Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 3. С. 83—98

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.7

Надстуктура классов самодвойственных k-значных функций *

В. Б. Ларионов
ООО «Атес Медика Софт»

В. С. Федорова
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики

Аннотация. В статье приведено полное описание решетки замкнутых классов, содержащих произвольный класс самодвойственных функций многозначной логики.

Ключевые слова: многозначная логика; самодвойственная функция; надструктура.

1. Основные определения

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Функция $f(x_1, \ldots, x_n) : E_k^n \to E_k$ называется функцией k-значной логики ($k \geqslant 2$). Множество всех функций k-значной логики обозначим через P_k. В работе рассматриваются замкнутые относительно операции суперпозиции классы функций.

Определение 1. *Пусть $p(x_1, \ldots, x_m)$ — некоторый предикат, определенный на E_k^m, $f(y_1, \ldots, y_n)$ — функция из P_k. Говорят, что функция $f(y_1, \ldots, y_n)$ сохраняет предикат $p(x_1, \ldots, x_m)$, если для любых n наборов $\tilde{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$), удовлетворяющих предикату p, набор $f(a_{11}, \ldots, a_{n1})$, ..., $f(a_{1m}, \ldots, a_{nm})$ также удовлетворяет предикату p. По определению будем считать, что тождественно ложный предикат сохраняет любая функция.*

Обозначим через $\mathrm{Pol}(p)$ множество функций, сохраняющих предикат p.

* Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

На множестве предикатов вводятся следующие операции: отождествление переменных, проекция или добавление квантора существование по какой-либо переменной, конъюнкция. Для произвольного множества предикатов P через $[P]$ будем обозначать замыкание P относительно указанных операций. Подробное определение этих операций можно найти в [2] и [3].

Приведем вначале несколько вспомогательных фактов, касающихся свойств предикатов.

Лемма 1 ([2]). *Если $p_1 \in [p_2]$, то* $\mathrm{Pol}(p_2) \subseteq \mathrm{Pol}(p_1)$.

Лемма 2 ([2]). *Пусть p — предикат местности $n > 1$. Если существуют различные номера $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ такие, что для любого набора $\tilde{a}$ из $p(\tilde{a}) = TRUE$ следует $a_i = a_j$, то справедливо*

$$\mathrm{Pol}(p(x_1, \ldots, x_n)) = \mathrm{Pol}(\exists y p(x_1, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_n)).$$

Лемма 3 ([5]). *Пусть $p = p_1 \,\&\, \cdots \,\&\, p_m$, где предикаты $p_1, \ldots, p_m$ не имеют общих переменных. Тогда*

$$\mathrm{Pol}\, p = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Pol}\, p_i.$$

Обозначим предикат $d(x_1, x_2) = (x_1 = x_2)$.

Лемма 4. *Пусть предикат R таков, что $d \in [R]$, A — произвольный замкнутый класс, содержащий $\mathrm{Pol}\, R$. Тогда для любого предиката $p \in \mathrm{Inv}\, A$ справедливо $p \in [R]$.*

Доказательство. Согласно [2] $\mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}\, R = [R]$. Используя соотношение $\mathrm{Pol}\, R \subseteq A$, получаем $\mathrm{Inv}\, A \subseteq \mathrm{Inv}\,\mathrm{Pol}\, R = [R]$. Отсюда для любого $p \in \mathrm{Inv}\, A$ выполнено $p \in [R]$. □

Пусть на множестве E_k задана некоторая подстановка σ.

Определение 2. *Функция k-значной логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется самодвойственной относительно подстановки σ, если выполнено следующее тождество: $f(x_1, \ldots, x_n) = \sigma^{-1}(f(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)))$, где через σ^{-1} обозначена подстановка, обратная к σ.*

Известно [4], что множество всех функций из P_k, самодвойственных относительно σ, является замкнутым классом. Обозначим этот класс через S_σ. Указанный класс является предполным тогда и только тогда, когда подстановка σ распадается в произведение циклов одинаковой длины, являющейся простым числом [4].

