Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 4. С. 2—15

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 519.854.2

Об одном подходе к робастности решения в задаче о p-медиане *

И. Л. Васильев
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

А. В. Ушаков
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. В работе исследуется один из подходов к определению робастности решения в дискретных задачах размещения на примере задачи о p-медиане. Рассматривается бикритериальная задача размещения p предприятий таким образом, чтобы суммарные затраты на обслуживание всех клиентов были минимальны и к тому же полученное решение имело максимально возможную робастность. Для такой задачи предложен алгоритм на основе метода ε-ограничений, позволяющий найти аппроксимацию множества точек оптимальных по Слейтеру.

Ключевые слова: задача о p-медиане; бикритериальная комбинаторная оптимизация; робастность в дискретных задачах размещения; метод ε-ограничений.

1. Введение

Рассматривается постановка задачи о p-медиане в следующем виде. Пусть дано множество возможных пунктов размещения предприятий $I = \{1, \ldots, m\}$, производящих определенный продукт или услугу; множество клиентов $J = \{1, \ldots, n\}$; величина ω_j, определяющая спрос каждого клиента, а также величина d_{ij}, задающая затраты на доставку одной единицы продукта или однократного оказания услуги из предприятия $i \in I$ клиенту $j \in J$. Задача о p-медиане состоит в поиске таких p мест для открытия предприятий, чтобы суммарные затраты на

* Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 12-01-31198 мол-а, № 12-07-13116-офи_м_РЖД, а также СО РАН в рамках интеграционного проекта № 21

обслуживание всех клиентов были минимальны, т. е.

$$\min_{N \subseteq I} \Big\{ \sum_{j \in J} \omega_j \min_{i \in N} d_{ij} : \ |N| = p \Big\}. \tag{1.1}$$

Отметим, что задача о p-медиане является одной из базовых задач в теории размещения, впервые сформулированной в [6]. Обширный обзор различных подходов и методов ее решения может быть найден в работах [12, 13].

В представленной формулировке задачи о p-медиане вектор спроса клиентов ω предполагается заранее известным, однако на практике часто возникают ситуации, когда неизвестен не только спрос клиента, но и его возможный вероятностный закон распределения. Примером такой ситуации может служить реализация совершенно новых товаров или услуг, для которых просто не существует достоверных данных касательно их спроса. Другим примером может быть размещение предприятий для обслуживания клиентов в течение длительного периода времени, в пределах которого изменение спроса, очевидно, заранее неизвестно.

В настоящей работе исследуется вариант задачи о p-медиане с дополнительным критерием, задающим так называемую робастность решения. Предполагается, что спрос каждого клиента ω_j точно не известен, однако выражен некоторой экспертной оценкой $\widehat{\omega}_j$. Отметим, что при замене вектора спроса его оценками погрешности могут привести к значительному неконтролируемому росту значения целевой функции задачи о p-медиане, поэтому для контролирования затрат на обслуживание клиентов вводится положительная величина τ, ограничивающая максимально возможное значение целевой функции. Заметим, что величину τ можно интерпретировать как бюджет. В этом случае робастностью $\rho(N)$ решения $N \subseteq I$ будем называть минимальное отклонение спроса ω относительно оценок $\widehat{\omega}$, такое что суммарные затраты на обслуживание всех клиентов превысят бюджет τ, т.е.

$$\rho(N) = \min_{\omega \in \mathbb{R}^n_+} \Big\{ \|\omega - \widehat{\omega}\| : \sum_{j \in J} \omega_j \min_{i \in N} d_{ij} > \tau \Big\}, N \subseteq I, |N| = p. \tag{1.2}$$

Одной из первых работ, посвященной исследованию такого определения робастности, была [3], в которой рассматривалась проблема поиска наиболее робастных решений в случае размещения единственного предприятия на плоскости относительно уже существующего множества клиентов. В статье [2] такой подход также был успешно применен к поиску наиболее робастных решений для одного варианта задачи HCCLP (Huff competitive continuous location problem). Для максимизации критерия робастности в работе был разработан метод ветвей и границ, позволяющий гарантированно найти глобальный оптимум в такого рода задачах.

