Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 1. С. 78—88

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.9

Существование и устойчивость решений полулинейных уравнений соболевского типа в относительно радиальном случае

М. А. Сагадеева
Южно-Уральский государственный университет

Аннотация. В статье изучена однозначная разрешимость задачи Коши для полулинейного уравнения соболевского типа с относительно p-радиальным оператором и устойчивость решений этого уравнения в окрестности точки нуль в случае, когда оператор при производной по выделенной переменной необратим.

Ключевые слова: полулинейные уравнения соболевского типа; теорема Адамара – Перрона; устойчивые и неустойчивые многообразия решений.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства; операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линеен и непрерывен), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линеен, замкнут и плотно определен), $N \in C^{\infty}(\mathfrak{U}_\alpha;\mathfrak{F})$. Здесь $\mathfrak{U}_\alpha$ — банахово пространство, причем вложение $\mathfrak{U}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{U}$ плотно и непрерывно. Рассмотрим полулинейное уравнение соболевского типа ([10]–[15])

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{0.1}$$

Нашей целью является изучение однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (0.1), а также устойчивости решений уравнения (0.1) в окрестности точки нуль. При этом заметим, что, во-первых, решения задачи Коши для уравнения (0.1) при любых начальных данных пусть даже из плотного в $\mathfrak{U}$ множества существуют не всегда (см. например, [6], [7]), а во-вторых, эти решения, даже если существуют, зачастую сильно неустойчивы. Несуществование решений объясняется тем, что уравнение (0.1) необходимо рассматривать не на всем пространстве $\mathfrak{U}$, а на некотором его подмножестве, понимаемом как фазовое пространство. Неустойчивость же решений объясняется расщеплением фазового пространства на инвариантные пространства, порождающие дихотомии решений. Изучение линейного случая

$$L\dot{u} = Mu, \tag{0.2}$$

упрощается в силу того, что фазовым пространством уравнения служит подпространство в $\mathfrak{U}$. Поэтому для полулинейных уравнений вида (0.1), фазовые пространства которых диффеоморфны некоторому подпространству в $\mathfrak{U}$, удается перенести результаты об устойчивости решений. А именно, используя результаты из [5] об устойчивости решений линейных уравнений соболевского типа вида (0.2) рассматривается вопрос устойчивости решений полулинейных уравнений (0.1) в относительно радиальном случае.

Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, то уравнение (0.1) тривиально редуцируется к уравнению

$$\dot{u} = Su + F(u), \tag{0.3}$$

где операторы $S \in L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U})$, $F \in L^{-1}N \in C^\infty(\mathfrak{U}_\alpha;\mathfrak{U})$. Если

(A) оператор S секториален, то при любом $u_0 \in \mathfrak{U}_\alpha$ и некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$, $\tau = \tau(u_0)$ существует единственное решение $u \in C^\infty([0,\tau);\mathfrak{U})$ задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (0.3) [8], п.3.3;

(B) спектр $\sigma(S)$ оператора S таков, что $\sigma(S) \cap \{i\mathbb{R}\} = \emptyset$, а оператор F таков, что $F(0) = 0$ и $F'_0 = \mathbb{O}$,

то в некоторой окрестности точки нуль существуют устойчивое и неустойчивое многообразия уравнения (0.3) [8], п.5.2.

Кстати сказать, в [1] предложено утверждения вида (B) называть «теоремой Адамара – Перрона». Мы будем придерживаться этого термина. В случае относительной ограниченности теорема Адамара –Перрона для уравнения соболевского типа вида (0.1) доказана в работе [3], а в случае относительной секториальности — в работе [2]. Мы же докажем эту теорему в случае, когда оператор M сильно (L,p)-радиален.

1. Относительно p-радиальные операторы

Доказательства утверждений этого пункта можно найти в [15].