Зафиксируем некоторую подстановку σ на E_k. Обозначим множество $M_d = \{a \in E_k : \sigma^d(a) = a\}$, где $d > 0$. Иными словами, M_d — множество элементов E_k, образующих циклы подстановки σ, длины которых кратны числу d. Тот факт, что число a делится на число b, будем обозначать через $b|a$.

Лемма 5. *Пусть элементы множества M_d образуют циклы подстановки σ с длинами $m_1, \ldots, m_p$, тогда $M_d = M_{\text{НОК}\,(m_1,\ldots,m_p)}$.*

Согласно последней лемме, мы можем рассматривать только множества M_d, где число d равно наименьшему общему кратному длин циклов подстановки σ, элементы которых образуют рассматриваемое множество M_d. Обозначим множество указанных чисел d через D_σ. Через h_σ обозначим наименьшее общее кратное длин всех циклов подстановки σ.

Введем двухместные предикаты $R_{d,i}$ такие, что $R_{d,i}(a, b) = TRUE$ тогда и только тогда, когда $a, b \in M_d$ и $b = \sigma^i(a)$. Обозначим классы $S_{d,i} = \operatorname{Pol} R_{d,i}$. Из [5] следует, что $S_{h_\sigma,i} = S_{\sigma^i}$. Обозначим предикат $R_\sigma = R_{h_\sigma,1}$.

Лемма 6. *Для произвольных $d, j > 0$ выполнено $S_\sigma \subseteq S_{d,j}$.*

Доказательство. Согласно нашим обозначениям $S_\sigma = \operatorname{Pol} R_\sigma$, $S_{d,j} = \operatorname{Pol} R_{d,j}$.

По определению предикатов $R_{d,j}$ справедливо следующее соотношение:

$$R_{d,j} = \exists y_1, \ldots, y_{j+d-2} R_\sigma(x_1, y_1) \,\&\, R_\sigma(y_1, y_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R_\sigma(y_{j-1}, x_2) \,\&\, \\ \&\, R_\sigma(x_1, y_j) \,\&\, R_\sigma(y_j, y_{j+1}) \,\&\, \ldots \,\&\, R_\sigma(y_{j+d-2}, x_1). \tag{1.1}$$

Получаем, что $R_{d,j} \in [R_\sigma]$. Использование леммы 1 завершает доказательство. □

Лемма 7. *Для произвольного $d > 0$ и $i, j > 0$ таких, что $i|j$, выполнено $S_{d,i} \subseteq S_{d,j}$.*

Доказательство. Напомним, что $S_{d,i} = \operatorname{Pol}(R_{d,i})$ и $S_{d,j} = \operatorname{Pol}(R_{d,j})$. Пусть $j = ih$. По определению предикатов $R_{d,m}$ имеем: $R_{d,j}(x_1, x_2) = \exists y_1, \ldots, y_{h-1} R_{d,i}(x_1, y_1) \,\&\, R_{d,i}(y_1, y_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R_{d,i}(y_{h-1}, x_2)$. В силу леммы 1 получаем утверждение леммы. □

Следствие 1. *Если $c = ab \pmod d$, где $d \in D_\sigma$, то $S_{d,a} \subseteq S_{d,c}$.*

Доказательство. По лемме 7 получаем, что $S_{d,a} \subseteq S_{d,ab}$. Но поскольку по определению числа d справедливо $\sigma^{ab}(x) = \sigma^c(x)$ для любого $x \in M_d$, то $R_{d,ab} = R_{d,c}$. Получаем, что $S_{d,ab} = S_{d,c}$. □

Лемма 8. *Пусть $d \in D_\sigma$, $1 < i < d$, $j = \text{НОД}(i, d)$. Тогда справедливо $S_{d,i} = S_{d,j}$.*