В настоящей статье рассматривается задача поиска робастных решений в задаче о p-медиане с точки зрения описанного выше критерия. Для этой цели формулируется и исследуется бикритериальная задача нелинейного целочисленного программирования, состоящая в размещении p предприятий таким образом, чтобы суммарные затраты на обслуживание всех клиентов были минимальны и решение к тому же имело максимально возможную робастность. В статье предлагается алгоритм поиска аппроксимации множества точек оптимальных по Слейтеру для одного частного случая выбора нормы для подсчета величины отклонения спроса относительно его оценок, основанный на так называемом методе уступок или методе ε-ограничений. Эффективность метода проиллюстрирована с помощью обширного вычислительного эксперимента на известных наборах тестовых задач.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 представлена целочисленная постановка задачи. Раздел 3 посвящен описанию метода решения представленной задачи, а также исследованию его свойств. В последнем разделе 4 приведены результаты вычислительных экспериментов и их анализ.

2. Постановка задачи

Сформулируем задачу о p-медиане в виде задачи целочисленного программирования. Для этого введем бинарные переменные y_i и x_{ij} такие, что y_i принимает значение 1, если предприятие в пункте i открыто, 0 в противном случае, и переменная x_{ij} равна 1, если клиент j обслуживается из предприятия i, 0 в противном случае. В этих обозначениях задача о p-медиане (1.1) может быть представлена следующим образом:

$$\min_{(x,y)} \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} \omega_j d_{ij} x_{ij} \tag{2.1}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1 \qquad j \in J; \tag{2.2}$$

$$x_{ij} \le y_i \qquad i \in I, j \in J; \tag{2.3}$$

$$\sum_{i\in I} y_i = p; \tag{2.4}$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad i \in I; \tag{2.5}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i \in I, j \in J. \tag{2.6}$$

Целевая функция (2.1) минимизирует суммарные затраты на обслуживание спроса всех клиентов. Ограничения (2.2) гарантируют, что каждый клиент j обслуживается только из одного предприятия. Ограничения (2.3) устанавливают, что каждый клиент может быть обслужен только из открытого предприятия. Количество медиан определяется ограничением (2.4). Ограничения (2.5), (2.6) задают условия на целочисленность переменных. Для удобства обозначим задачу о p-медиане как (P), а допустимое множество как $X = \{(x, y) :$ при условии (2.2) – –(2.6)$\}$.

Отметим, что в обозначениях данной постановки определение робастности (1.2) решения (x, y), удовлетворяющего ограничениям (2.2)–(2.6), примет следующий вид:

$$\rho(x,y) = \min_{\omega\in\mathbb{R}^n_+} \Big\{ \|\omega - \widehat{\omega}\| : \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \omega_j d_{ij} x_{ij} > \tau \Big\}.$$

В работе [3] было показано, что в случае, если целевая функция задачи обладает свойством линейности по $\widehat{\omega}$, то робастность любого допустимого решения может быть подсчитана в явном виде

$$\rho(x,y) = \max\left\{0, \frac{\tau - \sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij}x_{ij}}{\|(\sum\limits_{i\in I} d_{ij}x_{ij})\|^\circ}\right\}, \tag{2.7}$$

где $\|\cdot\|^\circ$ обозначает двойственную относительно $\|\cdot\|$ норму.

Таким образом, для поиска решений задачи о p-медиане, обладающих максимальной робастностью, рассматривается следующая бикритериальная нелинейная задача целочисленного программирования

$$\begin{aligned} &\min_{(x,y)} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij}x_{ij} \\ &\max_{(x,y)} \rho(x,y) \\ &\quad (x,y)\in X, \end{aligned} \tag{BP}$$

в которой помимо целевой функции задачи о p-медиане, минимизирующей суммарные затраты на обслуживание клиентов, присутствует дополнительный критерий $\rho(x, y)$, максимизирующий робастность такого решения. Другими словами необходимо так разместить предприятия, чтобы не только минимизировать затраты на обслуживание клиентов, но и обеспечить максимально возможную «устойчивость» решения по отношению к изменениям спроса.

