Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 3. С. 116—123

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.988.67

Униформизация и последовательные приближения решений нелинейных уравнений с векторным параметром *

Р. Ю. Леонтьев
Иркутский государственный университет

Н. А. Сидоров
Иркутский государственный университет

Аннотация. Рассматривается нелинейное операторное уравнение с линейным фредгольмовым оператором в главной части, зависящее от малого векторного параметра. Общая теорема существования разветвляющихся решений, доказанная в работе, применена для решения одной краевой задачи о малых изгибах сжатого стержня, лежащего на упругом основании.

Ключевые слова: ветвление решений; фредгольмов оператор; асимптотики; последовательные приближения; краевая задача.

80-летию дорогого учителя Владилена Алексанровича Треногина посвящается

Введение

Пусть X, Y – банаховы пространства, Λ – линейное нормированное пространство. Рассматривается нелинейное уравнение

$$Bu = F(u, \alpha(\lambda), \beta(\lambda)), \tag{0.1}$$

где $F(u,\alpha,\beta) = F_N(u,\alpha,\beta) + R(u,\alpha,\beta)$, $F_N = \sum\limits_{i+k+j=1}^{N} F_{ikj}(u)\alpha^k\beta^j$, $F_{100} = 0$. Замкнутый фредгольмов оператор B действует из X в Y и

* Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы". Госконтракт № 696 от 20.09.2010

имеет плотную область определения в X. Предполагается, что $\{\varphi_i\}_1^n$ – базис в $N(B)$, $\{\psi_i\}_1^n$ – базис в дефектном подпространстве $N^*(B)$, F_{ikj}– i – степенные операторы. Оператор R непрерывен, дифференцируем по u в смысле Фреше и удолетворяет оценке $R(u,\alpha,\beta) = O((\|u\| + |\alpha| + |\beta|)^{N+1})$, $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ – непрерывные функционалы, определенные на открытом множестве $\Omega \subset \Lambda$, $0 \in \partial\Omega$, $\alpha(0) = \beta(0) = 0$. Область Ω далее называется секториальной окрестностью нуля.

Целью работы, продолжающей исследования [1–5], является построение асимптотических последовательных приближений непрерывных решений $u(\lambda) \to 0$ при $\Omega \ni \lambda \to 0$.

Ветвлению решений нелинейных уравнений со скалярным параметром посвящена обширная литература. Но случай векторного параметра, часто встречающийся в приложениях, изучен недостаточно. Особый интерес при этом представляет разработка схем униформизации ветвей решений и последовательные приближения.

В работах [1–4] в секториальных окрестностях нуля последовательными приближениями строились ветви малых решений с максимальным порядком малости. В этой работе на основе результатов работы [7] предложен метод последовательных приближений, позволяющий в секториальных окрестностях строить решения с различными порядками малости уравнений с векторным параметром. В основе метода лежат результаты аналитической теории решений нелинейных уравнений [9, гл. 9].

1. Униформизация ветвей и последовательные приближения

Пусть выполнено условие

A. Существуют $\nu = r/s$, $\Theta = (r+m)/s$, где r, s, m – натуральные числа, такие что

$$F_N(\alpha^\nu V, \alpha, 0) = \alpha^\Theta \sum_{i\nu+k=\Theta} F_{ik0}(V) + r(V,\alpha), \tag{1.1}$$

где $\|r(V,\alpha)\| = o(\alpha^\Theta)$, $\Theta \le N$.

В конкретных случаях числа r, s, m легко вычислить, нанеся на координатную плоскость целочисленные точки (i,k), отвечающие ненулевым членам F_{ik0} и построив соответствующую диаграмму Ньютона. Искомое ν полагается равным $\operatorname{tg}\gamma$, где γ – угол наклона одного из отрезков диаграммы с отрицательным направлением оси i. Соответствующее Θ будет равно ординате точки пересечения этого отрезка с осью k.

Так как диаграмма может иметь несколько отрезков, то выбор чисел r, s, m в представлении (1.1) может оказаться неоднозначным.

