Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 3. С. 110—115

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК УДК 512.56

Неявные $\overline{\mathcal{K}}$-многообразия

А. Г. Пинус
Новосибирский государственный технический университет

Аннотация. На основе понятия неявной операции формулируются понятия неявного тождества, неявного $\overline{\mathcal{K}}$-многообразия. Приводится характеризация неявных $\overline{\mathcal{K}}$-многообразий.

Ключевые слова: неявные операции, тождества, многообразия.

Понятие неявной операции на классе $\mathcal{K}$ универсальных алгебр, как операции, коммутирующей со всеми гомоморфизмами $\mathcal{K}$-алгебр друг в друга, восходит к работе Эйленберга и Шутценберже [3] о псевдомногообразиях полугрупп. Дальнейшее рассмотрение неявных операций на классах универсальных алгебр предпринято, в частности, в работе автора [1].

В настоящей работе введено естественное понятие неявного тождества и, на основе последнего, предложено к рассмотрению понятие неявного $\overline{\mathcal{K}}$-многообразия универсальных алгебр. Найдено описание неявных $\overline{\mathcal{K}}$-многообразий как классов алгебр, замкнутых относительно некоторых операторов.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый абстрактный класс универсальных алгебр замкнутый относительно подалгебр и пусть $\overline{\mathcal{K}}$ — категория, объектами которой являются $\mathcal{K}$-алгебры, а морфизмами — любые гомоморфизмы одних $\mathcal{K}$-алгебр в другие. Под $\overline{\mathcal{K}}$-*неявной операцией* имеется в виду система функций $g_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n)$, определенных на основных множествах A $\mathcal{K}$-алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, коммутирующая со всеми морфизмами категории $\overline{\mathcal{K}}$, т. е. такая, что для любого гомоморфизма φ $\mathcal{K}$-алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{K}$-алгебру $\mathfrak{B}$ и любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathfrak{A}$

$$\varphi(g_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = g_{\mathfrak{B}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)).$$

Под $\overline{\mathcal{K}}$-*неявным тождеством* имеется в виду формальное равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$, где f и g — $\overline{\mathcal{K}}$-неявные операции. $\overline{\mathcal{K}}$-неявное тождество $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ истинно на алгебре

$\mathfrak{A}$, если
$$\mathfrak{A} \models \forall x_1, \ldots, x_n (f_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n) = g_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Под неявным $\overline{\mathcal{K}}$-*многообразием* будем понимать любой подкласс класса $\mathcal{K}$, состоящий из $\mathcal{K}$-алгебр, на которых истинна некоторая система $\overline{\mathcal{K}}$-неявных тождеств.

Очевидным образом любое неявное $\overline{\mathcal{K}}$-многообразие замкнуто относительно подалгебр и гомоморфных образов $\mathcal{K}$-алгебр внутри класса $\mathcal{K}$.

Прямой спектр $\mathcal{K}$-алгебр $\langle \mathfrak{A}_i, \varphi_{ij}, \langle I; \leqslant \rangle \rangle$ назовем $\overline{\mathcal{K}}$-*спектром вложимости*, если все гомоморфизмы φ_{ij} являются изоморфными вложениями. Любая $\mathcal{K}$-алгебра $\mathfrak{A}$ является, очевидным образом, прямым пределом прямого $\overline{\mathcal{K}}$-спектра вложимости ее конечно порожденных подалгебр.

Очевидно, что любое неявное $\overline{\mathcal{K}}$-многообразие замкнуто относительно прямых пределов прямых $\overline{\mathcal{K}}$-спектров вложимости.

Заметим теперь, что любое неявное $\overline{\mathcal{K}}$-многообразие замкнуто относительно прямых произведений, входящих в $\mathcal{K}$. Прежде всего, при этом, укажем на естественное синтаксическое определение $\overline{\mathcal{K}}$-неявных операций как бесконечных позитивно-условных термов (подробнее, см. [2]). Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая $\overline{\mathcal{K}}$-неявная операция на классе $\mathcal{K}$.

