Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 3. С. 54—67

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.983: 517.956: 517.444

Обратимость оператора свертки в пространствах L_p в применении к R-полугруппам *

М. В. Вдовин
Уральский государственный университет им. А.М. Горького

Аннотация. Получены достаточные условия существования обратного оператора к оператору свертки в пространствах $L_p(\mathbb{R})$, $p \in (2, \infty)$, и достаточные условия плотности множества значений оператора свертки. Данные свойства оператора свертки рассмотрены в применении к широкому классу регуляризующих полугрупп — к R-полугруппам.

Ключевые слова: оператор свертки; пространства L_p; обратимость оператора свертки; R-полугруппа; метод регуляризации.

1. Введение

Наличие полугруппового свойства у семейства операторов решения дифференциально-операторной задачи Коши

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in [0, T], \qquad u(0) = f, \tag{1.1}$$

позволяет получить много важных результатов в рамках разросшейся к настоящему времени теории полугрупп операторов. Фундаментальным результатом в этой области является теорема Маядеры–Феллера–Филлипса–Хилле–Иосиды (МФФХИ), связывающая равномерную корректность задачи (1.1) с поведением резольвенты оператора A и с существованием полугруппы операторов класса C_0, порожденной оператором A в некотором банаховом пространстве X (см., например, [4, 10, 5, 9]).

В последнее время в связи с многочисленными приложениями большой интерес вызывают задачи, не являющиеся равномерно корректными, то есть задачи, для которых не выполнены условия теоремы

* Работа выполнена при поддержке программы Рособразования 2.1.1/2000 и гранта РФФИ № 10-0196003р

МФФХИ. Один из подходов к изучению и решению задач, не являющихся равномерно корректными, основан на методах, созданных в теории регуляризации некорректных задач. Методы регуляризации некорректных задач для любого заданного с погрешностью начального условия $f_\delta \in X$ ($\|f - f_\delta\| \le \delta$) позволяют построить решение u_α некоторой корректной задачи, зависящей от параметра регуляризации α, такое, что при определенном согласовании параметров $\alpha = \alpha(\delta)$ имеет место сходимость $\alpha(\delta) \to 0$ и $u_{\alpha(\delta)}(t) \to u(t)$ при $\delta \to 0$. Это решение, называемое регуляризованным, определяется регуляризующим оператором $\mathbf{R}_\alpha(t)$:

$$\mathbf{R}_\alpha(t) f_\delta = u_{\alpha(\delta)}(t), \quad t \in [0, T].$$

Решения, полученные таким образом, могут служить приближенными решениями задачи (1.1) [4, 10, 5]:

$$u_{\alpha(\delta)}(t) = \mathbf{R}_\alpha(t) f_\delta \to u(t) \quad \text{при} \quad f_\delta \to f.$$

Как показано в [5], в случае когда A — дифференциальный оператор, такая регуляризация связана с порождением оператором A некоторой R-полугруппы, где $R = R(\alpha)$ — оператор, ограниченный в X при любом $\alpha \ge 0$, обратимый, с плотной областью значений и такой, что $R(\alpha)x \to x$ при $\alpha \to 0$, $x \in X$.

Таким образом, оба подхода к решению некорректной задачи (1.1) — построение регуляризующих операторов и построение R-полугрупп операторов вкладываются в общую конструкцию регуляризации в широком смысле [10], придавая более широкие возможности каждому из них. В [5, 9] установленная связь использована для построения регуляризованных задач с дифференциальным оператором A в пространстве L_2, в [6] — в пространствах L_p.

В настоящей работе (раздел 2) показано, что регуляризующие операторы, построенные в [6], порождают R-полугруппу в пространствах L_p и определяют решение регуляризованной задачи. При этом возникли тонкие вопросы (важные и сами по себе) относительно обратимости свертки и плотности ее области значений в пространствах L_p. Этому посвящен раздел 3.

2. Полугрупповые свойства регуляризующих операторов некорректной дифференциальной задачи Коши в пространствах L_p

Рассмотрим соответсвующие задаче (1.1) системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j(t,x) = \sum_{k=1}^{m} p_{jk}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) u_k(t,x), \qquad j = 1, \dots, m, \tag{2.1}$$

где $p_{jk}(i\frac{\partial}{\partial x})$ — полиномы от оператора $i\frac{\partial}{\partial x}$ максимального порядка r с постоянными комплексными коэффициентами. Обозначим $\widetilde{p}_{jk}(\zeta)$ $(j,k = 1,\dots,m)$ полиномы, получаемые из $p_{jk}(i\frac{\partial}{\partial x})$ при замене $i\frac{\partial}{\partial x}$ на комплексное число $\zeta = \xi + i\eta$. Введем матрицу $\widetilde{P}(\zeta) := (\widetilde{p}_{jk}(\zeta))_{j,k=1}^{m}$ и обозначим $\widetilde{g}_{jk}(t,\zeta)$ элементы матрицы $e^{t\widetilde{P}(\zeta)} := \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\widetilde{P}^n(\zeta)$. Теперь, следуя классификации, рассмотренной в [2], выделим два класса систем (2.1): класс систем корректных по Петровскому, для которых при $t \geq 0$ и $\xi \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{j,k=1}^{m}|\widetilde{g}_{jk}(t,\xi)|^2\right)^{1/2} \leq (c_1 + c_2 t^{m-1})e^{a_1 t}(1+|\xi|)^{r(m-1)}, \quad a_1 \in \mathbb{R}; \tag{2.2}$$

