Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 3. С. 124—131

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.517

Об одном семействе стационарных распределений системы уравнений Власова–Максвелла–Фоккера–Планка

Э. И. Семенов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

А. В. Синицын
Universidad Nacional de Colombia, Bogota, Colombia

Аннотация. Для стационарной системы Власова–Максвелла–Фоккера–Планка построено семейство распределений в виде экспоненты, зависящей от одной скалярной функции, посредством которой определяются соответствующие электромагнитные поля. Показано, что для одночастичной функции распределения разрешимость системы ВМФП сводится к одному полулинейному эллиптическому уравнению Лиувилля, для которого приведены точные решения.

Ключевые слова: система Власова-Максвелла-Фоккера-Планка; стационарные решения; уравнение Лиувилля.

1. Введение

Динамика плазмы, состоящей из одного сорта частиц, описывается стационарным уравнением Власова–Фоккера–Планка (ВФП)

$$\mathbf{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}+\frac{q}{m}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\cdot\left(\lambda\mathbf{v}f+T\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right), \qquad (1.1)$$

дополненного уравнениями Максвелла для самосогласованного поля

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=4\pi q\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}, \qquad (1.2)$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=0, \qquad (1.3)$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{4\pi q}{c}\int_{\mathbb{R}^3}\mathbf{v}f(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}, \qquad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.5}$$

Здесь $f \triangleq f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}_+ \triangleq (0, +\infty)$ — функция распределения; $\mathbf{r} \triangleq (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \triangleq (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ — состояние и скорость частиц; $\nabla \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ — оператор набла; $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \triangleq (E_x(\mathbf{r}), E_y(\mathbf{r}), E_z(\mathbf{r}))$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \triangleq (B_x(\mathbf{r}), B_y(\mathbf{r}), B_z(\mathbf{r}))$ — самосогласованное электрическое и магнитное поле соответственно; $\lambda \in \mathbb{R}_+$ — коэффициент сноса; $T \in \mathbb{R}_+$ — коэффициент диффузии; $q,\ m > 0$ — заряд и масса частиц соответственно; c — скорость света.

Цель настоящей работы построить аналитические решения стационарной системы Власова–Максвелла–Фоккера–Планка (ВМФП) (1.1) - (1.5). Первые результаты по существованию решений системы ВМФП получены в [1, 2]. Отметим, что близкие задачи для системы Власова–Максвелла рассматривались в цикле работ Рудых–Сидорова–Синицына (см. главу 7 монографии [3] и имеющуюся там библиографию).

Мы будем отыскивать стационарные распределения для уравнения ВФП 1.1 в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \exp\{-\alpha|\mathbf{v}|^2 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{v} + \varphi(\mathbf{r})\} \tag{1.6}$$

и соответствующие электромагнитные поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ удовлетворяющие уравнениям Максвелла (1.2) - (1.5). Здесь $\varphi(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — функция, которая будет определена позднее, $\mathbf{d} \triangleq (d_x, d_y, d_z) \in \mathbb{R}^3$ — постоянный вектор, $|\mathbf{d}| \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}_+$.

Отметим, что в работе [4] были найдены другие стационарные распределения для уравнения ВФП (1.1).

2. Основные результаты

Лемма 1. *Если функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ вида (1.6) является решением уравнения ВФП (1.1), то имеют место соотношения*

$$\frac{q}{m}\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = \frac{\lambda}{2\alpha}|\mathbf{d}|^2, \tag{2.1}$$

$$\nabla\varphi - \frac{2\alpha q}{m}\mathbf{E} + \frac{q}{mc}\mathbf{B} \times \mathbf{d} + \lambda\mathbf{d} = 0, \tag{2.2}$$

$$2\alpha T - \lambda = 0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ определяемая формулой (1.6) удовлетворяет уравнению ВФП (1.1). Подставляя ее в уравнение (1.1), приходим к равенству

$$\nabla\varphi \cdot \mathbf{v} + \frac{q}{m}\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} - \frac{2\alpha q}{m}\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + \frac{q}{mc}\left(\mathbf{B} \times \mathbf{d}\right) \cdot \mathbf{v} = 3\lambda + \lambda\mathbf{d} \cdot \mathbf{v} - 2\alpha\lambda|\mathbf{v}|^2 +$$

$$+\Big(|\mathbf{d}|^2 - 4\alpha\mathbf{d}\cdot\mathbf{v} + 4\alpha^2|\mathbf{v}|^2 - 6\alpha\Big)\,T.$$