Обозначим

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}, \qquad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M),$$

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}, \quad \mu \in \rho^L(M),$$

$$R^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} R^L_{\lambda_k}(M),\ L^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L^L_{\lambda_k}(M),\ \ \lambda_k \in \rho^L(M)\ (k = \overline{0,p}).$$

Определение 1. Оператор M называется *p-радиальным относительно* оператора L (коротко, (L,p)-*радиальным*), если

(i) $\exists \beta \in \mathbb{R}\ (\beta,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p) \in (\beta, +\infty)^{p+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\} \le \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p} (\mu_k - \beta)^n}.$$

Также введем обозначения

$$\mathfrak{U}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M),\ \mathfrak{F}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M),\ L_0 = L\Big|_{\mathfrak{U}^0},\ M_0 = M\Big|_{\mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^0}.$$

Через $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$) обозначим замыкание линеала $\mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathrm{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$), а через $\tilde{\mathfrak{U}}$ ($\tilde{\mathfrak{F}}$) — замыкание линеала $\mathfrak{U}^0 \dot{+} \mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathfrak{F}^0 \dot{+} \mathrm{im} L^L_{(\mu,p)}(M)$) в норме пространства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$).

Определение 2. *Решением* уравнения (0.2) назовем вектор-функцию $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$, удовлетворяющую этому уравнению на $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

Определение 3. Замкнутое множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (0.2), если

(i) любое решение $u(t)$ уравнения (0.2) лежит в $\mathfrak{P}$ (поточечно);

(ii) для любого u_0 из некоторого линеала $\mathring{\mathfrak{P}}$, плотного в $\mathfrak{P}$, существует единственное решение задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1.1}$$

для уравнения (0.2).

Теорема 1. *Пусть оператор M (L, p)-радиален. Тогда фазовым пространством уравнения* (0.2) *является множество* $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$).

Определение 4. Отображение $U(\cdot) : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ называется *разрешающей полугруппой* уравнения (0.2), если

(i) $U(s)U(t) = U(s+t)\ \forall s, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(ii) $u(t) = U(t)u_0$ есть решение этого уравнения для любого u_0 из некоторого плотного в $\mathfrak{U}$ линеала;

(iii) сужение единицы полугруппы на фазовое пространство $\mathfrak{P}$ уравнения есть $U(0)\Big|_{\mathfrak{P}} = \mathbb{I}$.

Полугруппу $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ будем называть *экспоненциально ограниченной* с константами C, β, если $\exists C > 0\ \exists \beta \in \mathbb{R}\ \forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ $\|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})} \le Ce^{\beta t}$.

Теорема 2. *Пусть оператор M (L, p)-радиален. Тогда существует экспоненциально ограниченная с константами K, β из определения* 1 *и сильно непрерывная разрешающая полугруппа уравнения* (0.2), *рассматриваемого на подпространстве* $\tilde{\mathfrak{U}}$.

Замечание 1. Операторы разрешающей полугруппы уравнения (0.2) при $t > 0$ можно представить в виде

$$U(t) = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\left(L - \frac{t}{k}M\right)^{-1} L\right)^k = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{t}R^L_{\frac{k}{t}}(M)\right)^k.$$

Замечание 2. Единицей полугруппы $\{U(t) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{U}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ ($\{F(t) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathfrak{F}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$) является проектор P (Q) вдоль $\mathfrak{U}^0$ ($\mathfrak{F}^0$) на $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$).

Определение 5. Оператор M называется *сильно* (L,p)*-радиальным*, если при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, ..., \mu_p > \beta$ выполняются условия

(i) существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ такой, что для всех $f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f\|_{\mathfrak{F}} \leq \frac{\text{const}(f)}{(\lambda - \beta)\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - \beta)};$$

(ii) $$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \leq \frac{K}{(\lambda - \beta)\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - \beta)}.$$

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$;

(ii) $L_k = L\Big|_{\mathfrak{U}^k} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $\quad M_k = M\Big|_{\text{dom}M_k} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $\text{dom}M_k = \text{dom}M \cap \mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$.

2. Устойчивость решений линейных уравнений

Доказательства утверждений этого пункта можно найти в [5], [9].

Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален с константой $\beta > 0$ и выполнено условие

(**D**) Существует $\omega > 0$, что $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : -\omega \leq \text{Re}\mu \leq \omega\} = \emptyset$.

Обозначим $\mathbb{C}_+ = \{\mu \in \mathbb{C} : \text{Re}\mu > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{\mu \in \mathbb{C} : \text{Re}\mu < 0\}$, $\sigma_\pm = \sigma^L(M) \cap \mathbb{C}_\pm$ и потребуем *ограниченности* множества σ_+.