и класс условно-корректных систем, для которых при $t \geq 0$ и $\xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{gathered}\left(\sum_{j,k=1}^{m}|\widetilde{g}_{jk}(t,\xi)|^2\right)^{1/2} \leq (c_1 + c_2 t^{m-1})e^{a_2 t}(1+|\xi|)^{r(m-1)}e^{bt|\xi|^h},\\ a_2 \in \mathbb{R}, \quad b > 0, \quad 0 < h < 1.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Обозначим X_p^m, $p \in [1,\infty]$, m-мерное пространство, состоящее из векторов $\mathbf{f} = (f_1,\dots,f_m)$, компоненты которых принадлежат соответствующему пространству

$$X_p := \begin{cases} L_p & \text{при } p \geq 1, \\ C_0 & \text{при } p = \infty; \end{cases} \qquad X_p^m \text{ снабдим нормой} \quad \|\mathbf{f}\| = \left(\sum_{j=1}^{m}\|f_j\|_p^2\right)^{1/2}.$$

Здесь L_p — пространство функций f таких, что функция $|f|^p$ интегрируема (в смысле Лебега) на числовой прямой; C_0 — пространство непрерывных на числовой прямой функций, стремящихся к нулю на бесконечности; $\|\cdot\|_p$ — норма в X_p.

Для системы (2.1) из выделенных классов, рассмотрим в пространстве X_p^m задачу (1.1):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{u}(t), \quad t \in [0,T], \qquad \mathbf{u}(0) = \mathbf{f}, \tag{2.4}$$

где $P(i\frac{\partial}{\partial x})$ — дифференциальный оператор, действующий в X_p^m по правилу $P(i\frac{\partial}{\partial x})\mathbf{f} = (\sum\limits_{k=1}^{m}p_{1k}(i\frac{\partial}{\partial x})f_k,\dots,\sum\limits_{k=1}^{m}p_{mk}(i\frac{\partial}{\partial x})f_k)$; при этом под $\frac{\partial}{\partial x}f$ понимается обобщенная производная функции f. Область определения оператора $P(i\frac{\partial}{\partial x})$

$$\operatorname{Dom} P := \left\{\mathbf{f} \in X_p^m \ : \ P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{f} \in X_p^m\right\}.$$

Согласно результатам, полученным в [5, 9, 6], некорректная задача (2.4) может быть регуляризована с помощью семейства операторов $\{\mathbf{R}_\alpha(t),\ \alpha \geq 0,\ t \in [0,T]\}$, определенных следующим образом:

$$\mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{f} = \Big(\sum_{k=1}^{m} s_{1k}^{(\alpha)}(t) * f_k, \ldots, \sum_{k=1}^{m} s_{mk}^{(\alpha)}(t) * f_k\Big),$$
$$s_{jk}^{(\alpha)}(t) := F^{-1}[\widetilde{g}_{jk}(t,\cdot)\widetilde{K}_\alpha],$$

здесь F — обозначение прямого (F^{-1} — обратного) преобразования Фурье вида $F[f](\xi) := \lim\limits_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)e^{i\xi x}\,dx$, определенного для функций из $L_p,\ p \in [1,2]$ ($F[f]$ будем также обозначать $\widetilde{f}$).

В данной конструкции оператора $\mathbf{R}_\alpha(t)$ существенную роль играет функция $\widetilde{K}_\alpha$ — регуляризующая функция. В настоящей работе положим $\widetilde{K}_\alpha(\xi) = \widetilde{K}(\alpha\xi),\ \alpha \geq 0$, где $\widetilde{K}$ — функция из пространства Соболева W_1^2 (пространства функций $f \in L_1$ абсолютно непрерывных на числовой прямой вместе со своими производными первого порядка, для которых f' и $f'' \in L_1$), удовлетворяющая следующим условиям:

К1) $\widetilde{K}(0) = 1$,

К2) в случае систем корректных по Петровскому при $\xi \to \infty$

$$\widetilde{K}(\xi) = O\Big(\frac{1}{|\xi|^{rm+1}}\Big), \quad \widetilde{K}'(\xi) = O\Big(\frac{1}{|\xi|^{rm-r+1}}\Big), \tag{2.5}$$

в случае условно–корректных систем при $\xi \to \infty$

$$\widetilde{K}(\xi) = O\Big(\frac{1}{e^{(b+\varepsilon)T|\xi|^h}|\xi|^{rm}}\Big), \quad \widetilde{K}'(\xi) = O\Big(\frac{1}{e^{bT|\xi|^h}|\xi|^{rm-r+1}}\Big) \tag{2.6}$$

