Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 4. С. 54—65

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

О скользящих режимах дифференциальных включений *

Д. В. Пономарев
Иркутский государственный университет

Аннотация. В работе рассматривается движение управляемых систем с многозначной правой частью по многообразию S на компактном интервале времени I. Производится оценка множества решений системы, траектории которых принадлежат S. Для разрывных систем, представленных в форме дифференциальных включений, были получены достаточные условия существования скользящего режима.

Ключевые слова: дифференциальное включение; скользящий режим; односторонние условия Липшица; аппроксимация Иосиды; множество достижимости.

1. Введение

Пусть $I = [t_0, t_0 + T]$ — отрезок числовой прямой, R^n — n-мерное векторное пространство с нормой $\| \cdot \|$.

В качестве исходного объекта исследования в данной работе выступает управляемая система вида

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t, x) + u, \\ u \in U(t, x), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $F : I \times R^n \to R^n$ и $U : I \times R^n \to R^n$ — многозначные отображения. Под решением системы (1.1) понимается пара функций $(x(t), u(t))$, которая почти всюду на I удовлетворяет включениям (1.1). При этом $x(t)$ предполагается абсолютно непрерывной функций и называется траекторией, $u(t)$ — измеримая функция, называемая управлением. В силу леммы Филиппова о неявной функции [1, с. 75] при выполнении

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инноваций России», проект №2012-1.2.1-12-000-1001-011).

определенных условий система (1.1) равносильна включению

$$\dot{x} \in F(t,x) + U(t,x). \tag{1.2}$$

Под решением системы (1.2) понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, почти всюду удовлетворяющая включению (1.2). Таким образом, соответствие между решениями систем (1.1) и (1.2) означает, что если $x(t)$ является решением включения (1.2), то найдется такая измеримая функция $u(t) \in U(t,x(t))$, что пара $(x(t),u(t))$ будет решением системы (1.1), и любое решение $(x(t),u(t))$ системы (1.1) дает нам функцию $x(t)$, являющуюся решением включения (1.2). В дальнейшем будет изучаться система (1.1) в форме включения (1.2). Отметим, что отображение $F(t,x)$ может быть однозначным или получено в результате доопределения разрывной функции по Филиппову (см. [2, с. 40]).

Нас будут интересовать движения системы (1.2) по множеству S, задаваемому непрерывно дифференцируемой векторной функцией $\sigma(t,x)$ размерности m, $m \le n$:

$$S = \{(t,x) \in I \times R^n : \sigma(t,x) = 0\}. \tag{1.3}$$

В дальнейшем без оговорок предполагается, что начальные условия принадлежат множеству S.

Второй и третий разделы статьи содержат достаточные условия существования скользящих режимов, основные требования, накладываемые на многозначные отображения и вспомогательные результаты, ослабляющие требования, накладываемые на управляющее воздействие. Отметим, что условия, позволяющие применять лемму Филиппова о неявной функции, содержатся в условиях существования скользящих режимов. Четвертый раздел посвящен оценке множества скользящих режимов включения (1.2).

2. Существование скользящих режимов

В данном разделе рассматривается вопрос о существовании решения дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t,x), \tag{2.1}$$

интегральная кривая которого лежит на заданном множестве S. Такое решение по терминологии, принятой в теории разрывных систем (см., например, [2]), будем называть скользящим режимом. Отметим, что выбор в качестве объекта исследования включения (2.1) позволяет накладывать условия, гарантирующие существование скользящего режима, на правую часть управляемой системы независимо от способа вхождения в нее управляющего воздействия.

Пусть $x(t)$ — некоторое решение включения (2.1). Если оно является скользящим режимом , то для почти всех $t \in I$ выполняется равенство

$$\sigma_t(t, x(t)) + \sigma_x(t, x(t))\dot{x}(t) = 0, \tag{2.2}$$

где σ_t — вектор частных производных функций $\sigma_i(t, x)$, $i = \overline{1, m}$, по t; σ_x — матрица Якоби функции $\sigma(t, x)$ по x. При этом если равенство (2.2) нарушается, то решение покидает множество S.

В определениях полунепрерывности сверху и измеримости многозначных отображений мы следуем [1].