Приравнивая в этом соотношении коэффициенты при одинаковых степенях вектор-скорости $\mathbf{v}$ получим следующие формулы

$$1:\quad \frac{q}{m}\mathbf{E}\cdot\mathbf{d} = 3\lambda + \Big(|\mathbf{d}|^2 - 6\alpha\Big)\,T, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{v}:\quad \nabla\varphi - \frac{2\alpha q}{m}\mathbf{E} + \frac{q}{mc}\mathbf{B}\times\mathbf{d} = (\lambda - 4\alpha T)\,\mathbf{d}, \tag{2.5}$$

$$|\mathbf{v}|^2:\quad 2\alpha\,(2\alpha T - \lambda) = 0.$$

Так как параметр $\alpha > 0$, то из последнего равенства следует формула (2.3), с учетом которой выражения (2.4), (2.5) сводятся к соотношениям (2.1), (2.2). Что и требовалось доказать. □

Таким образом, если функция распределения $f(\mathbf{r},\mathbf{v})$ имеет вид (1.6), то искомые электромагнитные поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ помимо уравнений Максвелла (1.2)–(1.5) должны удовлетворять соотношениям (2.1), (2.2).

Лемма 2. *Если электромагнитные поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ определяются формулами*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{2\alpha mc^2}{q\,(4\alpha^2c^2 - |\mathbf{d}|^2)}\nabla\varphi + \frac{\lambda m}{2\alpha q}\mathbf{d}, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{mc}{q\,(4\alpha^2c^2 - |\mathbf{d}|^2)}\nabla\varphi\times\mathbf{d} + b_0\mathbf{d},\quad b_0\in\mathbb{R}, \tag{2.7}$$

а скалярная функция $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию ортогональности

$$\nabla\varphi\cdot\mathbf{d} = 0, \tag{2.8}$$

то при $4\alpha c^2 - |\mathbf{d}|^2 \neq 0$, уравнения (2.1), (2.2) выполняются тождественно.

Доказательство. Подставляя выражения для электромагнитных полей (2.6), (2.7) в уравнения (2.1), (2.2), соответственно, получим

$$\frac{2\,\alpha\,c^2}{(4\alpha^2c^2 - |\mathbf{d}|^2)}\nabla\varphi\cdot\mathbf{d} + \frac{\lambda}{2\alpha}|\mathbf{d}|^2 = \frac{\lambda}{2\alpha}|\mathbf{d}|^2, \tag{2.9}$$

$$\left(1 - \frac{4\alpha^2c^2}{4\alpha c^2 - |\mathbf{d}|^2}\right)\nabla\varphi - \frac{1}{4\alpha c^2 - |\mathbf{d}|^2}\,(\nabla\varphi\times\mathbf{d})\times\mathbf{d} = 0.$$

Используя свойства двойного векторного произведения последнее соотношение преобразуется к виду

$$\left(1 - \frac{4\alpha^2c^2}{4\alpha c^2 - |\mathbf{d}|^2}\right)\nabla\varphi - \frac{1}{4\alpha c^2 - |\mathbf{d}|^2}\Big((\nabla\varphi\cdot\mathbf{d})\,\mathbf{d} - |\mathbf{d}|^2\nabla\varphi\Big) = 0. \tag{2.10}$$

При условии (2.8) равенства (2.9), (2.10) обращаются в тождества. Лемма доказана. □

Замечание 1. В силу постоянства вектора $\mathbf{d}$, векторное произведение $\nabla\varphi \times \mathbf{d}$ представимо в виде $\nabla \times (\varphi \mathbf{d})$. Следовательно вместо формулы (2.7) можно использовать следующее выражение для магнитного поля

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{mc}{q\,(4\alpha^2c^2 - |\mathbf{d}|^2)}\nabla \times (\varphi \mathbf{d}) + b_0\mathbf{d}, \quad b_0 \in \mathbb{R}. \qquad (2.7)'$$

Здесь величина $-\dfrac{mc\,\varphi(\mathbf{r})}{q\,(4\alpha^2c^2 - |\mathbf{d}|^2)}\mathbf{d}$ играет роль векторного потенциала магнитного поля.