(r — максимальный порядок полиномов p_{jk} системы (2.1), ε — произвольное положительное число). Как показано в [6], такое определение функции $\widetilde{K}_\alpha$ при условиях вида (2.2) — (2.3) обеспечивает для оператора $\mathbf{R}_\alpha(t)$, во-первых, существование (для этого достаточно, чтобы при $\alpha = 1$ семейства $\{s_{jk}^{(\alpha)}(t),\ t \in [0,T]\},\ j,k = 1,\ldots,m$, состояли из интегрируемых на числовой прямой функций), во-вторых, наличие свойств регуляризующего оператора задачи (2.4) в пространстве X_p^m при любом $p \in [1,\infty]$. В качестве примера такой функции для выделенных классов систем (2.1) рассмотрим

$$\widetilde{K}_\alpha(\xi) = \begin{cases} (1+\alpha^2\xi^2)^{-(rm+1)/2}, & \text{для случая систем корректных по Петровскому;} \\ e^{-\alpha^2\xi^2}, & \text{для случая систем условно-корректных.} \end{cases}$$

Теперь зафиксируем параметр α и покажем, что семейство операторов $\{\mathbf{R}_\alpha(t),\ t \in [0,T]\}$, описанных выше, удовлетворяет следующим условиям:

R1) $\mathbf{R}_\alpha(t+\tau)(K_\alpha * \mathbf{f}) = \mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{R}_\alpha(\tau)\mathbf{f}$ для всех $t, \tau, t+\tau \in [0,T]$, $\mathbf{f} \in X_p^m$.

R2) для каждого $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}^m$ — пространства векторов, компонентами которых являются бесконечно дифференцируемые на числовой прямой функций с компактными носителями, выполняется соотношение

$$\left\| \frac{\mathbf{R}_\alpha(t+\Delta t)\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{R}_\alpha(t)\boldsymbol{\varphi}}{\Delta t} - P\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\mathbf{R}_\alpha(t) \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0$$

равномерно по t на отрезке $[0,T]$.

Чтобы убедиться в выполнении условия R1) воспользуемся следующим свойством матричной экспоненты: $e^{(t+\tau)\widetilde{P}(\zeta)} = e^{t\widetilde{P}(\zeta)}e^{\tau\widetilde{P}(\zeta)}$, которое для элементов матрицы $e^{t\widetilde{P}(\zeta)}$ выражается в виде $\widetilde{g}_{jk}(t+\tau,\zeta) = \sum\limits_{l=1}^{m} \widetilde{g}_{jl}(t,\zeta)\widetilde{g}_{lk}(\tau,\zeta)$ при $j,k = 1,\dots,m$. Отсюда, поскольку

$$s_{jk}^{(\alpha)}(t+\tau) * K_\alpha * f = F^{-1}[\widetilde{g}_{jk}(t+\tau,\cdot)\widetilde{K}_\alpha\widetilde{K}_\alpha] * f$$

для всех $t, \tau, t+\tau \in [0,T]$ и $f \in X_p$ (см. [6]), получим

$$s_{jk}^{(\alpha)}(t+\tau) * K_\alpha * f = F^{-1}\Big[\sum_{l=1}^{m} \widetilde{g}_{jl}(t,\cdot)\widetilde{K}_\alpha\widetilde{g}_{lk}(\tau,\cdot)\widetilde{K}_\alpha\Big] * f =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} s_{jl}^{(\alpha)}(t) * s_{lk}^{(\alpha)}(\tau) * f$$

для всех $t, \tau, t+\tau \in [0,T]$ и $f \in X_p$, т.е. выполняется условие R1).

Обратимся теперь к проверке выполнения условия R2). Учитывая, что

$$\mathbf{R}_\alpha(t)\boldsymbol{\varphi} = \Big(\sum_{k=1}^{m} s_{1k}^{(\alpha)}(t) * \varphi_k, \dots, \sum_{k=1}^{m} s_{mk}^{(\alpha)}(t) * \varphi_k\Big),$$

где $s_{jk}^{(\alpha)}(t) := F^{-1}[\widetilde{g}_{jk}(t,\cdot)\widetilde{K}_\alpha]$ $(j,k = 1,\dots,m)$ при любом $t \geq 0$ являются элементами пространства L_1, см. [6], и то, что $\mathcal{D} \subset L_1$, получим $s_{jk}^{(\alpha)}(t) * \varphi \in L_1$ при любых $t \geq 0$ и $\varphi \in \mathcal{D}$ в силу свойств сверки функций из L_p, $p \in [1,\infty]$:

$$u * v \in L_p, \quad \|u * v\|_p \leq \|u\|_1 \|v\|_p, \qquad u \in L_1,\ v \in L_p, \tag{2.7}$$

см., например, [8, п. 1.3 гл. 1]. При этом легко убедиться, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (s * \varphi)(x)\psi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} (s * \varphi')(x)\psi(x)\,dx$$

для всех $s \in L_1$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$. Откуда следует, что $s_{jk}^{(\alpha)}(t) * \varphi$ являются элементами пространства Соболева W_1^1, и, значит, $\mathbf{R}_\alpha(t)\boldsymbol{\varphi} \in \operatorname{Dom} P$ и $P(i\frac{\partial}{\partial x})\mathbf{R}_\alpha(t)\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{R}_\alpha(t)P(i\frac{\partial}{\partial x})\boldsymbol{\varphi}$ для всех $t \geq 0$ и $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}^m$.