Поскольку в задачах векторной оптимизации редко удается найти решение минимизирущее одновременно все критерии, то обычно происходит поиск некоторого компромисса. Напомним определения оптимальности по Парето и по Слейтеру. Пусть дана задача бикритериальной оптимизации $\min\limits_{x\in D}(f_1(x), f_2(x))$.

Определение 1. *1) Точка $x_p \in D$ называется точкой минимума по Парето на D, если $\nexists \bar{x} \in D$: $f_1(\bar{x}) \le f_1(x_p)$ и $f_2(\bar{x}) \le f_2(x_p)$, где по крайней мере одно из неравенств выполняется строго.*

2) Точка $x_s \in D$ называется точкой минимума по Слейтеру на D, если $\nexists \bar{x} \in D$: $f_1(\bar{x}) < f_1(x_s)$ и $f_2(\bar{x}) < f_2(x_s)$.

Для поиска решений оптимальных по Парето в задачах целочисленного программирования могут быть применены различные техники [5]. Однако, в нашей статье мы сосредоточим свое внимание на подходе основанном на широко известном методе в области многокритериальной оптимизации — методе ε-ограничений или методе уступок, позволяющем находить в общем случае аппроксимацию множества точек оптимальных по Слейтеру в задаче (BP), и показавшем свою эффективность для широкого набора тестовых примеров, что представлено в разделе 4. Подробное описание метода, а также особенностей его реализации для рассматриваемой задачи будет дано в следующем разделе.

3. Алгоритм поиска Парето оптимальных точек

Метод ε-ограничений является широко известным подходом для задач многокритериальной оптимизации. Его основная идея состоит — в случае бикритериальной оптимизации — в минимизации только одного критерия, в то время как другой добавляется в формулировку задачи в качестве ограничения с некоторым параметром ε. Варьируя затем параметр ε и решая серию соответствующих подзадач, можно найти все множество точек оптимальных по Слейтеру или в случае единственности найденных решений — точек оптимальных по Парето.

Метод ограничений является довольно эффективным подходом к поиску Парето оптимальных точек в задачах многокритериального целочисленного программирования и комбинаторной оптимизации и был в частности использован при решении задач оптимального разбиения множества [4], задачи о коммивояжере [9], задачи о назначениях и поиска минимального остовного дерева [8, 10, 11]. В статье [7] предлагается новый улучшенный вариант метода, позволяющий не только ускорить время работы алгоритма, но и усилить метод, избегая поиска решений оптимальных по Слейтеру. Основное внимание в работе [1] уделено применению метода ε-ограничений к задачам комбинаторной оптимизации с условием целочисленности переменных, в частности для задачи о коммивояжере с прибылью, авторами также предложен ряд эвристических процедур улучшения работы метода.

Отметим, что в нашем случае возможны два вариант параметрических подзадач, отличие которых заключается лишь в выборе основного критерия, а именно:

$$\begin{aligned}
&\min_{(x,y)} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \widehat{\omega}_j d_{ij} x_{ij}\\
&\rho(x,y) \geq \varepsilon\\
&(x,y) \in X.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
&\max_{(x,y)} \rho(x,y)\\
&\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \widehat{\omega}_j d_{ij} x_{ij} \leq \varepsilon\\
&(x,y) \in X.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Основной трудностью в поиске решений таких подзадач является тот факт, что функция $\rho(x, y)$ является нелинейной. Однако, для некоторого частного выбора нормы задающей отклонение спроса подзадача (3.1) может быть сведена к задаче целочисленнного линейного программирования. Действительно, наиболее естественным выбором такой нормы является ℓ_∞, задающая максимальное координатное отклонение, тогда двойственной к ней нормой будет ℓ_1. В этом случае подзадача (3.1) может быть переписана в следующем линейном виде

$$\begin{aligned}
&\min_{(x,y)} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \widehat{\omega}_j d_{ij} x_{ij}\\
&\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij} x_{ij} \leq \tau\\
&(x,y) \in X,
\end{aligned} \tag{P_ε}$$