Лемма 3. *Пусть функция распределения $f(\mathbf{r},\mathbf{v})$ определяется формулой (1.6), а электромагнитные поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ вида (2.6), (2.7) удовлетворяют уравнениям Максвелла (1.2)-(1.5), тогда скалярная функция $\varphi(\mathbf{r})$ является решением полулинейного эллиптического уравнения Лиувилля*

$$\Delta\varphi = \frac{2q^2}{mc^2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{5/2}\exp\left(\frac{|\mathbf{d}|^2}{4\alpha}\right)\left(4\alpha^2c^2 - |\mathbf{d}|^2\right)\exp(\varphi). \qquad (2.11)$$

Доказательство. Подставим электрическое поле $E(\mathbf{r})$ определяемого формулой (12) в уравнения Максвелла (1.2), (1.3). В силу равенства $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$, справедливого для любой вектор-функции $F(\mathbf{r})$, уравнение (1.3) выполняется тождественно, а из уравнения (1.2) получим

$$\frac{2\alpha mc^2}{q\,(4\alpha^2c^2 - |\mathbf{d}|^2)}\Delta\varphi = 4\pi q\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}. \qquad (2.12)$$

Здесь $\Delta\cdot = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot$ — оператор Лапласа в пространстве переменных (x,y,z). Соответственно, для магнитного поля $B(\mathbf{r})$ вида (2.7) из уравнения (1.5) имеем

$$-\frac{mc}{q\,(4\alpha^2c^2 - |\mathbf{d}|^2)}\nabla \cdot (\nabla\varphi \times \mathbf{d}) = 0. \qquad (2.13)$$

С учетом свойств оператора ∇ получим цепочку равенств

$$\nabla \cdot (\nabla\varphi \times \mathbf{d}) = \mathbf{d} \cdot (\nabla \times \nabla\varphi) - \nabla\varphi \cdot \nabla \times \mathbf{d} = \mathbf{d} \cdot (\nabla \times \nabla\varphi) = 0.$$

Заметим, что последнее равенство имеет место в силу формулы $\nabla \times \nabla\varphi = 0$, справедливой для любой скалярной функции $\varphi(\mathbf{r})$. Таким образом соотношение (2.13) выполняется тождественно. Из уравнения (1.4) получим

$$-\frac{mc}{q\,(4\alpha^2c^2 - |\mathbf{d}|^2)}\nabla \times (\nabla\varphi \times \mathbf{d}) = \frac{4\pi q}{c}\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}.$$

Так как $\nabla\times(\nabla\varphi\times\mathbf{d})=(\mathbf{d}\cdot\nabla)\,\nabla\varphi-\mathbf{d}\Delta\varphi$, то последнее соотношение преобразуется к виду

$$-\frac{mc}{q\left(4\alpha^2c^2-|\mathbf{d}|^2\right)}\left((\mathbf{d}\cdot\nabla)\,\nabla\varphi-\mathbf{d}\Delta\varphi\right)=\frac{4\pi q}{c}\int_{\mathbb{R}^3}\mathbf{v}f(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}.$$

Домножая полученное выражение скалярно на постоянный вектор $\mathbf{d}$, с учетом условия ортогональности (2.8), имеем

$$\frac{mc|\mathbf{d}|^2}{q\left(4\alpha^2c^2-|\mathbf{d}|^2\right)}\Delta\varphi=\frac{4\pi q}{c}\int_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{v})\,f(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}. \tag{2.14}$$

Осталось вычислить интегралы стоящие в правых частях формул (2.12), (2.14). Поскольку, функция распределения $f(\mathbf{r},\mathbf{v})$ определяется формулой (1.6), то соответственно, находим

$$\int_{\mathbb{R}^3}f(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z=\frac{\pi^{3/2}}{\alpha^{3/2}}\exp\left(\frac{|\mathbf{d}|^2}{4\alpha}\right)\exp(\varphi),$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{v})\,f(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{v}&\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(d_xv_x+d_yv_y+d_zv_z)\,f(\mathbf{r},\mathbf{v})\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\\&=\frac{\pi^{3/2}|\mathbf{d}|^2}{2\alpha^{5/2}}\exp\left(\frac{|\mathbf{d}|^2}{4\alpha}\right)\exp(\varphi).\end{aligned}$$

С учетом последних формул, легко показать, что соотношения (2.12), (2.14) сводятся к полулинейному эллиптическому уравнению Лиувилля (2.11). Что и требовалось доказать. □

Итак, для полного определения функции распределения $f(\mathbf{r},\mathbf{v})$ и электромагнитных полей $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, осталось найти скалярную функцию $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяющую уравнению Лиувилля (2.11) и дополнительному условию ортогональности (2.8).