Пусть в окрестности точки $u = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ выполнена оценка Липшица

B.
$$\|F(u,\alpha,\beta)-F(u,\alpha,0)\| \le L(\|u\|,|\alpha|,|\beta|)|\beta|,$$
где $L(\|u\|,|\alpha|,|\beta|) = O((\|u\|+|\alpha|+|\beta|)^l)$, $l \ge 0$.

Пусть функционал $\beta(\lambda)$ в секториальной окрестности Ω удовлетворяет при $\Omega \ni \lambda \to 0$ оценке
C.
$$\beta(\lambda) = o(\alpha(\lambda)^{\Theta})$$

Замечание 1. Если в условии **B** $l \ge (r+m)\max(1/r,1/s)$, то условие **C** можно заменить на более слабое условие $\beta(\lambda) = o(\alpha(\lambda)^{\Theta/(1+l)})$.

То есть в этом случае $\beta(\lambda)$ может быть в области Ω бесконечно малой более низкого порядка, чем требуется в условии **C**.

Пусть кроме того
D. Система алгеброических уравнений
$$l_j(c) \equiv \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F_{ik0}(c\varphi), \psi_j \right\rangle = 0, \tag{1.2}$$
где $j=\overline{1,n}$, $c\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$, имеет простое решение c^*.

Введем регуляризатор В. А. Треногина [9, с. 221]
$$\Gamma = \left(B + \sum_{i=1}^{n} < \cdot, \gamma_i > z_i\right)^{-1},$$
где $< \varphi_i, \gamma_k >= \delta_{ik}$, $< z_i, \psi_k >= \delta_{ik}$.

Предполагая далее выполнение условий **A-D** будем для построения в области Ω искомых малых решений уравнения (0.1) использовать униформизацию
$$u = \Gamma V + c(\lambda)\varphi\alpha(\lambda)^{\nu}, \tag{1.3}$$
где $c(0) = c^*$. Неизвестная функция $V(\lambda)$ удовлетворяет равенствам
$$< V, \psi_i >= 0,\ i = \overline{1,n}$$
и оценке $\|V(\lambda)\| = o(\alpha(\lambda)^{\nu})$ при $\Omega \ni \lambda \to 0$.

С помощью замены (1.3) уравнение (0.1) приводится к виду
$$V = F(\Gamma V + c\varphi\alpha^{\nu}, \alpha, \beta). \tag{1.4}$$
Дополним его равенствами
$$\alpha^{-\Theta}\left\langle F(\Gamma V + c\varphi\alpha^{\nu}, \alpha, \beta), \psi_j\right\rangle = 0, \tag{1.5}$$
$j = \overline{1,n}$.

Таким образом, задача построения ветви вида (1.3) свелась к отысканию функций $V(\lambda)$ и $c(\lambda) = (c_1(\lambda), .., c_n(\lambda))'$ из системы (1.4), (1.5).

Будем искать при $\Omega \ni \lambda \to 0$ функции $c(\lambda) \to c^*$ и $V(\lambda) \to 0$ с порядком $\|V(\lambda)\| = o(\alpha^\nu)$.

Систему (1.4), (1.5) рассмотрим как одно операторное уравнение

$$\Phi(W, \lambda) = 0 \tag{1.6}$$

относительно абстрактной функции $W = (V(\lambda), c(\lambda))$ из прямой суммы $Y \oplus R^n$.

Введем банахово пространство E элементов W, зависящих от параметра λ с нормой

$$\|w\| = \max_{\lambda \in \overline{\Omega}_1} (\|V(\lambda)\|_Y + |c(\lambda)|_{R^n}),$$

где Ω_1 секториальная окрестность точки $\lambda = 0$, $\Omega_1 \subset \Omega$, $0 \in \overline{\Omega}_1$. Тогда нелинейное отображение Φ, зависящее от λ из Ω_1, будет действовать из E в E. В силу выбора чисел r, s, m и выше указанных асимптотических согласований поведения функционалов $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ (см. условие **C**), оператор Φ будет непрерывен по W и λ при $\lambda \in \Omega_1$ в окрестности точки $W_0 = (0, c^*)$.