где $c_{ij} = (\widehat{\omega}_j + \varepsilon)\, d_{ij}$. Отметим, что такой переход справедлив только с учетом дополнительного очевидного условия о том, что выбираемый бюджет всегда строго больше оптимального значения в задаче о p-медиане. Обозначим допустимое множество задачи P_ε через $X(\varepsilon)$.

Из теории многокритериальной оптимизации известно, что если для некоторого значения параметра ε задача P_ε является допустимой, то ее решение, если оно единственно, является точкой оптимальной по Парето в задаче (BP), в противном случае точкой оптимальной по Слейтеру. Главной сложностью реализации метода ε-ограничений является выбор правила изменения параметра таким образом, чтобы не пропускать Парето оптимальные решения и в то же время, чтобы каждая итерация метода давала по крайней мере одну эффективную точку. Идея предлагаемой схемы метода предполагает достаточно простое правило варьирование параметра ε, учитывающее специфику рассматриваемой задачи. Пусть $Sol(P)$ является множеством оптимальных решений задачи о p-медиане, P — множеством точек оптимальных по Парето в задаче (BP), а S — множество точек оптимальных по Слейтеру. Тогда следующий алгоритм находит последовательность точек являющихся аппроксимацией множества S в задаче (BP).

0) Инициализация: $(x^0, y^0) \in Sol(P)$, $\varepsilon_0 := \dfrac{\tau - \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij} x_{ij}^0}{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij} x_{ij}^0}$, $k := 0$;

1) $\bar{\varepsilon}_k := \varepsilon_k + \delta$;

2) Решить задачу $(P_{\bar{\varepsilon}_k})$;

3) Если $X(\bar{\varepsilon}_k) = \varnothing$, тогда stop, иначе
$$(x^{k+1}, y^{k+1}) \in Sol(P(\bar{\varepsilon}_k));$$

4) Положить $\varepsilon_{k+1} := \dfrac{\tau - \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij} x_{ij}^{k+1}}{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij} x_{ij}^{k+1}}$, $k := k+1$ и перейти на шаг 1.

Как было отмечено, особенностью представленной реализации метода ε-ограничений является правило изменения шага. Так вместо постепенного увеличение параметра ε_k с каждой итерацией метода, его значение меняется каждый раз при нахождении новой точки Слейтера и присваивается значению ее робастности. Для продолжения работы алгоритма и поиска следующей точки Слейтера ε_k увеличивается на некоторую малую положительную величину δ. Как видно из схемы, в качестве начального значения параметра ε_0 выбирается значение робастности, подсчитанное для оптимального решения задачи о p-медиане, которое в свою очередь является первой из найденных точек Слейтера в задаче (BP). Справедливо следующее утверждение

Предложение 1. *Если $(x^*, y^*) \in Sol(P)$ и $|Sol(P)| = 1$, то $(x^*, y^*) \in P$.*

Доказательство. От противного. Предположим, что $(x^*, y^*) \notin P$, тогда $\exists (x', y') \in X$:
$$\begin{aligned} &\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij} x'_{ij} < \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij} x^*_{ij} \\ &\rho(x', y') > \rho(x^*, y^*) \end{aligned} \tag{3.3}$$

либо

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij} x'_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij} x^*_{ij}\\&\rho(x',y') > \rho(x^*,y^*)\end{aligned} \tag{3.4}$$

либо

$$\begin{aligned}&\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij} x'_{ij} < \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij} x^*_{ij}\\&\rho(x',y') = \rho(x^*,y^*)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Поскольку (3.3), (3.5) противоречат тому факту, что $(x^*, y^*) \in Sol(P)$, а (3.4) — тому что решение задачи о p-медиане единственно, то получаем $(x^*, y^*) \in P$. □