Замечание 3. В случаях (L,p)-ограниченности и (L,p)-секориальности оператора M это условие имеет вид: $\sigma^L(M) \cap \{i\mathbb{R}\} = \emptyset$ (например, в подобном виде оно присутствует в условии (B)) .

В силу замкнутости относительного спектра существует конечный контур $\Gamma_+ \subset \rho^L(M) \cap \mathbb{C}_+$, ограничивающий область, содержащую σ_+.

Согласно относительно спектральной теореме [4] пространства $\mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F}^1$ расщепляются: $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^+ \oplus \mathfrak{U}^-$, $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}^+ \oplus \mathfrak{F}^-$. Этому расщеплению соответствуют проекторы $P_+ = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\Gamma_+} (\mu L - M)^{-1} L d\mu, \quad P_- = P - P_+,$

и $Q_+ = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\Gamma_+} L(\mu L - M)^{-1} d\mu$, $Q_- = Q - Q_+$. Обозначим $L_\pm = L\Big|_{\mathfrak{U}^\pm}$,

$M_\pm = M\Big|_{\mathrm{dom} M_\pm}$, $\mathrm{dom} M_\pm = \mathrm{dom} M \cap \mathfrak{U}^\pm$. По лемме 2 [4] $L_\pm \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^\pm; \mathfrak{F}^\pm)$, $M_\pm \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^\pm; \mathfrak{F}^\pm)$. Кроме того, в силу теоремы 1 [4] имеем $\sigma^{L_\pm}(M_\pm) = \sigma_\pm$, поэтому оператор M_+ (L_+, p)-ограничен [15], а M_- (L_-, p)-радиален с константой $\beta \leq -\omega < 0$.

Построим полугруппы операторов $\{U_\pm(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^\pm) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$

$$U_\pm(t) = s\text{-}\lim_{k \to \infty} \left(\frac{k}{t} R^{L_\pm}_{\frac{k}{t}}(M_\pm) \right)^k. \tag{2.1}$$

В силу того, что оператор M_+ является (L_+, p)-ограниченым, полугруппу $\{U_+(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^+) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ можно продолжить до группы $\{U_+(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^+) : t \in \mathbb{R}\}$. В силу замечания 2 разрешающая полугруппа уравнения (0.2) может быть представлена в виде

$$U(t) = U(t)P = U(t)(P_+ + P_-) = U_+(t)P_+ + U_-(t)P_-. \tag{2.2}$$

Определение 6. Пусть $\mathfrak{P}$ — фазовое пространство уравнения (0.2). Множество $\mathfrak{P}^1 \subset \mathfrak{P}$ называется *инвариантным подпространством* этого уравнения, если при любом u_0 из плотного в $\mathfrak{P}^1$ линеала существует единственное решение $u = u(t)$ задачи (0.2), (1.1), причем $u(t) = U(t)u_0 \in \mathfrak{P}^1$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 4. *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален и выполнено* (D), *тогда подпространства $\mathfrak{U}^+$ и $\mathfrak{U}^-$ являются инвариантными пространствами уравнения* (0.2).

Следующее определение и теорема являются переформулировкой понятия и теорем об экспоненциальной дихотомии решений [5].

Определение 7. Пусть $\mathfrak{P}^1$ – инвариантное пространство (0.2). Пусть $u(t, u_0) = U(t)u_0$ — решение задачи (1.1), (0.2) с $u_0 \in \mathfrak{P}^1$. $\mathfrak{P}^1$ называется *устойчивым* (*неустойчивым*), если $\exists \omega, C \in \mathbb{R}_+$, что $||u(t, u_0)||_{\mathfrak{U}} \leq Ce^{-\omega t}||u_0||_{\mathfrak{U}}$ при $t \in \mathbb{R}_+$ ($||u(t, u_0)||_{\mathfrak{U}} \leq Ce^{\omega t}||u_0||_{\mathfrak{U}}$ при $t \in \mathbb{R}_-$).

Теорема 5. *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален и выполнено* (D). *Тогда $\mathfrak{U}^-$ — устойчивое, а $\mathfrak{U}^+$ — неустойчивое инвариантные пространства уравнения* (0.2).