Далее нам понадобится следующий вспомогательный результат.

Лемма 1. *Пусть* $s_j(t)$, $t \in [0,T]$, $j = 1,\dots,m$, *— функции, принимающие значения из* L_1*, ограничены на отрезке* $[0,T]$ *и для всех* $t, \Delta t, t+\Delta t \in [0,T]$ *и* $\varphi \in \mathcal{D}$

$$s_j(t+\Delta t) * \varphi - s_j(t) * \varphi = \sum_{k=1}^{m} \int_0^{\Delta t} s_k(t+\tau) * B_{jk}\varphi \, d\tau, \quad j = 1,\dots,m,$$

где B_{jk} *— линейные операторы, отображающие пространство* $\mathcal{D}$ *в себя. Тогда при любых* $\varphi \in \mathcal{D}$ *и* $p \in [1,\infty]$

$$\left\| \frac{s_j(t+\Delta t) * \varphi - s_j(t) * \varphi}{\Delta t} - \sum_{k=1}^{m} s_k(t) * B_{jk}\varphi \right\|_p \to 0 \quad \textit{при} \quad \Delta t \to 0,$$

равномерно относительно t *на отрезке* $[0,T]$ ($\|\cdot\|_p$ *— норма в* X_p*).*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{D} \subset \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} X_p$, то при любых $\varphi \in \mathcal{D}$ и $p \in [1,\infty]$ в силу обобщенного неравенства Минковского и неравенства для свертки функций из L_p (2.7), имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{s_j(t+\Delta t) * \varphi - s_j(t) * \varphi}{\Delta t} - \sum_{k=1}^{m} s_k(t) * B_{jk}\varphi \right\|_p = \\
&= \frac{1}{|\Delta t|} \left\| \sum_{k=1}^{m} \int_0^{\Delta t} s_k(t+\tau) * B_{jk}\varphi \, d\tau - \sum_{k=1}^{m} \int_0^{\Delta t} s_k(t) * B_{jk}\varphi \, d\tau \right\|_p = \\
&= \frac{1}{|\Delta t|} \left\| \sum_{k=1}^{m} \int_0^{\Delta t} \left(\left(\sum_{l=1}^{m} \int_0^{\tau} s_l(t+\sigma) * B_{kl}\varphi \, d\sigma \right) * B_{jk}\varphi \right) d\tau \right\|_p \le \\
&\le \frac{1}{|\Delta t|} \sum_{k=1}^{m} \int_0^{\Delta t} \left\| \sum_{l=1}^{m} \int_0^{\tau} s_l(t+\sigma) * B_{kl}\varphi \, d\sigma \right\|_1 \|B_{jk}\varphi\|_p \, d\tau \le \\
&\le \frac{1}{|\Delta t|} \sum_{k=1}^{m} \|B_{jk}\varphi\|_p \int_0^{\Delta t} \sum_{l=1}^{m} \int_0^{\tau} \|s_l(t+\sigma)\|_1 \|B_{kl}\varphi\|_p \, d\sigma d\tau \le \\
&\le \max_{1\le l\le m} \sup_{t+\sigma\in[0,T]} \|s_l(t+\sigma)\|_1 \sum_{k,l=1}^{m} \|B_{jk}\varphi\|_p \|B_{kl}\varphi\|_p |\Delta t|,
\end{aligned}$$

откуда следует утверждение данной леммы. □

Теперь, учитывая, что для функций $\widetilde{g}_{jk}(t,\zeta)$, $j,k = 1,\dots,m$, как элементов матрицы $e^{t\widetilde{P}(\zeta)}$ ($\widetilde{P}(\zeta) := (\widetilde{p}_{jk}(\zeta))_{j,k=1}^m$), выполняется равенство $\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{g}_{jk}(t,\zeta) = \sum\limits_{l=1}^{m} \widetilde{g}_{jl}(t,\zeta)\widetilde{p}_{lk}(\zeta)$ при любых $t \in \mathbb{R}$ и $\zeta \in \mathbb{C}$, и учитывая, что имеет место оценка $\int_0^{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{g}_{jk}(t+\tau,\xi)\widetilde{K}_\alpha(\xi)\widetilde{\varphi}(\xi)| \, d\xi d\tau < \infty$ при любых $t, \Delta t \geq 0$ и $\varphi \in \mathcal{D}$ (см. (2.2), (2.3) и (2.5), (2.6)), в силу свойств преобразования Фурье и теоремы Фубини получим