Следствие 1. *Любая точка $(x^*, y^*) \in Sol(P)$ является точкой оптимальной по Слейтеру в задаче (BP).*

Также отметим, что в качестве критерия остановки представленного алгоритма ε-ограничений используется условие того, что допустимое множество задачи $(P_{\bar{\varepsilon}_k})$ для некоторого параметра $\bar{\varepsilon}_k$ пусто. Выполнимость такого критерия гарантируется конечностью множества $X(\bar{\varepsilon}_k)$. Другими словами, если для некоторого значения параметра $\bar{\varepsilon}_k$ множество $X(\bar{\varepsilon}_k)$ пусто, то алгоритм останавливается, поскольку не существует других точек допустимых в задаче (BP), робастность которых превосходила бы $\bar{\varepsilon}_k$. Это свойство сформулировано в виде следующего предложения, доказательство которого очевидно.

Предложение 2. *Если $X(\bar{\varepsilon}_k) = \varnothing$, то $\nexists (x', y') \in X : \rho(x', y') > \bar{\varepsilon}_k$.*

Таким образом последовательность $(x^0, y^0), (x^1, y^1), \ldots, (x^k, y^k)$, получаемая на выходе алгоритма представляет собой аппроксимацию множества решений оптимальных по Слейтеру в задаче (BP).

4. Численный эксперимент

Представленная схема метода ε-ограничений была реализована на языке C++ и протестирована на компьютере с процессором Pentium 4 CPU 3.2GHz и 1.5Gb оперативной памяти. В качестве решателя задач целочисленного программирования использовался CPLEX Optimizer 12.1.0[1]. Тестирование алгоритма производилось на 37 метрических примерах из библиотеки TSP размерностью от 50 до 500, а также на задачах из тестовой библиотеки «Дискретные задачи размещения»[2] размерностью $|I| = |J| = 100$, из классов $Euclidean$, $Uniform$, $PCodes$,

[1] http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/
[2] http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/index.html

$Chess$ и FPP. Для примеров взятых из библиотеки TSP результаты получены при различном выборе числа открываемых предприятий p. В вычислительных экспериментах это число варьировалось от 5 до 50 в зависимости от размера задачи. Бюджет τ задавался трех типов так, чтобы $\tau = 1.05Z^*$, $\tau = 1.1Z^*$, $\tau = 1.3Z^*$, где Z^* — оптимальное значение в задаче о p-медиане. Оценки спроса $\widehat{\omega}_j$ клиентов выбирались двух видов случайным образом с равномерным распределением из интервала от 10 до 100 и от 1000 до 10000. Величина шага δ принималась равной 0.01.

Результаты вычислительного эксперимента для задач из библиотеки TSP представлены в таблицах 3, 4, 5, 6, с использованием следующих обозначений: в столбце p представлено количество медиан для которого производилось тестирование, в столбцах $1, 2, \ldots$ под общим заголовком $|S|$ показано количество примеров в которых было найдено соответствующее количество точек Слейтера при заданном выборе бюджета, т.е. в столбце 1 количество задач в которых найдена одна точка Слейтера, в столбце 2 — две точки и т.д.

Результаты для примеров из библиотеки «Дискретные задачи размещения» собраны в таблицах 1 и 2, где в столбцах с заголовком $\widehat{\omega}$ задан тип оценок спроса клиентов для которых производилось тестирование, остальные обозначения аналогичны упомянутым выше.

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что для подавляющего большинства примеров из библиотеки «Дискретные задачи размещения» была найдена лишь одна точка Слейтера, особенно ярко это выражено при выборе бюджета равного $1.05Z^*$ и $1.1Z^*$, т. е. большего минимально возможного на 5% и 10% соответсвенно. Максимальное количество найденных точек Слейтера в таком случае не превосходит 4 и получено только для одного примера класса *Euclidean* при бюджете $1.1Z^*$. При увеличении бюджета систуация несколько меняется, а именно увеличивается количество задач, в которых были найдены 2 и 3 точки Слейтера. Также для классов *Euclidean* и *Uniform* выявлены в общей сложности 7 задач, в которых найдены 5 и 6 точек оптимальных по Слейтеру.