Если оператор M сильно (L,p)-радиален с константой $\beta > 0$ и выполнено условие (D), то $\mathfrak{U}^{\pm}$ — инвариантные пространства радиального оператора $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$. Поскольку спектр $\sigma(S) = \sigma^L(M)$, то пространство $\mathfrak{U}^-$ ($\mathfrak{U}^+$) является устойчивым (неустойчивым) пространством уравнения $\dot{u}^1 = Su^1$. Заметим еще, что если $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\mu \geq 0\} = \emptyset$, то неустойчивое инвариантное пространство $\mathfrak{U}^+ = \{0\}$. В таком случае фазовое пространство $\mathfrak{U}^1 \equiv \mathfrak{U}^-$ называется *асимптотически экспоненциально устойчивым пространством.*

3. Существование решений полулинейного уравнения

Итак, пусть оператор M сильно (L,p)-радиален с константой $\beta > 0$ из определения 1. Тогда полагая $\mathfrak{U}_0^1 = \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{U}_1^1 = \mathrm{dom}\ M \cap \mathfrak{U}^1$ с "нормой графика", аналогично [7] построим интерполяционные пространства $\mathfrak{U}_\alpha^1 = [\mathfrak{U}_0^1, \mathfrak{U}_1^1]_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$. Далее, положим $\mathfrak{U}_1^0 = \mathrm{dom}\ M \cap \mathfrak{U}^0$ с "нормой графика" и построим пространства $\mathfrak{U}_\alpha = \mathfrak{U}_1^0 \oplus \mathfrak{U}_\alpha^1$, $\alpha \in [0,1]$. Имеют место непрерывное и плотное вложение $\mathfrak{U}_\alpha \hookrightarrow \mathfrak{U}$, $\alpha \in [0,1]$, и равенство $\mathfrak{U}_1 = \mathrm{dom}\ M$ с "нормой графика". Фиксируем $\alpha \in [0,1)$, и пусть оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}_\alpha; \mathfrak{F})$.

Определение 8. Вектор-функцию $u \in C^\infty((0,T); \mathfrak{U}_1)$, удовлетворяющую при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ уравнению (0.1), назовем *решением* этого уравнения. Решение $u = u(t)$ уравнения (0.1), удовлетворяющее соотношению $\lim\limits_{t\to 0+} ||u(t) - u_0||_{\mathfrak{U}_\alpha} = 0$ при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}_\alpha$, назовем *решением задачи Коши для уравнения* (0.1) (коротко *решением задачи* (0.1), (1.1)).

Поскольку оператор M сильно (L,p)-радиален, то уравнение (0.1) эквивалентно системе из двух уравнений

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N(u), \tag{3.1}$$

$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}QN(u), \tag{3.2}$$

где оператор $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ нильпотентен степени p, а оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$ радиален в силу теоремы 3.

Определение 9. Решение $u = u(t)$ уравнения (0.1) называется *квазистационарной полутраекторией*, если

$$H\dot{u}(t) \equiv 0, \quad t \in (0,T). \tag{3.3}$$

Решение задачи (0.1), (1.1) называется *квазистационарной полутраекторией уравнения* (0.1), *выходящей из точки* u_0, если верно (3.3).

Если ограничиться рассмотрением только квазистационарных полутраекторий, то мы с необходимостью прийдем к рассмотрению множества

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U}_\alpha : (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\},$$

на котором они лежат в силу (3.1).

Пусть $\mathfrak{M} \neq \emptyset$; будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ в точке $u_0 \in \mathfrak{M}$ является *банаховым C^∞-многообразием*, если существуют окрестности $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{O}_1 \subset \mathfrak{U}_\alpha^1$ точек u_0 и $u_0^1 = Pu_0 \in \mathfrak{U}_\alpha^1$ соответственно и C^∞-диффеоморфизм $G : \mathfrak{O}_1 \to \mathfrak{O}$ такой, что G^{-1} есть сужение проектора P на $\mathfrak{M}$. Множество $\mathfrak{M}$ называется *банаховым C^∞-многообразием*, если оно является таковым в каждой своей точке. Связное банахово C^∞-многообразие называется *простым*.