Доказательство. Из условия и алгоритма Евклида [1] получаем, что существуют целые числа a, b такие, что справедливо $ad + bi = j$. Это эквивалентно $bi = j \pmod d$. По следствию леммы 7 получаем $S_{d,i} \subseteq S_{d,j}$. С другой стороны, непосредственно из условия данной леммы и леммы 7 следует, что $S_{d,j} \subseteq S_{d,i}$. □

Следствие 2. *Любой класс вида $S_{d,i}$, где i не делит d, совпадает с некоторым классом $S_{d,j}$, где $j|d$.*

Используя данное следствие и лемму 5, будем рассматривать только классы $S_{d,i}$ и предикаты $R_{d,i}$, где i — делитель числа d, $d \in D_\sigma$.

2. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим некоторые понятия, связанные с графами.

Определение 3. *Путем из вершины v_1 в вершину v_2 в ориентированном графе G будем называть любую последовательность ребер вида $\{(v_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_3), \ldots, (w_m, v_2)\}$ (вершины и ребра в последовательности могут повторяться). Ориентация ребер указанной последовательности может быть любой. Замкнутым называется путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. Циклом называется замкнутый путь, в котором каждая вершина встречается не более одного раза (кроме первой и последней). Длиной пути будем называть разность количества ребер, пройденных в прямом направлении, и количества ребер, пройденных в обратном.*

Лемма 9. *Пусть все циклы связного орграфа G имеют длины $c_1, \ldots, c_q$. Тогда для любой вершины v и любого целого α в графе G существует замкнутый путь длины αc, где $c = \text{НОД}(|c_1|, \ldots, |c_q|)$, проходящий через вершину v. Замкнутых путей с другими длинами в графе G нет.*

Доказательство. Поскольку знак чисел c_i зависит от направления обхода соответствующего цикла, будем считать, что все $c_i > 0$.

Докажем вначале, что для любых целых $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ граф G содержит замкнутый путь длины $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i c_i$.

Мы можем пройти α_1 раз цикл длины c_1 (знак числа α_1 указывает направление обхода). Поскольку граф связный, существует путь S' от какой-нибудь вершины указанного цикла к какой-то вершине цикла длины c_2. Пройдем по нему в прямом направлении, пройдем α_2 раз цикл длины c_2, затем вернемся по S' к первому циклу. Получим замкнутый путь длины $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$ (поскольку длина пути S' из-за его прохождения в прямом и обратном направлении будет присутствовать в сумме с плюсом и с минусом). Рассуждая аналогично для циклов с длинами $c_3, \ldots, c_q$, получим, что в графе G существуют замкнутые пути с длинами $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i c_i$ для всевозможных целых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$.

Покажем теперь, что других замкнутых путей в G нет.

Рассмотрим произвольный замкнутый путь C в G. Пусть v — некоторая вершина, входящая в путь C. Пойдем по ребрам C из указанной вершины. Если некоторая вершина w встретится второй раз (возможно

$w = v$), то разрежем C на два замкнутых пути: T_1 — участок пути C между двумя вхождениями вершины w и замкнутый путь $C_1 = C \setminus T_1$. По построению каждая вершина входит в T_1 один раз. Возможны варианты: либо T_1 представляет собой замкнутый путь, состоящий из одного ребра, проходимого в прямом и обратном направлении, либо T_1 — цикл графа G. Проделаем теперь аналогичную процедуру для замкнутого пути C_1 и так далее. В итоге мы разобъем замкнутый путь C на множество циклов графа G, а также вырожденные замкнутые пути, состоящие из одного ребра, проходимого два раза. Длины последних путей равны 0, поэтому исключим их из рассмотрения. Поскольку каждое ребро C войдет в некоторый цикл или вырожденный замкнутый путь длины 0, то получаем, что длина пути C равна сумме длин некоторых циклов графа G, то есть длина C имеет вид $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i c_i$ (каждый цикл в C может проходиться несколько раз).