Так как класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно подалгебр, то для любой $\mathcal{K}$-алгебры $\mathfrak{A}$ и любых ее элементов $a_1, \ldots, a_n$ имеет место включение
$$f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}},$$
здесь $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная элементами $a_1, \ldots, a_n$. Для любой $\mathcal{K}$-алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и ее элементов $\overline{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ через $D^{+}_{\overline{a}}(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим позитивную диаграмму кортежа $\overline{a}$ в алгебре $\mathfrak{A}$, т.е. конъюнкцию всех равенств вида $t'(\overline{x}) = t''(\overline{x})$, истинных на элементах $\overline{a}$ в алгебре $\mathfrak{A}$. Здесь $t'(\overline{x})$, $t''(\overline{x})$ — произвольные термы сигнатуры σ. Таким образом, для любой алгебры $\mathfrak{B}$ и любых ее элементов $\overline{b} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$:
$$\mathfrak{B} \models D^{+}_{\overline{a}}(b_1, \ldots, b_n)$$
тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм φ алгебры $\langle \overline{a} \rangle_{\mathfrak{A}}$ в алгебру $\mathfrak{B}$ такой, что $\varphi(a_i) = b_i$.

Так как для любой $\mathcal{K}$-алгебры $\mathfrak{A}$ и любых ее элементов $a_1, \ldots, a_n$ имеет место включение $f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathfrak{A}}$, то существует терм $t^{f}_{\overline{a}}(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ такой, что $f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = t^{f}_{\overline{a}}(a_1, \ldots, a_n)$.

Тем самым, в силу замеченного выше о позитивных диаграммах кортежей элементов $\mathcal{K}$-алгебр и коммутируемости неявных и термальных операций с гомоморфизмами $\mathcal{K}$-алгебр, для любых $\mathcal{K}$-алгебры $\mathfrak{A}$ и ее элементов $a_1, \ldots, a_n, b$
$$f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = b \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \Phi^{+}_{f}(a_1, \ldots, a_n, b).$$

Здесь $\Phi_f^+(x_1, \ldots, x_n, y)$ — следующая $L_{\infty,\omega}$-формула

$$\Phi_f^+(x_1, \ldots, x_n, y) = \bigvee_{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}, \overline{a} \in \mathfrak{A}} \Big[D_{\overline{a}}^+(x_1, \ldots, x_n) \to y = t_{\overline{a}}^f(x_1, \ldots, x_n) \Big]$$

и пара $\langle \mathfrak{A}, \overline{a} \rangle$ пробегает по всем типам изоморфизма n-порожденных $\mathcal{K}$-алгебр с выделенными n-порождающими $\overline{a}$.

Пусть теперь $f(\overline{x}), g(\overline{x})$ — $\overline{\mathcal{K}}$-неявные операции. Через $\Phi_{f,g}(x_1, \ldots, x_n)$ обозначим $L_{\infty,\omega}$-формулу

$$\Phi_{f,g}(x_1, \ldots, x_n) = \forall \overline{x} \Big(\underset{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}, \overline{a} \in \mathfrak{A}}{\&} D_{\overline{a}}^+(\overline{x}) \to t_{\overline{a}}^f(\overline{x}) = t_{\overline{a}}^g(\overline{x}) \Big).$$

Очевидно, что для любой $\mathcal{K}$-алгебры $\mathfrak{A}$ и любых ее элементов $\overline{a}$

$$\mathfrak{A} \models f(\overline{a}) = g(\overline{a}) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \Phi_{f,g}(\overline{a}).$$

Отсюда, без труда замечается, что если на $\mathcal{K}$-алгебрах $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ истинно $\overline{\mathcal{K}}$-неявное тождество $f = g$, то это же $\overline{\mathcal{K}}$-неявное тождество будет истинно и на алгебре $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, если последняя входит в $\mathcal{K}$.

Тем самым, действительно, любое неявное $\overline{\mathcal{K}}$-многообразие замкнуто относительно прямых произведений в классе $\mathcal{K}$.

Верно и обратное, т. е. имеет место следующая характеризация неявных $\overline{\mathcal{K}}$-многообразий.

Класс $\mathcal{K}$ универсальных алгебр назовем замкнутым относительно подпрямых сомножителей, если для любой $\mathcal{K}$-алгебры $\mathfrak{A}$ существуют подпрямо неразложимые $\mathcal{K}$-алгебры $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ такие, что алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна подпрямому произведению алгебр $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$.