Теорема 6. *Пусть в точке $u_0 \in \mathfrak{M}$ множество $\mathfrak{M}$ является банаховым C^∞-многообразием, тогда существует квазистационарная полутраектория уравнения* (0.1), *выходящая из точки u_0.*

Доказательство. В условиях теоремы уравнение (3.2) в окрестности $\mathfrak{O}_1 \hookrightarrow \mathfrak{U}_\alpha^1$ точки u_0^1 можно привести к виду

$$\dot{u}^1 = Su^1 + F(u^1), \tag{3.4}$$

где оператор $F = L_1^{-1}QNG \in C^\infty(\mathfrak{O}_1; \mathfrak{U})$. В силу теоремы 6.1.5 [12], решение $u^1 \in C^\infty((0,T); \mathfrak{U}_\alpha^1)$ задачи Коши $u^1(0) = u_0^1$ для уравнения (3.4) имеет вид: $u^1(t) = U(t)u_0^1 + \int\limits_0^t U(t-s)F(u^1(s))ds$. Вектор-функция $u(t) = Gu^1(t) + u^1(t)$ будет решением задачи (0.1), (1.1), причем будет выполнено (3.3). □

В дальнейшем нас будут интересовать случаи, когда фазовое пространство $\mathfrak{P}$ уравнения (0.1) будет совпадать со множеством его квазистационарных полутраекторий $\mathfrak{M}$. Отметим, что это заведомо имеет место, если оператор $N \equiv \mathbb{O}$ (см. теорему 5), или если $p = 0$ [6], [7].

4. Устойчивость решений полулинейных уравнений

Пусть, как и выше, оператор M сильно (L,p)-радиален с константой $\beta > 0$ и выполнено условие (D). Положим теперь $\mathfrak{U}_\alpha^\pm = \mathfrak{U}^\pm \cap \mathfrak{U}_\alpha^1$. Пусть множество $\mathfrak{M}$ — простое банахово C^∞-многообразие, а фазовое пространство уравнения (0.1) $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}$. Через $u(t, u_0)$ обозначим квазистационарную полутраекторию уравнения (0.1), выходящую из u_0.

Определение 10. Множество вида

$$\mathfrak{M}^{s(u)} = \{u_0 \in \mathfrak{M} : \|P_{-(+)}u_0\|_{\mathfrak{U}} \leq R_1, \|u(t,u_0)\|_{\mathfrak{U}} \leq R_2,\ t \in \mathbb{R}_{+(-)}\} :$$

(i) $\mathfrak{M}^{s(u)}$ диффеоморфно замкнутому шару в $\mathfrak{U}_\alpha^{-(+)}$ с центром в начале координат радиуса R_1;

(ii) $\mathfrak{M}^{s(u)}$ касается $\mathfrak{U}_\alpha^{-(+)}$ в начале координат;

(iii) при любом $u_0 \in \mathfrak{M}^{s(u)}$ $\|u(t,u_0)\|_{\mathfrak{U}} \to 0$ при $t \to +\infty(-\infty)$ называется *устойчивым* (*неустойчивым*) *инвариантным многообразием уравнения* (0.1).

Теорема 7. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален;*

(i) *существует $\omega > 0$, что $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : -\omega \leq \mathrm{Re}\mu \leq \omega\} = \emptyset$ и множество σ_+ — ограничено;*

(ii) *фазовое пространство уравнения* (0.1) $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}$ — *простое банахово C^∞-многообразие;*

(iii) *оператор N таков, что $N(0) = 0$, $N'_0 = \mathbb{O}$.*

Тогда при некоторых R_k, $k = 1,2$, существуют устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения (0.1). *Причем, если для некоторого $u_0 \in \mathfrak{M}$ имеет место $\|P_-u_0\|_{\mathfrak{U}} \leq R_1$ или $\|P_+u_0\|_{\mathfrak{U}} \leq R_1$ и $\|u(t,u_0)\|_{\mathfrak{U}} \leq R_2$ при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$, то $u_0 \in \mathfrak{M}^s \cup \mathfrak{M}^u$.*

Здесь с помощью N'_0 обозначена производная Фреше в начале координат пространства $\mathfrak{U}_\alpha$.

Доказательство. Сначала покажем, что для уравнения (3.4) существуют устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия.