$$s_{jk}^{(\alpha)}(t+\Delta t) * \varphi - s_{jk}^{(\alpha)}(t) * \varphi = F^{-1}\Big[\int_0^{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{g}_{jk}(t+\tau,\cdot)\,d\tau \widetilde{K_\alpha}\widetilde{\varphi}\Big] =$$
$$= F^{-1}\Big[\int_0^{\Delta t} \sum_{l=1}^{m} \widetilde{g}_{jl}(t+\tau,\cdot)\widetilde{p}_{lk}\,d\tau \widetilde{K_\alpha}\widetilde{\varphi}\Big] =$$
$$= \sum_{l=1}^{m}\int_0^{\Delta t} F^{-1}[\widetilde{g}_{jl}(t+\tau,\cdot)\widetilde{K_\alpha}\widetilde{p}_{lk}\widetilde{\varphi}]\,d\tau =$$
$$= \sum_{l=1}^{m}\int_0^{\Delta t} \left(s_{jl}^{(\alpha)}(t+\tau) * p_{lk}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\varphi\right) d\tau$$

для всех $t, \Delta t, t+\Delta t \in [0,T]$ и $\varphi \in \mathcal{D}$. При этом $s_{jk}^{(\alpha)}(t)$ при $j,k = 1,\dots,m$ ограничены по t на отрезке $[0,T]$ (см. [6]), т.е. $s_{jk}^{(\alpha)}(t)$ удовлетворяют условиям леммы 1, и, значит, условие R2) выполняется.

Отметим, что поскольку пространство $\mathcal{D}^m$ всюду плотно в пространстве X_p^m при любом $p \in [1,\infty]$ и семейство операторов $\{\mathbf{R}_\alpha(t),\ t \in [0,T]\}$ по конструкции равномерно по t ограничено на отрезке $[0,T]$, то условие R2) означает, что при любом $\mathbf{f} \in X_p^m$ функция $\mathbf{u}_\alpha(t) = \mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{f},\ t \in [0,T]$, является решением следующей регуляризованной в пространстве X_p^m задачи:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}_\alpha(t) = P\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\mathbf{u}_\alpha(t), \quad t \in [0,T], \qquad \mathbf{u}_\alpha(0) = K_\alpha * \mathbf{f},$$

где $K_\alpha = F^{-1}[\widetilde{K_\alpha}],\ K_\alpha * \mathbf{f} := (K_\alpha * f_1, \dots, K_\alpha * f_m)$.

Наконец, для доказательства того, что семейство операторов $\{\mathbf{R}_\alpha(t),$ $t \in [0,T]\}$ образует R-полугруппу, требуется показать, что оператор $R(\alpha) = \mathbf{R}_\alpha(0)$ имеет обратный оператор и множество значений всюду плотное в пространстве X_p^m. Из построения операторов $\mathbf{R}_\alpha(t)$ следует, что оператор $\mathbf{R}_\alpha(0)$ является оператором свертки, порожденным функцией K_α. Следующий раздел посвящен исследованию вопросов существования обратного оператора к оператору свертки.

3. Существование обратного оператора к оператору сверки в пространствах L_p

Если функция $K \in L_1$, то при $p \in [1,2]$, непосредственно исходя из свойств преобразования Фурье функций из пространств L_p: $F[u * v] = F[u]F[v]$, получаем, что для существования обратного оператора к оператору свертки, порожденному функцией K, на пространстве L_p

необходимо и достаточно, чтобы мера Лебега множества нулей функции $\widetilde{K}$ — преобразования Фурье функции K, равнялась нулю. Покажем (теорема 1), что если при этом функция $\widetilde{K}$ является абсолютно непрерывной на любом отрезке числовой прямой и имеет не более чем счетное множество нулей, то существует обратный оператор к оператору свертки, порожденному функцией K, на пространстве L_p при $p \in (2, \infty)$. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция g абсолютно непрерывна на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b] \setminus E$, где E — не более чем счетное замкнутое множество; при этом $g'(x) = 0$ почти для всех $x \in [\alpha, \beta]$. Тогда функция g постоянна на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Поскольку E — замкнутое множество, то $(a, b) \setminus E$ — открытое и, значит (см. [7, §5 гл. II]), представимо в виде $\bigcup\limits_{\nu \in \mathrm{N}} (\alpha_\nu, \beta_\nu)$, где $(\alpha_{\nu'}, \beta_{\nu'}) \cap (\alpha_{\nu''}, \beta_{\nu''}) = \varnothing$ при $\nu' \neq \nu''$ ($\mathrm{N} \subset \mathbb{N}$). Согласно условиям на функцию g, при любых $\nu \in \mathrm{N}$ и $\sigma \in (0, \frac{\beta_\nu - \alpha_\nu}{2})$ имеем

$$g(x) = g(\tfrac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2}) + \int_{\frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2}}^{x} g'(\xi)\, d\xi = g(\tfrac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2})$$