Теорема 1. *Пусть $F : I \times R^n \to R^n$ — многозначное отображение, удовлетворяющее условиям*

A0) значения $F(t, x)$ являются непустыми выпуклыми компактными множествами;

A1) для любого фиксированного $t \in I$ отображение $x \to F(t, x)$ полунепрерывно сверху;

A2) для любого фиксированного $x \in R^n$ отображение $t \to F(t, x)$ измеримо;

A3) существует такая функция $\alpha(t) \in L^1_+(I)$, что для любых $(t, x) \in I \times R^n$ выполняется неравенство

$$\|F(t, x)\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|);$$

ASL) существует открытое множество $W \supset S$, такое, что для всех $(t, x) \in W$ выполняется включение

$$0 \in \sigma_t(t, x) + \sigma_x(t, x)F(t, x). \tag{2.3}$$

Тогда для любых начальных условий существует скользящий режим включения (2.1), определенный на отрезке I.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v(t, x) = \inf_{y \in F(t,x)} \|\sigma_t(t, x) + \sigma_x(t, x)y\|_m. \tag{2.4}$$

В силу компактности значений $F(t, x)$ точная нижняя грань для каждого $(t, x) \in I \times R^n$ в (2.4) достигается на некотором замкнутом подмножестве $F_1(t, x) \subset F(t, x)$. С учетом условия ASL и неотрицательности нормы $\|\cdot\|_m$ в пространстве R^m в правой части (2.4) для любых $(t, x) \in W$ и для любого $y \in F_1(t, x)$ выполняется

$$\sigma_t(t, x) + \sigma_x(t, x)y = 0. \tag{2.5}$$

Замкнув график отображения $F_1(t, x)$, получим график полунепрерывного сверху (см. [1]) отображения $F_2(t, x)$. Так как левая часть равенства (2.5) представляет собой непрерывную по совокупности переменных (t, x, y) функцию, множество W открыто, то это равенство выполняется и для любых $(t, x) \in W$ и $y \in F_2(t, x)$.

Введем отображение $F_3(t,x) = coF_2(t,x)$, где co — знак выпуклой оболочки множества, и установим некоторые его свойства.

1) Так как отображение $F_2(t,x)$ полунепрерывно сверху и имеет непустые замкнутые и ограниченные значения, то в силу леммы 16 из [2, с. 53] отображение $F_3(t,x)$ полунепрерывно сверху по совокупности переменных.

2) Так как выпуклая оболочка компактного множества компактна (см., например, [2]), то значения $F_3(t,x)$ являются выпуклыми компактными множествами.

3) Для любых $(t,x) \in W$ и для любых $y \in F_3(t,x)$ выполняется (2.5).

Действительно, зафиксируем $(t,x) \in W$ и $y \in F_3(t,x)$. В силу определения отображения $F_3(t,x)$ и теоремы Каратеодори (см. [2, с. 50]) найдутся натуральное число $k \le n+1$, $y_i \in F_2(t,x)$ и $\alpha_i \in [0,1]$, где $i = \overline{1,k}$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, такие, что $y = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i y_i$. Следовательно,

$$\sigma_t(t,x) + \sigma_x(t,x)y = \sigma_t(t,x)\sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \sigma_x(t,x)\sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \big(\alpha_i(\sigma_t(t,x) + \sigma_x(t,x)y_i)\big) = 0.$$

Через $F_0(t,x)$ обозначим отображение $F_0(t,x) = F(t,x) \bigcap F_3(t,x)$. Тогда:

1) Значения $F_0(t,x)$ являются непустыми выпуклыми компактамными множествами.

Действительно, так как для любых $(t,x) \in I \times R^n$ выполняется $F_1(t,x) \subset F(t,x)$, $F_1(t,x) \subset F_3(t,x)$ и $F_1(t,x) \neq \emptyset$, то значения $F_0(t,x)$ являются непустыми множествами. Выпуклость и компактность значений $F_0(t,x)$ следует из выпуклости и компактности значений $F(t,x)$ и $F_3(t,x)$.

2) Для любого $t \in I$ отображение $x \to F_0(t,x)$ полунепрерывно сверху в силу полунепрерывности сверху отображения $F_3(t,x)$, свойства A1 и теоремы 1.3.2 из [1, с. 42].

3) Для любого $x \in R^n$ отображение $t \to F_0(t,x)$ измеримо.