Более того,

$$\lim_{W \to W_0} \Phi(W, \lambda) = 0, \ \ \Omega \ni \lambda \to 0$$

Оператор Φ имеет непрерывную производную Фреше по W при $\lambda \in \Omega$ в окрестности точки W_0. При этом

$$\Phi_W(W_0, 0) = \begin{bmatrix} I, & 0 \\ l, & \mathcal{A} \end{bmatrix}$$

Здесь I – тождественный оператор из Y в Y, 0 – нулевой оператор из R^n в Y, $l = (l_1, .., l_n)'$,

$$l_j = \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F'_{ik}(c^*\varphi)\Gamma\cdot, \psi_j \right\rangle, \ \ j = \overline{1, n} \ \ -$$

– линейный функционал, определенный на Y,

$$\mathcal{A} = \left\langle \sum_{ir+ks=r+m} F'_{ik}(c^*\varphi)\varphi_l, \psi_j \right\rangle \Bigg|_{l,j=\overline{1,n}} -$$

– матрица $n \times n$.

Так как в силу простоты корня c^* матрица $\mathcal{A}$ обратима, то очевидно, линейный ограниченный оператор $\Phi_W(W_0, 0) \in \mathcal{L}(E \to E)$ и имеет ограниченный обратный

$$[\Phi_W(W_0, 0)]^{-1} = \begin{bmatrix} I, & 0 \\ -\mathcal{A}^{-1}l, & \mathcal{A}^{-1} \end{bmatrix}$$

Таким образом, при $\lambda \in \Omega$ операторное уравнение (1.6) в окрестности точки W_0 удовлетворяет условиям теоремы о неявном операторе [9, с. 411]. Поэтому существует область $\Omega_1 \subset \Omega$, $0 \in \partial\Omega$ такая, что искомое непрерывное решение $W \to (0, c^*)$ при $\Omega_1 \ni \lambda \to 0$ можно найти последовательными приближениями

$$W_n = W_{n-1} - [\Phi_W(W_0, 0)]^{-1}\Phi(W_{n-1}, \lambda),$$

где $W_0 = (0, c^*)$, $W_n = (V_n(\lambda), c_n(\lambda))$, $\|V_n(\lambda)\| = o(\alpha^\nu)$, $n = 1, 2, \ldots$

Из изложенного вытекает

Теорема 1. *Пусть выполнены условия **A-D***

Тогда существует открытая область $\Omega_1 \subset \Omega$ такая, что $0 \in \partial\Omega_1$ и при $\lambda \in \Omega_1$ уравнение (0.1) имеет непрерывное решение

$$u(\lambda) = \alpha(\lambda)^\nu (c^*\varphi + r(\lambda)), \tag{1.7}$$

где c^* – простой корень алгеброической системы (1.2), функция $r(\lambda)$ имеет оценку $r(\lambda) = o(1)$ при $\Omega \ni \lambda \to 0$ и определяется единственным образом последовательными приближениями

Замечание 2. Введем проектор $P = \sum\limits_{i=1}^{n} < \cdot, \gamma_i > \varphi_i$. Тогда $P(c^*\varphi + r(\lambda)) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i(\lambda)\varphi_i$, $\alpha(\lambda)^\nu (I - P) r(\lambda) = V(\lambda)$, где $V(\lambda)$ и $c(\lambda) = (c_1(\lambda), .., c_n(\lambda))$ функции, удовлетворяющие системе (1.4), (1.5)

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы и $\widehat{B} = B + \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$. Тогда в секториальной окрестности Ω_1 последовательность $\{u_n(\lambda)\}$, где $u_n = \widehat{u}_n + c_n\varphi\alpha^\nu$, $n = 1, 2, ..$, $\widehat{u}_0 = 0$, $c_0 = c^*$, функции $\widehat{u}_n$ и c_n вычисляются рекурентным образом из линейных уравнений*

$$\widehat{B}\widehat{u}_n = F(u_{n-1}, \alpha, \beta),$$

$$\mathcal{A}(c_n - c_{n-1}) = -l(\widehat{B}(\widehat{u}_n - \widehat{u}_{n-1})) - \alpha^{-\Theta} < F(u_{n-1}, \alpha, \beta), \Psi >,$$

$$\Psi = (\psi_1, .., \psi_n)',$$

сходится к решению (1.7)