ТЕОРЕМА. Подкласс $\mathcal{K}_1$ абстрактного, замкнутого относительно подалгебр и подпрямых сомножителей класса $\mathcal{K}$ универсальных алгебр является неявным $\overline{\mathcal{K}}$-многообразием тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}_1$ замкнут относительно подалгебр, прямых произведений, гомоморфных образов и прямых пределов $\overline{\mathcal{K}}$-прямых спектров вложимости в классе $\mathcal{K}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}_1$ — подкласс класса $\mathcal{K}$, замкнутый относительно указанных в формулировке теоремы операторов. Пусть $\mathcal{K}_1'$ — наименьшее неявное $\overline{\mathcal{K}}$-многообразие, включающее в себя класс $\mathcal{K}_1$. Покажем, что $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_1'$.

Пусть $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_1'$. Докажем, что $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_1$. Так как $\mathcal{K}_1$ замкнут относительно прямых пределов $\overline{\mathcal{K}}$-прямых спектров вложимости и $\mathfrak{A}$ есть прямой предел $\overline{\mathcal{K}}$-прямого спектра вложимости своих конечно порожденных подалгебр, то можно считать, что $\mathfrak{A}$ порождается конечным числом своих элементов $a_1, \ldots, a_n$.

Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ есть подпрямое произведение подпрямо неразложимых $\mathcal{K}$-алгебр $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ и $\mathfrak{A} \subseteq \prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$. Для $b \in \mathfrak{A}$ пусть b^i — i-ая координата элемента b из $\prod\limits_{i\in I}\mathfrak{A}_i$. Таким образом, алгебры $\mathfrak{A}_i$ порождены элементами $a_1^i,\ldots,a_n^i$. Пусть монолит алгебры $\mathfrak{A}_i$ есть главная конгруэнция этой алгебры, порожденная парой элементов $t_i^1(a_1^i,\ldots,a_n^i)$ и $t_i^2(a_1^i,\ldots,a_n^i)$. Пусть $\overline{a}^i=\langle a_1^i,\ldots,a_n^i\rangle$. Тогда $\mathfrak{A}_i\models\exists\overline{x}\big(D^+_{\overline{a}^i}(\overline{x})\,\&\,t_i^1(\overline{x})\neq t_i^2(\overline{x})\big)$ для любого $i\in I$. Покажем, что существуют $\mathcal{K}_1$-алгебры $\mathfrak{B}_i$ такие, что

$$\mathfrak{B}_i\models\exists\overline{x}\big(D^+_{\overline{a}^i}(\overline{x})\,\&\,t_i^1(\overline{x})\neq t_i^2(\overline{x})\big).$$

В противном случае для некоторого $i_0\in I$

$$\mathcal{K}_1\models\forall\overline{x}\big(D^+_{\overline{a}^{i_0}}(\overline{x})\to t_{i_0}^1(\overline{x})=t_{i_0}^2(\overline{x})\big).$$

Рассмотрим $\overline{\mathcal{K}}$-неявные операции $f(\overline{x})$ и $g(\overline{x})$, определенные на $\mathcal{K}$ следующим образом: $f(\overline{x})$ — термальная операция на $\mathcal{K}$, определенная термом $t_{i_0}^1(\overline{x})$. Операция же $g(\overline{x})$ определена на $\mathcal{K}$ следующим образом: если элементы $\overline{b}$ $\mathcal{K}$-алгебры $\mathfrak{B}$ удовлетворяют формуле $D^+_{\overline{a}^{i_0}}$ (т. е. существует гомоморфизм φ алгебры $\mathfrak{A}_{i_0}$ на алгебру $\langle\overline{b}\rangle_{\mathfrak{B}}$ такой, что $\varphi(a_j^{i_0})=b_j$), то $g_{\mathfrak{B}}(\overline{b})=t_{i_0}^2(\overline{b})$. Если же элементы $\overline{b}$ $\mathcal{K}$-алгебры $\mathfrak{B}$ не удовлетворяют формуле $D^+_{\overline{a}^{i_0}}(\overline{x})$, то полагаем $g_{\mathfrak{B}}(\overline{b})=t_{i_0}^1(\overline{b})$.