Действительно, так как при любом фиксированном $x \in R^n$ отображение $F_3(t,x)$ полунепрерывно сверху (следует из полунепрерывности сверху по совокупности переменных), то оно измеримо на I. Так как $F(t,x)$ удовлетворяет условию A2, то в силу следствия 1.5.8 из [1, с. 68] отображение $F_0(t,x)$ измеримо по t.

4) Так как для всех $(t,x) \in I \times R^n$ выполняется $F_0(t,x) \subset F(t,x)$, и $F(t,x)$ удовлетворяет условию A3, то для любого $(t,x) \in I \times R^n$

выполняется неравенство

$$\|F_0(t,x)\| \le \alpha(t)(1+\|x\|),$$

где $\alpha(t) \in L^1_+(I)$ — функция из условия A3.

5) В силу свойства 3 отображения $F_3(t,x)$ и определения отображения $F_0(t,x)$ для любого $(t,x) \in W$ и для любого $y \in F_0(t,x)$ выполняется равенство (2.5).

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} \in F_0(t,x), \quad x(t_0) = x_0.$$

В силу свойств 1–4 многозначного отображения $F_0(t,x)$ она имеет некоторое решение $x(t)$, определенное на всем отрезке I (см. теорему 3.2.6 из [1, с. 123]). При этом $x(t)$ является решением исходного включения (2.1), и в силу свойства 5 отображения $F_0(t,x)$ выполняется условие (2.2). Следовательно, $x(t)$ — скользящий режим системы (2.1).

Теорма доказана. □

Замечание 1. Открытость множества W в условиях теоремы 1 требуется для того, чтобы после замыкания графика отображения $F_1(t,x)$ на множестве S сохранялось равенство (2.5). В противном случае возможны нарушения этого условия на границе S.

Условия A0–A3 гарантируют существование решения для включения (2.1). Условие ASL дает возможность перехода от исходной системы к включению, любое решение которого является скользящим режимом.

Замечание 2. Условие ASL теоремы 1 может быть ослаблено следующим образом:

ASL$'$) существует открытое множество W, такое, что $W \bigcap S \ne \emptyset$, и для всех $(t,x) \in W$ выполняется включение

$$0 \in \sigma_t(t,x) + \sigma_x(t,x)F(t,x). \tag{2.6}$$

Тогда для любых начальных условий $(t,x) \in W \bigcap S$ будет существует скользящий режим системы (2.1), определенный на некотором интервале $[t_0, \tau)$. При этом для фиксированных начальных условий с учетом компактности множества решений дифференциального включения (см. теорему 3.2.9 из [1, с. 125]) можно потребовать выполнения включения (2.6) на таком множестве W, что любой скользящий режим системы (2.1), определенный на некотором интервале $[t_0, \tau)$, может быть продолжен до скользящего режима, определенного на всем отрезке I.

Укажем один из классов управляемых систем, для которых выполняется условие ASL. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x) + B(t,x)u, \tag{2.7}$$

где $u = (u_1, \dots, u_m)$, $B(t,x)$ — $n \times m$ матрица, такая, что выполняется $\sigma_x(t,x)B(t,x) = -E_m$, $1 \le m \le n$, E_m — единичная $m \times m$ матрица. Предположим, что функция $f(t,x)$ кусочно непрерывна с множеством точек разрыва S (см. [2, с. 39]), управление u удовлетворяет ограничениям вида $u \in U \subset R^m$, где U — множество с непустой внутренностью. Функцию $f(t,x)$ доопределим в точках разрыва по Филиппову и обозначим $F(t,x) = \overline{F}(t,x) + B(t,x)U$, где $\overline{F}(t,x)$ — выпуклая замкнутая оболочка предельных значений функции $f(t,x)$ в каждой точке. Тогда (2.7) запишется в виде (2.1), и легко проверить, что условие ASL вытекает из условия

$$\sigma_t(t,x) + \sigma_x(t,x)f(t,x) \in intU \tag{2.8}$$

в каждой точке $(t,x) \in S$.

3. Многозначные отображения с односторонними условиями Липшица

Определение 1. *Будем говорить, что многозначное отображение $F(t,x)$ удовлетворяет одностороннему условию Липшица по x с некоторой константой L, если для любых $(t,x),(t,y) \in I \times R^n$, для любых $u \in F(t,x)$ и $v \in F(t,y)$ выполняется неравенство*

$$\langle x-y, u-v\rangle \le L\|x-y\|^2.$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — знак скалярного произведения векторов.