для всех $x \in [\alpha_\nu + \sigma, \beta_\nu - \sigma]$, откуда, в силу произвольности σ и непрерывности функции g, получаем $g(x) = g(\frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2})$ для всех $x \in [\alpha_\nu, \beta_\nu]$. Следовательно, образ отрезка $[a, b]$ при отображении g представляется в виде $g([a, b]) = \{g(\frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2})\}_{\nu \in \mathrm{N}} \cup g(E \cup a \cup b)$ и является не более чем счетным множеством, что, при условии непрерывности функции g, возможно лишь в случае, когда g постоянна на $[a, b]$. $\square$

Теорема 1. *Пусть функция $K \in L_1$ такая, что ее преобразование Фурье — функция $\widetilde{K}$, является локально абсолютно непрерывной на числовой прямой и имеет не более чем счетное множество нулей. Тогда оператор свертки, порожденный функцией K, является взаимно-однозначным отображением пространства L_p на себя при любом $p \in (2, \infty)$.*

Доказательство. Вначале покажем, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ — пространства бесконечно дифференцируемых на числовой прямой функций с компактными носителями, выполняется равенство

$$\begin{gathered} \int_{-\infty}^{\infty} (K * f)(x) \widetilde{\varphi}(x)\, dx = \\ = -\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{K}'(\xi) g(\xi) \varphi(\xi)\, d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{K}(\xi) g(\xi) \varphi'(\xi)\, d\xi, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\widetilde{\varphi}$ — преобразование Фурье функции φ, $\widetilde{K}'$ и φ' — производные функций $\widetilde{K}$ и φ, g — преобразование функции f вида

$$g(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\frac{e^{iy\xi}-1}{iy}\,dy. \tag{3.2}$$

Затем, используя (3.1) и лемму 2, покажем, что равенство $K * f = 0$ влечет $f = 0$.

Итак, с помощью неравенства для сверки функций из пространств L_p, $p \in [1,\infty)$ (2.7), неравенства Гельдера и непосредственного интегрирования получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|(K*f)(x)\widetilde{\varphi}(x)|\,dx \le \|K\|_1\|f\|_p\|\widetilde{\varphi}\|_q, \quad 1/q+1/p=1,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}|K(x-y)|\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\xi)|\,d\xi\Big)dx = \|K\|_1\|\varphi\|_1.$$

Следовательно, согласно теореме Фубини

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)f(y)\,dy\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi\Big)dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}f(y)\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi\Big)dx\,dy = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}f(y)\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)e^{i(x-y)\xi}\,dx\Big)\varphi(\xi)e^{iy\xi}\,d\xi\,dy = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}f(y)\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{K}(\xi)\varphi(\xi)e^{iy\xi}\,d\xi\,dy.\end{gathered} \tag{3.3}$$

При этом в результате интегрирования по частям имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{K}(\xi)\varphi(\xi)e^{iy\xi}\,d\xi = -\int_{-\infty}^{\infty}(\widetilde{K}'(\xi)\varphi(\xi)+\widetilde{K}(\xi)\varphi'(\xi))\frac{e^{iy\xi}-1}{iy}\,d\xi. \tag{3.4}$$

Кроме того, в силу неравенства Гельдера

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|f(y)\frac{e^{iy\xi}-1}{iy}\Big|\,dy \le \|f\|_p\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{e^{iy\xi}-1}{iy}\Big|^q dy\Big)^{1/q} = [z=y\xi] = \\ = \|f\|_p\Big(\frac{1}{|\xi|}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\frac{e^{iz}-1}{iz}\xi\Big|^q dz\Big)^{1/q} = C|\xi|^{1-1/q} = C|\xi|^{1/p},\end{gathered} \tag{3.5}$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{K}'(\xi)\varphi(\xi)+\widetilde{K}(\xi)\varphi'(\xi)|\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\Big|f(y)\frac{e^{iy\xi}-1}{iy}\Big|\,dy\Big)d\xi \le$$
$$\le C(\|\widetilde{K}\varphi'|\xi|^{1/p}\|_1+\|\widetilde{K}'\varphi|\xi|^{1/p}\|_1),$$

и значит, согласно теореме Фубини

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{K}'(\xi)\varphi(\xi) + \widetilde{K}(\xi)\varphi'(\xi)) \frac{e^{iy\xi} - 1}{iy} \, d\xi \, dy =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{K}'(\xi) g(\xi)\varphi(\xi) \, d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{K}(\xi) g(\xi)\varphi'(\xi) \, d\xi,$$

где $g(\xi)$ определяется равенством (3.2). Отсюда, учитывая (3.3) и (3.4), получаем (3.1).