Покажем, что подобным образом определенная операция $g(\overline{x})$ является $\overline{\mathcal{K}}$-неявной, т. е. она коммутирует с гомоморфизмами одних $\mathcal{K}$-алгебр в другие. Действительно, пусть φ — некоторый гомоморфизм $\mathcal{K}$-алгебры $\mathfrak{B}$ в $\mathcal{K}$-алгебру $\mathfrak{L}$ и $b_1,\ldots,b_n\in\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{B}\models D^+_{\overline{a}^{i_0}}(\overline{b})$, то $g_{\mathfrak{B}}(\overline{b})=t_{i_0}^2(\overline{b})$, $\mathfrak{L}\models D^+_{\overline{a}^{i_0}}(\varphi(\overline{b}))$, $g_{\mathfrak{L}}(\varphi(\overline{b}))=t_{i_0}^2(\varphi(\overline{b}))$ и равенство $\varphi(g_{\mathfrak{B}}(\overline{b}))=g_{\mathfrak{L}}(\varphi(\overline{b}))$ очевидно. Если же $\mathfrak{B}\not\models D^+_{\overline{a}^{i_0}}(\overline{b})$, то $g_{\mathfrak{B}}(\overline{b})=t_{i_0}^1(\overline{b})$. Если, при этом, $\mathfrak{L}\not\models D^+_{\overline{a}^{i_0}}(\varphi(\overline{b}))$, то $g_{\mathfrak{L}}(\varphi(\overline{b}))=t_{i_0}^1(\varphi(\overline{b}))$, и опять же равенство $\varphi(g_{\mathfrak{B}}(\overline{b}))=g_{\mathfrak{L}}(\varphi(\overline{b}))$ имеет место. В противном случае, когда $\mathfrak{L}\models D^+_{\overline{a}^{i_0}}(\varphi(\overline{b}))$ и $g_{\mathfrak{L}}(\varphi(\overline{b}))=t_{i_0}^2(\varphi(\overline{b}))$, то φ является собственным гомоморфизмом (не вложением) алгебры $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{L}$ и, значит, $\langle t_{i_0}^1(\overline{b}),t_{i_0}^2(\overline{b})\rangle\in\ker\varphi$. Тем самым $\varphi(g_{\mathfrak{B}}(\overline{b}))=\varphi(t_{i_0}^1(\overline{b}))=\varphi(t_{i_0}^2(\overline{b}))=t_{i_0}^2(\varphi(\overline{b}))=g_{\mathfrak{L}}(\varphi(\overline{b}))$ и коммутируемость операции g с $\overline{\mathcal{K}}$-морфизмами доказана. Тем самым $f(\overline{x})$ и $g(\overline{x})$ — неявные операции на $\mathcal{K}$.

В силу предположенного выше $\mathcal{K}_1\models f(\overline{x})=g(\overline{x})$. Но тогда $\mathfrak{A}\models f(\overline{x})=g(\overline{x})$ и $\mathfrak{A}_{i_0}\models f(\overline{x})=g(\overline{x})$ в противоречии с определением f, g и с тем, что

$$\mathfrak{A}_{i_0}\models\exists\overline{x}\big(D^+_{\overline{a}^{i_0}}(\overline{x})\,\&\,t_{i_0}^1(\overline{x})\neq t_{i_0}^2(\overline{x})\big).$$

Таким образом, действительно, для любого $i\in I$ найдется алгебра $\mathfrak{B}_i\in\mathcal{K}_1$ такая, что

$$\mathfrak{B}_i\models\exists\overline{x}\big(D^+_{\overline{a}^i}(\overline{x})\,\&\,t_i^1(\overline{x})\neq t_i^2(\overline{x})\big)$$

и, т. к. главная конгруэнция, порожденная парой $\langle t_i^1(\overline{a}^i),t_i^2(\overline{a}^i)\rangle$, есть монолит алгебры $\mathfrak{A}_i$, то алгебры $\mathfrak{A}_i$ изоморфно вложимы в алгебры