Соотношение (2.8) есть линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для функции $\varphi(\mathbf{r})$. Оно имеет общее решение вида

$$\varphi(x,y,z)=\varphi(u_i,v_i),\quad i=1,2,3,$$

где

$$\begin{aligned}&u_1=d_yx-d_xy,\quad v_1=d_zx-d_xz,\quad (d_x\neq0),\\&u_2=d_zy-d_yz,\quad v_2=d_xy-d_yx,\quad (d_y\neq0),\\&u_3=d_xz-d_zx,\quad v_3=d_yz-d_zy,\quad (d_z\neq0).\end{aligned} \tag{2.15}$$

В дальнейшем, для краткости, будем рассматривать решения $\varphi(\mathbf{r})$ только с переменными $(u_1\stackrel{\triangle}{=}u, v_1\stackrel{\triangle}{=}v)$, поскольку функции с переменными

(u_2, v_2) и (u_3, v_3) получаются из решения $\varphi(u_1, v_1)$ циклической перестановкой $x \to y \to z \hookleftarrow$. В этом случае оператор Лапласа в уравнении (2.11) в переменных u, v запишется следующим образом:

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = \left(d_x^2 + d_y^2\right)\varphi_{uu} + 2d_y d_z \varphi_{uv} + \left(d_x^2 + d_z^2\right)\varphi_{vv}.$$

Хорошо известно, что невырожденным преобразованием оператор, стоящий в правой части последнего равенства, можно привести к каноническому виду. Так, если положить

$$\xi = a_1 u + b_1 v, \quad \eta = a_2 u + b_2 v, \tag{2.16}$$

где

$$b_1 = \mp\frac{d_x\sqrt{|\mathbf{d}|^2}}{d_x^2 + d_z^2}\, a_2 - \frac{d_y d_z}{d_x^2 + d_z^2}\, a_1, \quad b_2 = \pm\frac{d_x\sqrt{|\mathbf{d}|^2}}{d_x^2 + d_z^2}\, a_1 - \frac{d_y d_z}{d_x^2 + d_z^2}\, a_2,$$

и a_1, a_2 произвольные постоянные, не равные одновременно нулю, мы получим

$$\left(d_x^2 + d_y^2\right)\varphi_{uu} + 2d_y d_z \varphi_{uv} + \left(d_x^2 + d_z^2\right)\varphi_{vv} = \mu\left(\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta}\right).$$

Здесь

$$\mu = \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(1 + \frac{d_y^2}{d_x^2 + d_z^2}\right) d_x^2 \quad \text{или} \quad \mu = \left(a_1^2 + a_2^2\right)\frac{|\mathbf{d}|^2}{d_x^2 + d_z^2} d_x^2, \tag{2.17}$$

$\mu > 0$ — это условие обеспечивает невырожденность преобразования (2.16). Таким образом, вместо уравнения (2.11) с дополнительным условием (2.8) все свелось к разрешимости в двумерном координатном пространстве переменных (ξ, η) одного автономного уравнения Лиувилля вида

$$\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta} = \gamma \exp(\varphi), \quad \varphi \stackrel{\triangle}{=} \varphi(\xi, \eta), \tag{2.18}$$

где константа γ определяется равенством

$$\gamma = \frac{2q^2}{\mu m c^2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{5/2} \exp\left(\frac{|\mathbf{d}|^2}{4\alpha}\right)\left(4\alpha^2 c^2 - |\mathbf{d}|^2\right). \tag{2.19}$$

Уравнение (2.18) при $4\alpha^2 c^2 - |\mathbf{d}|^2 > 0$ обладает следующими точными решениями [5]

$$\varphi_1(\xi, \eta) = \ln\left(\frac{2}{\gamma}\,\frac{\theta_\xi^2 + \theta_\eta^2}{\theta^2}\right), \quad \varphi_2(\xi, \eta) = \ln\left(\frac{2}{\gamma}\,\frac{\theta_\xi^2 + \theta_\eta^2}{\operatorname{sh}^2\theta}\right),$$

$$\varphi_3(\xi, \eta) = \ln\left(\frac{2}{\gamma}\,\frac{\theta_\xi^2 + \theta_\eta^2}{\sin^2\theta}\right), \quad \varphi_4(\xi, \eta) = \ln\left(\frac{2}{\gamma}\,\frac{\theta_\xi^2 + \theta_\eta^2}{\cos^2\theta}\right), \tag{2.20}$$