Для примеров из библиотеки TSP особенно ярко прослеживается тенденция к увеличения количества найденных точек Слейтера с увеличением бюджета τ и оценок спроса клиентов $\widehat{\omega}$. Так максимальное их количество для задач с бюджетом $1.05Z^*$ и $1.1Z^*$ не превосходит 3 и 4 соответственно при $\widehat{\omega}_j \in [10, 100]$, $j \in J$, а также 6 и 10 при $\widehat{\omega}_j \in [1000, 10000]$, в то время как максимальное количество найденных точек Слейтера при бюджете $1.3Z^*$ равно 17 и 19.

Проиллюстрируем некоторые из полученных результатов на графиках. На рисунках 1 и 2 представлены образы найденных точек Слейтера в пространстве критериев для задач $pr144.tsp$ и $kroA100.tsp$ из тестовой библиотеки TSP. По оси абсцисс представлены значения критерия

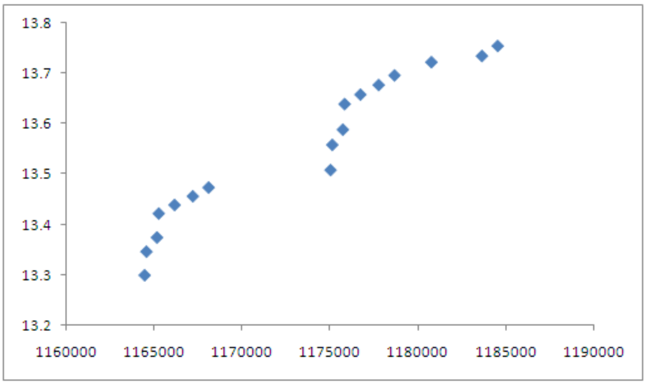

Рис. 1. Образ найденных точек Слейтера в пространстве критериев для задачи pr144.tsp при $p = 30$

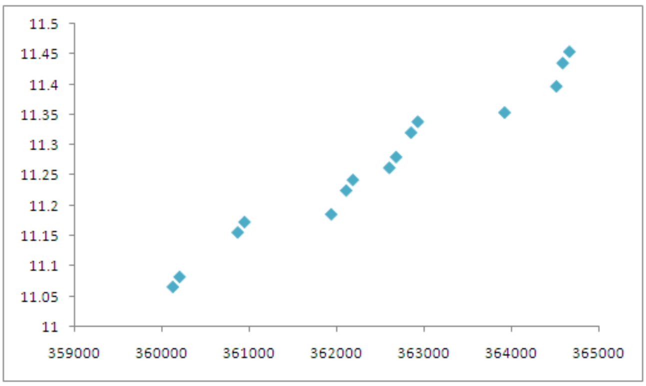

Рис. 2. Образ найденных точек Слейтера в пространстве критериев для задачи KroA100.tsp при $p = 40$

задачи о p-медиане, а по оси ординат критерия робастности решения. Анализируя полученные графики можно заметить, что робастность решения задачи о p-медиане, являющегося первой из найденных точек, отличается от максимально возможной, которой очевидно обладает последняя из полученных точек, не более чем на 0.46 для задачи pr144.tsp и не более чем на 0.39 для задачи kroA100.tsp. Отличия в значениях для критерия задачи о p-медиане между этими точками также составляют не более 3%.

На основании проведенного вычислительного эксперимента можно сделать вывод, что исследуемый подход к робастности решения, а также предложенный метод поиска аппроксимации множества точек Слейтера в полученной бикритериальной задаче, основанный на методе ε-ограничений, показал свою эффективность в случае задачи о p-медиане. Тестирование метода показало хорошие результаты как на метрических тестовых задачах из библиотеки TSP, так и на примерах из библиотеки «Дискретные задачи размещения». Однако открытым вопросом остается применимость и реализуемость такого подхода к определению робастности решения для других дискретных задач размещения, что может быть направлением дальнейших исследований.