Определение 2. *Многозначное отображение $F(t,x)$ удовлетворяет слабому одностороннему условию Липшица по x с некоторой константой L, если для любых $(t,x),(t,y) \in I \times R^n$, для любого $u \in F(t,x)$ существует такое $v \in F(t,y)$, что выполняется неравенство*

$$\langle x-y, u-v\rangle \le L\|x-y\|^2.$$

Отметим, что одностороннее условие Липшица влечет слабое одностороннее условие Липшица и является довольно жестким. Например, тождественно постоянное многозначное отображение $F(t,x) \equiv A$, где A — множество, содержащее не менее двух элементов, не удовлетворяет определению 1, но удовлетворяет определению 2. В общем случае многозначное отображение, удовлетворяющее условию Липшица в метрике Хаусдорфа (определение метрики Хаусдорфа см., например, в [1, с. 38]), удовлетворяет определению 2.

Лемма 1. *Пусть многозначное отображение $F : I \times R^n \to R^n$ удовлетворяет слабому одностороннему условию Липшица и условиям A0–A2. Тогда для любой непрерывной функции $w(t)$ и измеримой функции*

$u(t) \in F(t, w(t))$ найдется отображение $G(t,x) \subset F(t,x)$, определенное на $I \times R^n$, удовлетворяющее условиям A0–A2, такое, что для любых $(t,x) \in I \times R^n$ и для любого $g \in G(t,x)$выполняется

$$\langle w(t) - x, u(t) - g \rangle \le L\|w(t) - x\|^2. \tag{3.1}$$

Замечание 3. Существование измеримой функции $u(t)$ для любой непрерывной $w(t)$ следует из свойства суперпозиционной селектируемости отображения $F(t,x)$ (см. [1, с. 78–79]).

Доказательство. Приведем доказательство леммы 1.

Введем многозначное отображение

$$V(t,x) = \{v \in R^n : \varphi(t,x,v) \le L\|w(t) - x\|^2\}, \tag{3.2}$$

где $\varphi(t,x,v) = \langle w(t) - x, u(t) - v \rangle$. Тогда:

1. Значения отображения $V(t,x)$ являются выпуклыми замкнутыми множествами в R^n.

Действительно, замкнутость значений $V(t,x)$ следует из непрерывности функции $\varphi(t,x,v)$ по v. Покажем выпуклость значений $V(t,x)$. Зафиксируем $(t,x) \in I \times R^n$, $v_1 \in V(t,x)$ и $v_2 \in V(t,x)$. Выберем произвольное $v = \alpha v_1 + (1-\alpha)v_2$, где $\alpha \in [0,1]$. Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned}
\varphi(t,x,v) = \langle w(t) - x, u(t) - v \rangle = \\
\langle w(t) - x, (\alpha + (1-\alpha))u(t) - \alpha v_1 - (1-\alpha)v_2 \rangle = \\
\alpha \langle w(t) - x, u(t) - v_1 \rangle + (1-\alpha)\langle w(t) - x, u(t) - v_2 \rangle \le \\
\alpha L\|w(t) - x\|^2 + (1-\alpha)L\|w(t) - x\|^2 = L\|w(t) - x\|^2.
\end{aligned}$$

Таким образом $v \in V(t,x)$. Следовательно, для любых $(t,x) \in I \times R^n$ множество $V(t,x)$ является выпуклым.

2. Для любого фиксированного $t \in I$ отображение $x \to V(t,x)$ полунепрерывно сверху.

Действительно, зафиксируем $t \in I$. Функция $\varphi(t,x,v)$ непрерывна по совокупности переменных (x,v). Это означает, что для любых последовательностей $x_k \to x$ и $v_k \to v$ из условий $\varphi(t,x_k,v_k) \le L\|w(t) - x_k\|^2$ с учетом непрерывности правой части $(L\|w(t) - x\|)$ по x будет выполняться $\varphi(t,x,v) \le L\|w(t) - x\|^2$. Следовательно, отображение $V(t,x)$ полунепрерывно сверху по x.

3. Для любого фиксированного $x \in R^n$ отображение $t \to V(t,x)$ измеримо.