2. Построение решений краевой задачи об изгибе стержня в нерегулярном случае

При изучении поведения стержней под действием сжимающей силы возникают краевые задачи вида

$$y^{(4)}(x) + 2py^{(2)}(x) + y = f(y, \beta), \ 0 \le x \le \pi \tag{2.1}$$

$$\begin{array}{l} y(0) = 0,\, y(\pi) = 0 \\ y^{(2)}(0) = 0,\, y^{(2)}(\pi) = 0 \end{array} \tag{2.2}$$

где $f(y, \beta)$ – нелинейная функция, зависящая от малого параметра β. Технические задачи такого рода рассматривались многими авторами (см. [10], [1, с. 322-345], [2] и др.). Например, в работе [8] изучались задачи на собственные значения таких уравнений при $f(y, \beta) = y^3(x) - 2py_0^{(2)}(x)\beta$, где $y(x)$ описывает малый прогиб стержня, $p(\lambda)$ – величина осевого сжатия, $y_0(x)$ – начальная форма, β – амплитуда.

Для определенности далее пусть в уравнении (2.1) $f(y, \beta) = y^3(x) + a(x)\beta$, где $a(x)$ заданный функционал, $\beta(\lambda)$ – малый параметр. Требуется построить решение задачи (2.1), (2.2) при достаточно малой амплитуде β.

Введем линейный оператор

$$A(p) = \frac{d^4}{dx^4} + 2p\frac{d^2}{dx^2} + 1,$$

действующий из пространства $C^{0(4)}_{[0,\pi]}$ четырежды дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям (2.2), в пространство $C_{[0,\pi]}$.

Точки $p_k = 1/2(k^2 + 1/k^2)$ являются его изолированными фредгольмовыми особыми точками, а функции $\sin(kx)$ соответствующими собственными функциями. Точки p_k будем далее называть критическими.

Если $\beta = 0$, то задача (2.1), (2.2) при любых p имеет тривиальное решение $y = 0$. Вблизи этого решения при малых $|\beta|$ и малых отклонениях p от p^* может существовать одно (p^* не является критическим), или несколько равновесных форм стержня (p^* – критическое). Соответственно, если p^* не является критическим и $|\beta|$ достаточно мал, то и задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение.

Рассмотрим более сложный случай вычисления решения задачи (2.1), (2.2), когда p^* – критическое.

Пусть для определенности $k = 1$, т.е. $p^* = 1$. Тогда $\sin x$ собственная функция оператора $A(1)$, $\dim N(A(1)) = 1$. Согласно обозначениям в уравнении (0.1) имеем

$$By = A(1)y,$$

$$F(y, \lambda, \beta) = y^3 + 2\lambda\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\beta,$$

где $\lambda = 1 - p$, $X = C^{0(4)}_{[0,\pi]}$, $Y = C_{[0,\pi]}$. Таким образом, задача (2.1), (2.2) переписана в виде (0.1), где $\alpha = \lambda$, $\beta = \beta(\lambda)$. Диаграмма Ньютона такого оператора $F(y, \lambda, 0)$ состоит из одного отрезка, проходящего через точки $(3, 0)$, $(1, 1)$. Поэтому $r = 1$, $s = 2$, $m = 2$. Оператор $\widehat{B}$ имеет вид

$$\widehat{B} = \frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 1 + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x \sin s[\cdot]ds.$$

На основании обобщенной леммы Шмидта [9, с. 221] оператор $\widehat{B}$ имеет ограниченный обратный интегральный оператор, действующий из $C_{[0,\pi]}$ в $C^{0(4)}_{[0,\pi]}$, отвечающий на основании [10] обобщенной функции Грина