$\mathfrak{B}_i$ для любого $i \in I$. Тем самым, алгебра $\mathfrak{A}$ (подпрямое произведение алгебр $\mathfrak{A}_i$) изоморфно вложима в $\mathcal{K}_1$-алгебру $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{B}_i$. Замкнутость же $\mathcal{K}_1$ относительно подалгебр и изоморфизмов влечет включение $\mathfrak{A}$ в класс $\mathcal{K}_1$. То есть $\mathcal{K}_1' = \mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_1$ является неявным $\overline{\mathcal{K}}$-многообразием, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

В качестве примера класса $\mathcal{K}$, удовлетворяющего условиям теоремы, и класса $\mathcal{K}_1$, являющегося неявным $\overline{\mathcal{K}}$-многообразием, но не являющегося пересечением $\mathcal{K}$ ни с каким многообразием, укажем следующий. Пусть $\mathcal{K}$ — класс унаров конечного порядка, т. е. класс универсальных алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ сигнатуры $\sigma = \langle f(x) \rangle$ со свойством: для любого $a \in \mathfrak{A}$ существует натуральное n такое, что $f^{n+1}(a) = f^n(a)$. Здесь $f^{m+1}(a) = f(f^m(a))$ и $f^1(a) = f(a)$. Очевидно, что $\mathcal{K}$ замкнут относительно подалгебр и подпрямых сомножителей. Пусть $\mathcal{K}_1$ — класс связных $\mathcal{K}$-алгебр, т. е. класс $\mathcal{K}$-алгебр $\mathfrak{A}$, удовлетворяющих условию: для любых $a, b \in \mathfrak{A}$ существуют натуральные n, m такие, что $f^n(a) = f^m(b)$. Корнем элемента a $\mathcal{K}$-алгебры $\mathfrak{A}$ назовем элемент $f^n(a)$ такой, что $f^{n+1}(a) = f^n(a)$. Без труда замечается, что операция $g(x)$ на классе $\mathcal{K}$ такая, что для $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ и $a \in \mathfrak{A}$ $g(a)$ есть корень элемента a, является $\overline{\mathcal{K}}$-неявной операцией и $\mathcal{K}_1$ выделяется в $\mathcal{K}$ $\overline{\mathcal{K}}$-неявным тождеством $g(x) = g(y)$. Без труда замечается так же, что $\mathcal{K}_1$ не выделяется в $\mathcal{K}$ никакой системой тождеств сигнатуры σ. Действительно, очевидно, что никакое тождество вида $f^n(x) = f^m(x)$ не выделяет в $\mathcal{K}$ класс $\mathcal{K}_1$ (существуют $\mathcal{K}_1$-алгебры, на которых это тождество ложно). То же самое имеет место и для тождеств вида $f^n(x) = f^m(y)$. То есть, $\mathcal{K}_1$ — неявное $\overline{\mathcal{K}}$-многообразие, не являющееся пересечением класса $\mathcal{K}$ ни с каким многообразием сигнатуры σ.

Список литературы

1. Пинус А. Г. Неявные операции над категориями универсальных алгебр / А. Г. Пинус // Сиб. мат. журн. – 2009. – Т. 50, № 1. – С. 146–153.
2. Пинус А. Г. Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений / А. Г. Пинус // Успехи мат. наук. – 2001. – Т. 56, № 4. – С. 35–72.
3. Eilenberg S. On pseudovarieties / S. Eilenberg, M. P. Schutzenberger // Adv. Math. – 1976. – Vol. 19, N 3. – P. 413–418.

A. G. Pinus

Implicit $\overline{\mathcal{K}}$-varieties

Abstract. On the basis of concept of implicit operation it is given the concepts of implicit identity, implicit $\overline{\mathcal{K}}$-variety. It is given some characterization of implicit $\overline{\mathcal{K}}$-varieties.

Keywords: implicit operations, identities, varieties.

Пинус Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, Новосибирский государственный технический университет, 630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел.: (383) 346-11-66 (ag.pinus@gmail.com)

Pinus Alexandr, professor, Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marks St., Novosibirsk, 630092, Phone: (383)3461166 (ag.pinus@gmail.com)