Действительно, зафиксируем $x \in R^n$. Так как функция $u(t)$ измерима на I, то в силу свойства Лузина для любого $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ найдется замкнутое подмножество $I_1 \subset I$, такое, что $\mu(I \backslash I_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, и $u(t)$ непрерывно на I_1. Таким образом функция $\varphi(t,x,v)$ непрерывна по совокупности переменных (t, v) на множестве I_1. По аналогии с предыдущим пунктом с учетом непрерывности $w(t)$ можно показать, что отображение $V(t, x)$ будет полунепрерывно сверху на I_1. Следовательно, $V(t, x)$ измеримо на I_1. В силу свойства Лузина (см., например, [1, с. 65]) для $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется такое замкнутое подмножество $I_2 \subset I_1$, что $\mu(I_1 \backslash I_2) < \frac{\varepsilon}{2}$, и сужение $V(t, x)$ на I_2 непрерывно. Так как $\mu(I \backslash I_2) < \varepsilon$, то свойство Лузина выполняется для $V(t, x)$ и на всем отрезке I, что и означает измеримость отображения $V(t, x)$ по t.

Пусть $G(t, x) = F(t, x) \bigcap V(t, x)$. Так как $F(t, x)$ удовлетворяет слабому одностороннему условию Липшица, то для любой точки $(t, x) \in I \times R^n$ выполняется $F(t, x) \bigcap V(t, x) \neq \emptyset$, то есть $G(t, x)$ непусто на множестве $I \times R^n$. При этом из включения $G(t, x) \subset V(t, x)$ следует выполнение условия (3.1). Покажем, что $G(t, x)$ удовлетворяет условиям A0–A2.

A0. Значения $G(t, x)$ являются выпуклыми компактными множествами в силу условия A0 для $F(t, x)$ и условия 1 для $V(t, x)$.

A1. Для любого фиксированного $t \in I$ отображение $x \to G(t, x)$ полунепрерывно сверху в силу условия A1 для $F(t, x)$, условия 2 для $V(t, x)$ и теоремы 1.3.2 из [1, с. 42].

A2. Для любого фиксированного $x \in R^n$ отображение $t \to G(t, x)$ измеримо в силу условия A2 для $F(t, x)$, условия 3 для $V(t, x)$ и следствия 1.5.8 из [1, с. 68].

Лемма доказана. □

4. Оценка множества достижимости скользящих режимов

Наряду с системой (1.2) рассмотрим также и вспомогательную систему

$$\dot{x} \in F_\lambda(t, x) + U(t, x) \tag{4.1}$$

где $F_\lambda(t, x)$ — некоторая непрерывная по x и измеримая по t однозначная функция с некоторым параметром λ. При этом предполагается выполнение следующего условия:

AP) существует такое число λ' и такие константы l и L, что для любых $\lambda \in (0, \lambda']$, $(t, y) \in S$, $x \in R^n$, $v \in F(t, y)$ имеет место неравенство

$$\langle x - y, F_\lambda(t, x) - v \rangle \leq l\|x - y\|^2 + \lambda L. \tag{4.2}$$

Замечание 4. Приведем пример подобной однозначной функции. Пусть $F(t, x)$ удовлетворяет условиям A0–A2 и одностороннему условию Липшица по x на $I \times R^n$. Замкнув график отображения $F(t, x)$, получаем график полунепрерывного сверху по совокупности переменных отображения $\overline{F}(t, x)$. Отметим, что $\overline{F}(t, x)$ также удовлетворяет одностороннему условию Липшица по x в силу непрерывности левой и правой частей неравенства из определения 1 по совокупности переменных (x, y, u, v). Для отображения $\overline{F}(t, x)$ в соответствии с [4] может быть построена аппроксимация Иосиды $F_\lambda(t, x)$, являющаяся однозначной непрерывной функцией. При этом в силу леммы 1 из [4] и с учетом включения $F(t, x) \subset \overline{F}(t, x)$ неравенство (4.2) выполняется для любых $\lambda \in (0, \lambda']$, $t \in I$, $x, y \in R^n$, $v \in F(t, y)$.

Через $H^{sl}(x_0, t)$ обозначим множество достижимости скользящих режимов системы (1.2) с начальным условием (t_0, x_0) в момент времени t. Множество достижимости всех решений системы (4.1) с начальным условием (t_0, x_0) в момент времени t обозначим $H_\lambda(x_0, t)$.