Список литературы

1. Bérubé J. F. An exact ε-constraint method for bi-objective combinatorial optimization problems: Application to the Traveling Salesman Problem with Profits / J. F. Bérubé, M. Gendreau, J. Y. Potvin // EJOR. – 2009. – Vol. 194, N 1. – P. 39–50.
2. Blanquero R. Locating a competitive facility in the plane with a robustness criterion / R. Blanquero, E. Carrizosa, E. M. T. Hendrix // EJOR. – 2011. – Vol. 215, N 1. – P. 21–24.
3. Carrizosa E. Robust facility location / E. Carrizosa, S. Nickel // Math. Methods Oper. Res. – 2003. – Vol. 58, N 2. – P. 331–349.
4. Ehrgott M. Bicriteria robustness versus cost optimisation in tour of duty planning at Air New Zealand / M. Ehrgott, D. M. Ryan // Proceedings of the 35th Annual Conference of the Operational Research Society of New Zealand. – 2000. – P. 31–39.
5. Multiple Criteria Optimization: State of the Art Annotated Bibliographic Surveys / eds. M. Ehrgott, X. Gandibleux. – Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2003. – 520 p. – (International Series in Operations Research & Management Science).
6. Hakimi S. L. Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems / S. L. Hakimi // Operations Research. – 1965. – Vol. 13, № 3. – P. 462–475.
7. Mavrotas G. Effective implementation of the ε-constraint method in Multi-Objective Mathematical Programming problems / G. Mavrotas // Applied Mathematics and Computation. – 2009. – Vol. 213, N 2. – P. 455–465.
8. Melamed I. I. A computational investigation of linear parametrization of criteria in multicriteria discrete programming / I. I. Melamed, I. K. Sigal // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1996. – Vol. 36, N 10. – P. 1341–1343.
9. Melamed I. I. The linear convolution of criteria in the bicriteria traveling salesman problem / I. I. Melamed, I. K. Sigal // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1997. – Vol. 37, N 8. – P. 902–905.
10. Melamed I. I. Numerical analysis of tricriteria tree and assignment problems / I. I. Melamed, I. K. Sigal // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 1998. – Vol. 38, N 10. – P. 1704–1707.
11. Melamed I. I. Combinatorial optimization problems with two and three criteria / I. I. Melamed, I. K. Sigal // Doklady Mathematics. – 1999. – Vol. 59, N 3. – P. 490–493.
12. The p-median problem: A survey of metaheuristic approaches / N. Mladenović, J. Brimberg, P. Hansen, J .A. Moreno-Pérez // EJOR. – 2007. – Vol. 179, N 3. – P. 927–939.
13. Reese J. Solution Methods for the p-Median Problem: An Annotated Bibliography / J. Reese // Networks. – 2006. – Vol. 28, N 3. – P. 125–142.

Таблица 1

Результаты для 30 задач из классов *Uniform* и *Euclidean*

	$\lvert S\rvert$												
	Euclidean												
	$\tau = 1.05Z^*$			$\tau = 1.1Z^*$				$\tau = 1.3Z^*$					
$\widehat{\omega}$	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6
$[10, 100]$	27	3	0	22	6	1	1	9	12	5	1	1	2
$[1000, 10000]$	24	4	2	19	10	1	0	9	16	1	1	2	1
	Uniform												
	$\tau = 1.05Z^*$			$\tau = 1.1Z^*$				$\tau = 1.3Z^*$					
$\widehat{\omega}$	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6
$[10, 100]$	28	2	0	24	6	0	0	19	7	2	1	1	0
$[1000, 10000]$	26	4	0	24	6	0	0	18	10	2	0	0	0