если $4\alpha^2c^2 - |\mathbf{d}|^2 < 0$, то имеем

$$\varphi_5(\xi,\eta) = \ln\left(-\frac{2}{\gamma}\,\frac{\theta_\xi^2+\theta_\eta^2}{\operatorname{ch}^2\theta}\right). \tag{2.21}$$

Здесь $\theta(\xi,\eta)$ — произвольная гармоническая функция, отличная от постоянной. При этом текущие переменные ξ и η связаны с исходными переменными x, y, z соотношениями

$$\xi = (a_1d_y + b_1d_z)x - a_1d_xy - b_1d_xz,$$
$$\eta = (a_2d_y + b_2d_z)x - a_2d_xy - b_2d_xz. \tag{2.22}$$

Все сказанное выше можно резюмировать в виде следующей теоремы

Теорема. *Стационарная система уравнений Власова–Максвелла–Фоккера–Планка (1.1)–(1.5) обладает точным решением вида*

$$f(x,y,z,v_x,v_y,v_z) = \exp\{-\alpha\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)+d_xv_x+d_yv_y+d_zv_z+\varphi(\xi,\eta)\},$$

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \frac{2\alpha mc^2}{q\,(4\alpha^2c^2-|\mathbf{d}|^2)}\left[\left((a_1d_y+b_1d_z)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+(a_2d_y+b_2d_z)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\mathbf{i}-\right.$$
$$\left.-\left(a_1d_x\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+a_2d_x\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\mathbf{j}+\left(b_1d_x\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+b_2d_x\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\mathbf{k}\right]+\frac{\lambda m}{2\alpha q}\mathbf{d},$$

$$\mathbf{B}(x,y,z) = -\frac{mc}{q\,(4\alpha^2c^2-|\mathbf{d}|^2)}\left[\left((b_1d_y-a_1d_z)d_x\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+(b_2d_y-a_2d_z)d_x\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\mathbf{i}-\right.$$
$$-\left(\left(b_1d_x^2+a_1d_yd_z+b_1d_z^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\left(b_2d_x^2+a_2d_yd_z+b_2d_z^2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\mathbf{j}+$$
$$\left.+\left(\left(a_1d_x^2+a_1d_y^2+b_1d_zd_y\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\left(a_2d_x^2+a_2d_y^2+b_2d_zd_y\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\mathbf{k}\right]+b_0\mathbf{d},$$

где $\varphi(\xi,\eta)$ любая из функций (2.20), (2.21), а переменные (ξ,η) определяются формулами (2.22).

Список литературы

1. Семенов Э. И. О новых точных решениях неавтономного уравнения Лиувилля / Э. И. Семенов // Сиб. мат. журн. – 2008. – Т. 49. № 1. – С. 207–217.
2. Dressler K. Steady-states in plasma physics – the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck equations / K. Dressler // Math. Methods in the Applied Sciences. – 1990. – Vol. 12. – P. 471.

3. Glassey R. Steady-states of the Vlasov–Poisson–Fokker–Plank system / R. Glassey, J. Schaeffer, Y. Zheng // J. of Math. Anal. and Applications. – 1996. – Vol. 202, N 3. – P. 1058(18).
4. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. – Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.
5. Semenov E. I. New stationary distributions of the Vlasov–Maxwell–Fokker–Planck's system / E. I. Semenov, A. V. Sinitsyn // Physics Letters A. – 2010. – Vol. 374. – P. 4222–4225.

E. I. Semenov, A. V. Sinitsyn

On a family of steady-state distributions of the Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck system

Abstract. A family of distributions in the form of an exponential, which depends on a scalar function is constructed for the steady-state Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck system. Through a scalar function defined relevant electromagnetic field. It is shown that solvability of the VMFP system for one-kind distribution function reduces to semilinear elliptic Liouville equation. We present some exact solutions of the last equation.

Keywords: Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck equation, steady state solution, Liouville equation

Семенов Эдуард Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова 134, тел.: (3952)453099
(`semenov@icc.ru`)

Синицын Александр Владимирович, доктор физико-математических наук, Universidad Nacional de Colombia, Bogota, Colombia
(`avsinitsyn@yahoo.com`)

Edward Semenov, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 664033, Irkutsk, Lermontova st. 134, Phone: (3952)453099
(`semenov@icc.ru`)

Alexander Sinitsyn, Universidad Nacional de Colombia, Bogota, Colombia
(`avsinitsyn@yahoo.com`)