Теорема 2. *Пусть отображения $F(t, x)$ и $U(t, x)$ с удовлетворяют условиям A0–A3; отображение $U(t, x)$ удовлетворяет слабому одностороннему условию Липшица по x на $I \times R^n$ с константой L_u; для $F(t, x)$ существует однозначная функция $F_\lambda(t, x)$, удовлетворяющая условию AP;*

SL) существует открытое множество $W \supset S$, такое, что для любых $(t, x) \in W$ и для любых $u \in U(t, x)$ найдется такое $f \in F(t, x)$, что выполняется равенство

$$\sigma_t(t, x) + \sigma_x(t, x)(f + u) = 0.$$

Тогда для любых (t_0, x_0), $\lambda \in (0, \lambda']$, $t \in I$ имеет место оценка

$$h(H^{sl}(x_0, t), H_\lambda(x_0, t)) \le K\sqrt{\lambda}, \tag{4.3}$$

где K — некоторая константа, h — расстояние в метрике Хаусдорфа в пространстве всех непустых замкнутых подмножеств из R^n.

Доказательство. 1) Пусть $x(t)$ — скользящий режим системы (1.2). Его существование следует из теоремы 1. Тогда найдутся такие измеримые селекторы $f(t) \in F(t, x(t))$ и $u(t) \in U(t, x(t))$, что для всех $t \in I$

$$\dot{x}(t) = f(t) + u(t).$$

Пусть $U_u(t, x)$ — отображение из леммы 1, сформированное для непрерывной функции $x(t)$ и измеримой функции $u(t)$. Тогда в силу теоремы 3.2.6 из [1, с. 123] для включения

$$\dot{x} \in F_\lambda(t, x) + U_u(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

существует решение $x^\lambda(t)$, определенное на I. Для этого решения существует измеримое управление $u_\lambda(t)$ такое, что

$$\dot{x}^\lambda(t) = F_\lambda(t, x(t)) + u_\lambda(t).$$

Введем функцию $w(t) = \frac{1}{2}\|x^\lambda(t) - x(t)\|^2$ и с учетом леммы 1 и неравенства (4.2) оценим ее производную:

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) = \langle x^\lambda(t) - x(t), \dot{x}^\lambda(t) - \dot{x}(t)\rangle = \\ \langle x^\lambda(t) - x(t), F_\lambda(t, x^\lambda(t)) - f(t)\rangle + \langle x^\lambda(t) - x(t), u_\lambda(t) - u(t)\rangle \leq \\ l\|x^\lambda(t) - x(t)\|^2 + \lambda L + L_u\|x^\lambda(t) - x(t)\|^2 = \\ = 2(l + L_u)w(t) + \lambda L.\end{aligned}$$

В силу леммы Гронуолла-Беллмана (см. [3, с. 11]) получаем оценку

$$w(t) \leq K_1 w(0) + K_2\lambda = K_2\lambda,$$

где K_1, K_2 — константы, определенные в формулировке указанной леммы. Это означает выполнение неравенства

$$\|x(t) - x^\lambda(t)\| \leq K\sqrt{\lambda}$$

для всех $t \in I$, где $K = \sqrt{2K_2}$.

2) Пусть теперь $x^\lambda(t)$ — решение включения (4.1). Это означает существование такой измеримой функции $u_\lambda(t) \in U(t, x)$, что

$$\dot{x}^\lambda(t) = F_\lambda(t, x^\lambda(t)) + u_\lambda(t).$$

На основании леммы 1 для непрерывной функции $x^\lambda(t)$ и измеримой функции $u_\lambda(t)$ сформируем отображение $U_u(t, x)$. Так как отображения $F(t, x)$ и $U_u(t, x)$ (для $U_u(t, x)$ см.лемму 1 и включение $U_u(t, x) \subset U(t, x)$) удовлетворяют свойствам A0–A3 и SL, то в силу теоремы 1 существует скользящий режим $x(t)$ включения

$$\dot{x} \in F(t, x) + U_u(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

определенный на I. Следовательно, найдутся измеримые селекторы $f(t) \in F(t, x(t))$ и $u(t) \in U(t, x(t))$, такие, что для всех $t \in I$

$$\dot{x}(t) = f(t) + u(t)$$

Оценка производной $v(t)$ для функций $x(t)$ и $x^\lambda(t)$ ничем не отличается от аналогичной оценки из первого пункта данного доказательства, что позволяет сделать вывод о справедливости неравенства

$$\|x(t) - x^\lambda(t)\| \leq K\sqrt{\lambda}$$

для всех $t \in I$. Здесь K — та же константа, что и в первом пункте доказательства.

