,y\} = 0$*;*

(ii) *многообразие алгебр Пуассона, определенное тождествами* (0.2)*, которое порождается алгеброй* G*;*

(iii) *многообразие алгебр Лейбница – Пуассона, определенное тождествами* (0.4), *которое порождается алгеброй* H;

(iv) *многообразие алгебр Лейбница – Пуассона, определенное тождествами* (0.2) *и тождеством* $\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^\sigma\{x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}\}=0$, *которое порождается прямой суммой алгебр* $G\oplus H$;

(v) *многообразие* $var(U_2)$.

Доказательство следует из теоремы 1 и теоремы 4.1 работы [4].

Список литературы

1. Зельманов Е. И. Об энгелевых алгебрах Ли / Е. И. Зельманов // Сиб. мат. журн. – 1988. – Vol. 29, N 5. – P. 112–117.
2. Рацеев С. М. Эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона / С. М. Рацеев // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. – 2012. – Т. 67, вып. 5. – С. 8–13.
3. Рацеев С. М. Коммутативные алгебры Лейбница-Пуассона полиномиального роста / С. М. Рацеев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. – 2012. – Т. 94, вып. 3/1. – С. 54–65.
4. Drensky V. Varieties of metabelian Leibniz algebras / V. Drensky, G.M. Piacentini Cattaneo // J. Algebra and its Applications. – 2002. – Vol. 1. – P. 31–50.

S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko

On metabelian varieties of Leibniz-Poisson algebras

Abstract. In this paper we give algebra constructions that generate the metabelian variety of Leibniz-Poisson algebras with the identity $\{x,y\}\cdot\{z,t\}=0$. We give the asymptotic description of the metabelian varieties.

Keywords: Poisson algebra, Leibniz-Poisson algebra, variety of algebras, growth of variety.

Рацеев Сергей Михайлович, кандидат физико-математических наук, Ульяновский государственный университет, 432017, Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42. тел.: (8422)323247 (ratseevsm@mail.ru)

Череватенко Ольга Ивановна, кандидат физико-математических наук, Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н.Ульянова, 432063, Ульяновск, пл. 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, 4. тел.: (8422)441109 (chai@pisem.net)

Ratseev Sergey, Ulyanovsk State University, 432017, Ulyanovsk, Lev Tolstoy, 42, associate professor, Phone: (8422)323247 (ratseevsm@mail.ru)

Cherevatenko Olga, Ulyanovsk State I.N.Ulyanov Pedagogical University, Ploshchad' 100-letiya so dnya rozhdeniya V.I. Lenina, 4, associate professor, Phone: (8422)441109 (chai@pisem.net)