Рассмотрим функцию g, определенную равенством (3.2). Она является преобразованием функции $f \in L_p$, $p \in [1, \infty)$, таким, что при $p \in [1, 2]$ $g'(\xi) = \widetilde{f}(\xi)$ почти для всех $\xi \in \mathbb{R}$ ($\widetilde{f}$ — преобразование Фурье функции f) см., например, [3, §3 гл. XVI]; при $p \in (2, \infty)$ указанное свойство может не выполняться (пример см. там же). Тем не менее, если предположить, что $K * f = 0$ для $f \in L_p$, $p \in (2, \infty)$, то получим, что функция g постоянна на числовой прямой, т.е. в некотором смысле преобразование Фурье функции f в этом случае есть нуль. Действительно, согласно оценке (3.5) $|g(\xi) - g(\xi_0)| \le C|\xi - \xi_0|^{1/p}$ при любых $\xi_0, \xi \in \mathbb{R}$, поэтому g, $\widetilde{K}g$ — непрерывные функции, а $\widetilde{K}'g$ — локально интегрируемая на числовой прямой функция. Следовательно, учитывая, что $K * f = 0$, из (3.1) получаем

$$\widetilde{K}(x)g(x) - \widetilde{K}(x_0)g(x_0) = -\int_{x_0}^{x} \widetilde{K}'(\xi) g(\xi) \, d\xi \quad \text{для всех} \quad x_0, x \in \mathbb{R},$$

т.е. функция g абсолютно непрерывна на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \setminus E$, где E — множество нулей функции $\widetilde{K}$; при этом $g'(x) = 0$ почти для всех $x \in [\alpha, \beta]$, и легко проверить, что множество нулей непрерывной функции замкнуто. Следовательно, в силу леммы 2 функция g постоянна на числовой прямой. Продолжая рассуждения, получаем, что для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ в этом случае должны выполняться следующие равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g'(x)\varphi(x) \, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi'(x) \, dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{e^{iyx} - 1}{iy} \, dy \right) \varphi'(x) \, dx = 0.$$

При этом, согласно (3.5), имеем оценку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(y) \frac{e^{iyx} - 1}{iy} \right| dy \right) |\varphi'(x)| \, dx \le C \|\varphi' |x|^{1/p}\|_1$$

и в результате интегрирования по частям получаем равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) \frac{e^{iyx} - 1}{iy} \, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{iyx} \, dx = -\widetilde{\varphi}(y).$$

Отсюда $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\widetilde{\varphi}(y)\,dy = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ и, следовательно, $f = 0$, поскольку образ пространства $\mathcal{D}$ при преобразовании Фурье достаточно богат функциями (см. [1, §4 гл. VI]). □

Рассмотрим теперь вопрос о существовании обратного оператора к оператору свертки, порожденному функцией $K \in L_1$, на пространстве C_0, непрерывных на числовой прямой функций, стремящихся к нулю на бесконечности.

Теорема 2. *Пусть функция K является обратным преобразованием Фурье функции $\widetilde{K}$, принадлежащей пространству Соболева W_2^1 и не имеющей нулей на всей числовой прямой. Тогда оператор свертки, порожденный функцией K, является взаимно-однозначным отображением пространства C_0 на себя.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что образ пространства W_2^1 при преобразовании Фурье содержится в пространстве L_1 (см., например, [6, с. 57–58]), поэтому данная формулировка теоремы корректна.

Покажем, что равенство $K * f = 0$ для $f \in C_0$ возможно лишь при $f = 0$. Действительно, из равенства $K * f = 0$ следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (K * f)(x) g(x)\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad g \in L_1.$$

Возьмем функции вида $\varphi/\widetilde{K}$, где $\varphi \in \mathcal{D}$. Они, понятно, принадлежат пространству W_2^1, и, значит (как отмечено выше), их преобразования Фурье принадлежат пространству L_1. При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |K(x-y)f(y)F[\varphi/\widetilde{K}](x)|\,dy\,dx \le M\|K\|_1\|F[\varphi/\widetilde{K}]\|_1,$$

где $M = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $F[\varphi/\widetilde{K}](x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(\xi)/\widetilde{K}(\xi))e^{ix\xi}\,d\xi$. Поэтому по теореме Фубини

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)f(y)\,dy\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{\widetilde{K}(\xi)}e^{ix\xi}\,d\xi\,dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{\widetilde{K}(\xi)}e^{ix\xi}\,d\xi\,dx\,dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{\widetilde{K}(\xi)}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)e^{ix\xi}\,dx\,d\xi\,dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{iy\xi}\,d\xi\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\widetilde{\varphi}(y)\,dy,
\end{aligned}$$

т.е. получаем, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\widetilde{\varphi}(y)dy = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}$, но отсюда следует равенство $f = 0$, поскольку образ пространства $\mathcal{D}$ при преобразовании Фурье достаточно богат функциями (см. [1, §4 гл. VI]). □

Теперь обратимся к вопросу о плотности множества значений оператора свертки, порожденного функцией $K \in L_1$, на пространстве L_p, $p \in [1, \infty)$, и C_0.

Теорема 3. *Если оператор свертки, порожденный функцией $K \in L_1$, на пространстве L_q, $q \in (1, \infty)$, имеет обратный оператор, то множество значений оператора свертки, порожденного функцией K, на пространстве L_p, $1/p + 1/q = 1$, всюду плотно в пространстве L_p.*

Доказательство. Для доказательства плотности образа в пространстве L_p достаточно показать, что образ пространства $\mathcal{D}$ при отображении оператором свертки, порожденным функцией K, является всюду плотным в пространстве L_p. Для этого достаточно установить, что из равенства

$$\Phi(K * \varphi) = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{3.6}$$

где Φ — линейный ограниченный функционал на L_p, следует, что $\Phi = 0$.