Из первого и второго пунктов данного доказательства следует истинность оценки (4.3).

Теорема доказана. □

Замечание 5. Если управляющее воздействие $U(t,x)$ удовлетворяет одностороннему условию Липшица по x на $I \times R^n$, то условие SL может быть ослаблено следующим образом:

SL$'$) существует открытое множество $W \supset S$, такое, что для любых $(t,x) \in W$ и найдутся такие $u \in U(t,x)$ и $f \in F(t,x)$, что выполняется равенство

$$\sigma_t(t,x) + \sigma_x(t,x)(f+u) = 0.$$

Это связано с тем, что в данном случае при доказательстве теоремы 2 для проведения оценки использование леммы 1 не требуется.

5. Заключение

В данной работе была получена оценка множества достижимости скользящих режимов включения (1.2), позволяющая аппроксимировать эти режимы решениями вспомогательной управляемой системы с однозначной правой частью. Вспомогательная система получается из исходной заменой многозначного отображения $F(t,x)$ на его однозначную аппроксимацию $F_\lambda(t,x)$, удовлетворяющую (4.2). Следует отметить, что ни условия теоремы 2, ни ее доказательство не дают способ построения $F_\lambda(t,x)$. Иными словами для практического применения полученного результата могут потребоваться некоторые уточнения и вспомогательные утверждения, необходимые для существования аппроксимации, удовлетворяющей условию AP. Так, например, для того, чтобы воспользоваться аппроксимацией Иосиды, необходимо наложить на отображение $F(t,x)$ одностороннее условие Липшица по x и зафиксировать начальные условия. Некоторые конструктивные и простые аппроксимации для разрывных нелинейностей сигнатурного типа, удовлетворяющие условию (4.2), можно найти в статье [5].

Отметим также, что условия накладываются на многозначные отображения либо на открытом множестве W, содержащем все множество S, либо на $I \times R^n$.

Замечание 2 позволяет ослабить условия на множество W и может быть сформулировано и для теоремы 2. Однако, для сохранения оценки (4.3) необходимо потребовать, чтобы любой скользящий режим, определенный на интервале $[t_0, \tau) \subset I$ мог быть продолжен на отрезок I.

Условия теоремы 2 можно ослабить, потребовав их выполнения только для вспомогательных отображений $\tilde{F}(t,x)$ и $\tilde{U}(t,x)$, таких, что для любых $(t,x) \in S$ имеют место равенства $\tilde{F}(t,x) = F(t,x)$ и $\tilde{U}(t,x) = U(t,x)$. При этом множества скользящих режимов исходной системы (1.2) и системы

$$\dot{x} \in \tilde{F}(t,x) + \tilde{U}(t,x)$$

будут совпадать. Аналогичным образом можно ослабить и условия теоремы 1, однако, в данном случае достаточно потребовать выполнения включения $\tilde{F}(t,x) \subset F(t,x)$ на множестве S.

Список литературы

1. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / В. В. Обуховский, Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис. – М. : КомКнига, 2005. – 265 с.
2. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 224 с.
3. Трубников Ю. В. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями / Ю. В. Трубников, А. И. Перов. – Минск : Наука и техника, 1986. – 150 с.
4. Финогенко И. А. О непрерывных аппроксимациях и правосторонних решениях дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 5. – С.647–655.
5. Сурков А. В. Об аппроксимациях регулируемых систем с разрывными монотонными характеристиками / А. В. Сурков, И. А. Финогенко // Оптимизация, управление, интеллект. – 2004. – Т. 7. – С. 111–123.

D. V. Ponomariov

On sliding modes of differential inclusions

Abstract. In this paper we consider motion of the systems with multivalued right-hand side on the set S on the compact time interval I. Estimation for attainability set of sliding modes was made. We received sufficient conditions for existence of sliding mode of discontinuous systems presented as differential inclusions.

Keywords: differential inclusion; sliding mode; one side Lipschitz conditions; Iosida approximation; attainability set.

Пономарев Денис Викторович, аспирант, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (zmeigo.sc@gmail.com)

Ponomariov Denis, post-graduate student, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 Phone: (3952)242210 (zmeigo.sc@gmail.com)