Предположим сначала, что устойчивое инвариантное многообразие $\mathfrak{N}^s$ уравнения (3.4) существует. Пусть точка $u_0 \in \mathfrak{N}^s$, тогда, в силу (2.2) $u(t,u_0) = u^-(t,u_0) + u^+(t,u_0) = P_-u(t,u_0) + P_+u(t,u_0)$, причем, в силу теоремы 6, $u^+(t,u_0) = U_+(t)P_+u_0 + \int\limits_0^t U_+(t-s)P_+F(u(s,u_0))ds$. Отсюда, с учетом того, что $\{U_+(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^+) : t \in \mathbb{R}\}$ — группа (см. п.2), выполняется $U_+(-t)u^+(t,u_0) = P_+u_0 + \int\limits_0^t U_+(-s)P_+F(u(s,u_0))ds$, где левая часть $U_+(-t)u^+(t,u_0) \to 0$ при $t \to +\infty$, а следовательно, $P_+u_0 = -\int\limits_0^\infty U_+(-s)P_+F(u(s,u_0))ds.$

Итак, если $u(t) = u(t, u_0)$ — решение задачи Коши (1.1) для уравнения (3.4), то оно с необходимостью должно иметь вид:

$$u(t)=U_-(t)P_-u_0+\int\limits_0^t U_-(t-s)P_-F(u(s))ds-\int\limits_t^\infty U_+(t-s)P_+F(u(s))ds. \quad (4.1)$$

Причем, в силу п.2, ясно, что это решение $u(t, u_0) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Обратно, фиксируем точку $a \in \mathfrak{U}_\alpha^-$ и рассмотрим полное метрическое пространство $\mathfrak{G} = \{u \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U}) : \sup_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+} \|u(t)\|_\mathfrak{U} \le \rho,\ P_-u(0) = a\}$, где $\rho \in \mathbb{R}_+$ — константа, обеспечивающая сжатие оператора в правой части (4.1) на полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$. Итак, существует единственное решение $u \in \mathfrak{G}$ уравнения (4.1), причем $u(0) = a - \int\limits_0^\infty U_+(s)P_+F(u(s,a))ds$. Ясно, что $u \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{U})$, и рассмотрим предыдущее равенство, представленное в виде $a - \int\limits_0^\infty U_+(s)P_+F(u(s,a))ds = (\mathbb{I} + \delta)(a)$. Как нетрудно видеть, $\mathfrak{N}^s = \{u_0 \in \mathfrak{U} : u_0 = (\mathbb{I} + \delta)(a),\ a \in \mathfrak{U}_\alpha^-,\ \|a\|_\mathfrak{U} \le \rho(2M)^{-1}\}$ – устойчивое инвариантное многообразие уравнения (1.1).

Покажем существование неустойчивого инвариантного многообразия $\mathfrak{N}^u$. Для этого рассмотрим при малом $a \in \mathfrak{U}_\alpha^+$ и $t \le 0$ уравнение

$$u(t,a)=U_+(t)a+\int\limits_0^t U_+(t-s)P_+F(u(s,a))ds+\int\limits_{-\infty}^t U_-(t-s)P_-F(u(s,a))ds,$$

которое является аналогом (4.1). Очевидно, что $u(t, a) \to 0$ при $t \to -\infty$, а также является решением задачи Коши (1.1) для уравнения (3.4). Далее, с помощью рассуждений, аналогичных случаю устойчивого многообразия, строится представление многообразия $\mathfrak{N}^u$.

Итак, существует устойчивое $\mathfrak{N}^s$ и неустойчивое $\mathfrak{N}^u$ инвариантные многообразия уравнения (3.4). Положим

$$\mathfrak{M}^s = \{u \in \mathfrak{M} : u = (\mathbb{I} + \eta)(u^1),\ u^1 \in \mathfrak{N}^s\},$$

и покажем, что $\mathfrak{M}^s$ – искомое устойчивое многообразие уравнения (0.1). Прежде всего заметим, что для любого $u_0 \in \mathfrak{M}^s$ $\|P_-u_0\|_\mathfrak{U} = \|P_-u_0^1\|_\mathfrak{U} \le \rho(2M)^{-1}$, где $u_0^1 \in \mathfrak{N}^s$. Отсюда, если положить $R_1 = \rho(2M)^{-1}$, то требуемый C^∞-диффеоморфизм шара в $\mathfrak{U}_\alpha^-$ и $\mathfrak{M}^s$ задается формулой $G = \mathbb{I} + \eta(\mathbb{I} + \delta)$. Далее, поскольку любое решение $u(t, u_0)$ уравнения (0.1) имеет вид $u(t, u_0) = (\mathbb{I} + \eta)u^1(t, Pu_0)$, причем $\eta(u) = o(u)$ при $\|u\|_\mathfrak{U} \to 0$, то $\|u(t, u_0)\|_\mathfrak{U} = \|(\mathbb{I} + \eta)u^1(t, Pu_0)\|_\mathfrak{U} \to 0$ при $t \to +\infty$. Кроме того, отсюда вытекает существование константы R_2 такой, что $\|u(t, u_0)\|_\mathfrak{U} \le R_2,\ t \in \mathbb{R}_+$. Наконец, касание $\mathfrak{M}^s$ пространства $\mathfrak{U}_\alpha^-$ в начале координат вытекает из того, что $(\mathbb{I} - G)(u) = o(u)$ при $\|u\|_\mathfrak{U} \to 0$.