Предположим, что (3.6) выполняется. Тогда при некотором $f \in L_q$, $1/q + 1/p = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\biggl(\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\varphi(y)\,dy\biggr)dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

В силу неравенства Гельдера и неравенства для сверки функций (2.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)K(x-y)\varphi(y)|\,dy\,dx \le \|f\|_q\|K\|_1\|\varphi\|_p,$$

следовательно, согласно теореме Фубини

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\biggl(\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\varphi(y)\,dy\biggr)dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\biggl(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K(x-y)\,dx\biggr)\varphi(y)\,dy = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\varphi(y)\,dy = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

где

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K(-y-x)f(-x)\,dx.$$

Отсюда, поскольку $g \in L_q$, а $\mathcal{D}$ всюду плотно в L_p, следует, что $g = 0$; и, значит, $f = 0$ в силу существования обратного оператора к оператору свертки, порожденному функцией K, на пространстве L_q, что и требовалось показать. □

Таким образом, если оператор свертки, порожденный функцией $K \in L_1$, на пространстве L_p имеет обратный оператор при любом $p \in (1, \infty)$, то множество его значений всюду плотно в пространствах L_p, $p \in (1, \infty)$. Более того, множество значений такого оператора свертки всюду плотно и в пространстве C_0, об этом свидетельствует

Теорема 4. *Если оператор свертки, порожденный функцией $K \in L_1$, на пространстве L_2 имеет обратный оператор, то множество значений оператора свертки, порожденного функцией K, на пространстве L_p всюду плотно в пространстве L_p при любом $p \in [2, \infty)$. Данное утверждение верно и для пространства C_0.*

Доказательство. Нетрудно показать, аналогично доказательству теоремы 3, что образ пространства $\mathcal{D}$ при отображении оператором свертки, порожденным функцией K, является всюду плотным в пространстве Соболева W_2^1. Отсюда, поскольку пространство W_2^1 плотно вложено в пространства L_p, $p \in [2, \infty)$, и C_0 (см. [8, п. 6.1 гл. 6]), получаем, что в этих пространствах рассматриваемый образ также является всюду плотным. $\square$

Что касается пространства L_1, то в этом случае, непосредственно исходя из свойств преобразования Фурье, получаем следующее: для того чтобы множество значений оператора свертки, порожденного функцией $K \in L_1$, на пространстве L_1 было всюду плотным в пространстве L_1 необходимо, чтобы преобразование Фурье функции K, не имело нулей на числовой прямой.

Список литературы

1. Гельфанд И. М. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М. : Физматгиз, 1958. – 308 с.
2. Гельфанд И. М. Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М. : Физматгиз, 1958. – 275 с.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2 / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – 538 с.
4. Иванов В. К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В. К. Иванов, И. В. Мельникова, А. И. Филинков. – М. : Наука, 1995. – 176 с.
5. Мельникова И. В. Полугрупповая регуляризация дифференциальных задач / И. В. Мельникова // Докл. РАН. – 2003. – Т. 393, № 6. – С. 1–5.
6. Мельникова И. В. Регуляризация некорректных дифференциальных задач Коши в пространствах $L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ / И. В. Мельникова, М. В. Вдовин // Spectral and Evolution Problems : Proceedings of the Seventeenth Crimean autumn mathematical school-symposium. – 2007. – Vol. 17. – P. 56–64.
7. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – М. : Наука, 1974. – 480 с.

8. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1977. – 456 с.
9. Melnikova I. V. Regularization of weakly ill-posed Cauchy problems / I. V. Melnikova, Q. Zheng and J. Zhang // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2002. – Vol. 10, N 5.
10. Melnikova I. V. Peculiarities and regularization of ill-posed Cauchy problems with differential operators / I. V. Melnikova, U. A. Anufrieva // Journal of Mathematical Sciences. – 2008. – Vol. 148, N 4. – P. 481–632.

M. V. Vdovin

Invertibility of Convolution Operator in L_p Spaces in Applications to R-semigroups

Abstract. Sufficient conditions for existence of an inverse operator to convolution operator in $L_p(\mathbb{R})$, $p \in (2, \infty)$, spaces and sufficient conditions for density of the convolution operator range are obtained. These convolution operator properties considered in applications to a wide class of regularizing semigroups — to R-semigroups.

Keywords: convolution operator; L_p spaces; invertibility of convolution operator; R-semigroup; regularization method

Вдовин Максим Валерьевич, аспирант, Уральский государственный университет им. А. М. Горького, 620083, Екатеринбург, проспект Ленина, 51 тел.: (343) 350-67-41 (vdmax@rambler.ru)

Vdovin Maxim, Ural State University, Pr. Lenina 51, Ekaterinburg, 620083 postgraduate, Phone: (343) 350-67-41 (vdmax@rambler.ru)