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}(x^2 + (s-\pi)^2 - \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{3}{2})\sin s \sin x + \frac{x}{2\pi}\sin s \cos x - \\ -\frac{s-\pi}{2\pi}x\cos s\cos x + \frac{s-\pi}{2\pi}\cos s \sin x,\ 0 \le x \le s \le \pi, \\ \frac{1}{4\pi}(s^2 + (x-\pi)^2 - \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{3}{2})\sin x \sin s + \frac{s}{2\pi}\sin x \cos s - \\ -\frac{x-\pi}{2\pi}s\cos x\cos s + \frac{x-\pi}{2\pi}\cos x \sin s,\ 0 \le s \le x \le \pi, \end{cases} \tag{2.3}$$

Согласно условию **D** введем алгебраическое уравнение

$$l(c) \equiv c^3 \int\limits_0^\pi \sin^4 x dx - 2c\int\limits_0^\pi \sin^2 x dx = 0$$

Оно имеет ровно три простых решения $c_{1,2} = \pm 2\sqrt{2/3}$, $c_3 = 0$. Следовательно, при $\beta = o(\lambda^{3/2})$ и достаточно малых $|\lambda|$ задача (2.1), (2.2) имеет ровно три решения

$$y_{1,2} = \pm 2\sqrt{2\lambda/3}\sin x + r_{1,2}(\lambda)$$

$$y_3 = r_3(\lambda)$$

где $r_i(\lambda) = o(|\lambda|^{1/2})$, $i = 1, 2, 3$.

Очевидно, что при $\lambda > 0$ решения y_1, y_2 будут вещественными. Решение y_3 имеет максимальный порядок малости при $\lambda \to 0$.

Для построения решения $y_3(\lambda)$ и уточнения асимптотики первых двух решений можно применить схему последовательных приближений, описанную в следствии 1. Для построения решения $y_3(\lambda)$, имеющего максимальный порядок малости, можно использовать и другой способ последовательных приближений, описанный в работах [1–4].

Список литературы

1. Крейн С. Г. Функциональный анализ / С. Г. Крейн. – М. : Наука, 1972. – 544 с.
2. Коллатц Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М. : Наука, 1968. – 503 с.
3. Леонтьев Р. Ю. О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений / Р. Ю. Леонтьев // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Математика, информатика. – 2009. – Вып. 9. – С. 77–83.

4. Леонтьев Р. Ю. О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений в секториальной окрестности нуля / Р. Ю. Леонтьев // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Математическое моделирование и программирование. – 2011. – Вып. 7, № 4(221). – С. 66–70.
5. Сидоров Н. А. Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы / Н. А. Сидоров // Нелинейные граничные задачи. – 2004. – Вып. 14. – С. 161–164.
6. Сидоров Н. А. О решениях максимального порядка малости нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях / Н. А. Сидоров, Р. Ю. Леонтьев // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 226–237.
7. Сидоров Н. А. О решении интегрального уравнения Гаммерштейна в нерегулярном случае методом последовательных приближений / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 2. – С. 404–409.
8. Сидоров Н. А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвелния / Н. А. Сидоров. – Иркутск : Изд. Иркут. гос. ун-та, 1982. – 311 с.
9. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Физматлит, 2002. – 488 с.
10. Keener J. P. Buckling imperfection sensitivity of columns and spherical caps / J. P. Keener // University of Arizona. – 1974. – P. 173–188.

R. Y. Leontyev, N. A. Sidorov

An uniformization and successive approximation of solutions of nonlinear equations with vector parameter

Abstract. We consider a nonlinear operator equation with a Fredholm linear operator in the leading part, depending on small vector parameter. We have proposed the way of construction the solutions. Theory is applied for investigation of the boundary problem of buckling imperfection sensitivity of columns.

Keywords: ramification of solutions, Fredholm operator, asymptotics, successive approximations, boundary problem

Леонтьев Роман Юрьевич, младший научный сотрудник, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (lev_roma@bk.ru)

Сидоров Николай Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (sidorovisu@gmail.com)

Leontyev Roman, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 professor, Phone: (3952)242210 (lev_roma@bk.ru)

Sidorov Nikolay, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 professor, Phone: (3952)242210 (sidorovisu@gmail.com)