Существование неустойчивого инвариантного многообразия $\mathfrak{M}^u$ доказывается аналогично. $\square$

Аналогично п.2 заметим, что если $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\mu \geq 0\} = \emptyset$, то фазовое пространство уравнения (0.1) совпадает с устойчивым инвариантным многообразием.

Список литературы

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд, Ю. С. Ильяшенко // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундамент. направление. — 1985. – Т. 1. – С. 7–149.
2. Загребина С. А. Существование и устойчивость решений одного класса полулинейных уравнений соболевского типа / С. А. Загребина, М. М. Якупов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2008. – Вып. 2. – С. 10–18.
3. Китаева О. Г. Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения Осколкова / О. Г. Китаева, Г. А. Свиридюк // Неклас. уравнения мат. физики : тр. семинара, посвящ. 60-летию проф. В. Н. Врагова / Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН. – Новосибирск, 2005. – С. 161–166.
4. Келлер А.В. Относительно спектральная теорема / А.В. Келлер // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Мат. механика. – 1996. – № 1 (3). – С. 62–66.
5. Сагадеева М. А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа: монография / М. А. Сагадеева. – Челябинск : Издат. центр ЮУрГУ, 2012. – 139 с.
6. Свиридюк Г. А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г. А. Свиридюк // Изв. РАН. Сер. мат. – 1993. – Т. 57, № 3. – С. 192–207.
7. Свиридюк Г. А. Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором / Г. А. Свиридюк // Алгебра и анализ. – 1994. – Т. 6, № 5. – С. 252–272.
8. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М. : Мир, 1985. – 376 с.
9. Федоров В. Е. Существование экспоненциальных дихотомий некоторых классов вырожденных линейных уравнений / В. Е. Федоров, М. А. Сагадеева // Вычисл. технологии. – 2006. – Т. 11, № 2. – С. 82–92.
10. Demidenko G. V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest — order derivative / G. V. Demidenko, S. V. Uspenskii. – N. Y. ; Basel ; Hong Kong : Marcel Dekker, Inc., 2003. – 239 p.
11. Favini A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – N. York ; Basel ; Hong Kong : Marcel Dekker, Inc, 1999. – 236 p.
12. Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations / A. Pazy. – N. Y. : Springer-Verlag, 1983. – 446 p.
13. Pyatkov S. G. Operator theory. Nonclassical problems / S. G. Pyatkov. – Utrecht ; Boston ; Köln ; Tokyo : VSP, 2002. – 353 p.
14. Lyapunov – Shmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn and M. Falaleev. – Dordrecht ; Boston ; London : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.

15. Sviridyuk G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht, Boston : VSP, 2003. – 216 p.

M. A. Sagadeyeva

A Existance and a Stability of Solutions for Semilinear Sobolev type Equations in Relatively Radial Case

Abstract. The unique solvability of the Cauchy problem for a semilinear Sobolev type equation with respect to p-radial operators studied in this paper. Stability of the solutions in the neighborhood of zero has been studied for these equations.

Keywords: semilinear Sobolev type equations, theorem of Hadamar-Perron, stable and unstable manifold of solutions

Сагадеева Минзиля Алмасовна, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра Информационно-измерительной техники, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76 тел.: (351)2679001 (sagadeeva_ma@mail.ru)

Sagadeyeva Minzilya, Information-Measuring Technique Department, South Ural State University, 76, Lenina Av., Chelyabinsk, 454080, associate professor, Phone: (351)2679001 (sagadeeva_ma@mail.ru)