Таблица 2

Результаты для 30 задач из классов *Chess, Pcodes, FPP*

	$\lvert S\rvert$						
$\widehat{\omega}$	1	2	1	2	1	2	3
	$\tau = 1.05Z^*$		$\tau = 1.1Z^*$		$\tau = 1.3Z^*$		
	Chess						
$[10, 100]$	28	2	28	2	26	4	0
$[1000, 10000]$	30	0	29	1	22	7	1
	PCodes						
$[10, 100]$	30	0	29	1	26	3	1
$[1000, 10000]$	29	1	28	2	26	3	1
	FPP						
$[10, 100]$	30	0	28	2	25	5	0
$[1000, 10000]$	29	1	28	2	25	5	0

Таблица 3

Результаты для задач из библиотеки TSP с оценками спроса из интервала [10, 100]

	$\lvert S\rvert$						
	$\tau = 1.05Z^*$			$\tau = 1.1Z^*$			
p	1	2	3	1	2	3	4
5	34	2	1	31	5	1	0
10	34	3	0	33	4	0	0
15	32	5	0	27	9	1	0
20	29	8	0	22	14	1	0
30	30	1	0	21	9	0	1
40	24	6	1	16	11	2	2
50	28	3	0	20	8	2	1

Таблица 4

Результаты для задач из библиотеки TSP с оценками спроса из интервала [10, 100]

	$\|S\|$												
	$\tau = 1.3Z^*$												
p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	17
5	22	12	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	17	13	4	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
15	10	16	3	5	1	0	2	0	0	0	0	0	0
20	8	11	7	5	4	1	0	1	0	0	0	0	0
30	6	3	8	4	4	3	1	0	1	0	0	0	1
40	2	5	4	5	2	1	3	4	1	1	1	2	0
50	1	5	6	5	5	1	3	2	1	1	0	1	0

Таблица 5

Результаты для задач из библиотеки TSP с оценками спроса из интервала [1000, 10000]

	$\|S\|$													
	$\tau = 1.05Z^*$						$\tau = 1.1Z^*$							
p	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	10
5	32	5	0	0	0	0	31	6	0	0	0	0	0	0
10	29	8	0	0	0	0	21	15	0	1	0	0	0	0
15	26	10	1	0	0	0	18	11	3	3	2	0	0	0
20	28	8	1	0	0	0	15	16	3	2	0	0	1	0
30	18	10	1	1	0	1	12	7	6	2	1	0	2	1
40	19	8	3	1	0	0	10	8	7	2	3	0	1	0
50	19	10	0	0	1	1	9	12	1	3	4	1	1	0

Таблица 6

Результаты для задач из библиотеки TSP с оценками спроса из интервала [1000, 10000]

	$\|S\|$																
	$\tau = 1.3Z^*$																
p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	18	19
5	23	13	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	13	13	3	3	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	6	11	6	6	4	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
20	4	10	5	8	2	3	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
30	4	5	4	2	2	5	2	4	0	1	0	1	1	0	0	0	0
40	0	1	7	3	4	3	3	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0
50	2	2	3	6	6	2	0	1	3	0	2	0	0	1	1	1	1

I. L. Vasilyev, A. V. Ushakov

On an approach to the robustness in the case of the p-median problem

Abstract. In this paper we study an approach to the robustness of discrete facility location problems by the example of the p-median problem. For that purpose a bicriteria facility location problem of p points of service in order to minimize the total cost of satisfying the demands of all clients and to maximize the robustness of obtained solutions is considered. An algorithm of finding an approximation of the weak Pareto solution set based on the ε-constraint method has been proposed.

Keywords: discrete facility location, robustness, bi-objective combinatorial optimization, p-median problem, ε-constraint method.

Васильев Игорь Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134 тел.: (3952)453106 (`vil@icc.ru`)

Ушаков Антон Владимирович, программист, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134 тел.: (3952)453106 (`aushakov@icc.ru`)

Vasilyev Igor, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 134, Lermontov St., Irkutsk, 664033 Ph.D., docent, Phone: (3952)453106 (`vil@icc.ru`)

Ushakov Anton, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 134, Lermontov St., Irkutsk, 664033 programmer, Phone: (3952)453106 (`aushakov@icc.ru`)