Пусть теперь $c = \text{НОД}(c_1, \ldots, c_q)$. Согласно алгоритму Евклида, существуют целые числа $b_1, \ldots, b_q$ такие, что $\sum_{i=1}^{q} b_i c_i = \text{НОД}(c_1, \ldots, c_q) = c$. По доказанному выше в графе G существует замкнутый путь длины c. Учитывая связность графа G, получаем требуемое. □

Определение 4. *Пусть все циклы связного орграфа G имеют длины $c_1, \ldots, c_q$. Через $c(G)$ будем обозначать величину* $\text{НОД}(|c_1|, \ldots, |c_q|)$.

Следствие 3. *Пусть в связном орграфе G из вершины v в вершину w существует путь длины l. Тогда любой путь из вершины v в вершину w имеет длину $l + \alpha c(G)$, где α — некоторое число.*

Лемма 10. *1. Пусть G_1, G_2 — связные орграфы. Обозначим через G_3 граф, полученный склейкой некоторой вершины v графа G_1 и вершины w графа G_2 (при этом считаем, что множества вершин графов G_1 и G_2 не пересекаются). Тогда $c(G_3) = \text{НОД}(c(G_1), c(G_2))$.*

2. Пусть G — связный граф. Обозначим через G_1 граф, полученный склейкой некоторых вершин v и w графа G. Пусть в G между вершинами v и w — путь длины l. Тогда $c(G_1) = \text{НОД}(c(G), l)$.

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Отметим, что по определению цикла в графе G_3 присутствуют только циклы, имеющиеся в графах G_1, G_2. Но тогда по лемме 9 и определению величины $c(G)$ справедливо $c(G_3) = \text{НОД}(c(G_1), c(G_2))$.

Перейдем ко второму утверждению. Любой цикл графа G_1 либо является циклом графа G, либо получается из некоторого пути в графе G между вершинами v и w. По лемме 9 длины $c_1, \ldots, c_q$ всех циклов графа G кратны числу $c(G)$. По следствию 3 любой путь между вершинами v и w имеет длину $l + \alpha c(G)$, где α — некоторое целое число. Отметим, что в графе G найдется хотя бы один путь указанного вида без повторений вершин и ребер. Данный путь образует цикл в графе G_1. Обозначим его длину $l + \alpha_0 c(G)$.

Получаем, что граф G имеет циклы с длинами $c_1, \ldots, c_q, l+\alpha_0 c(G)$ и возможно еще циклы с длинами вида $l+\alpha_i c(G)$, где α_i — целые числа ($i \in \{1, \ldots, p\}$, $p \geqslant 0$). Окончательно имеем

$$c(G_1) = \text{НОД}(c_1, \ldots, c_q, l+\alpha_0 c(G), l+\alpha_1 c(G), \ldots, l+\alpha_p c(G)) =$$

$$= \text{НОД}(c(G), l).$$

□

Пусть предикат $p \in [R_\sigma]$, где R_σ — предикат, задающий класс самодвойственных функций S_σ. Пусть F — формула, реализующая предикат p над $\{R_\sigma\}$. Везде далее будем считать, что в формуле F вынесены вперед все кванторы существования. Сопоставим F ориентированный граф $G(F)$ по следующему правилу: между множеством вершин $G(F)$ и множеством переменных F (учитываем и свободные и связанные) существует взаимно однозначное соответствие. Вершину, соответствующую переменной x, пометим символом "x если переменная x свободная и "$\exists x$ если связанная. Данную вершину для краткости изложения будем обозначать v_x. В графе $G(F)$ есть ориентированное ребро (v_x, v_y) тогда и только тогда, когда в формуле F содержится запись $R_\sigma(y, x)$.

Отметим, что по графу формулы $G(F)$ формула F с вынесенными вперед кванторами существования восстанавливается однозначно. Поэтому вместо выражения $c(G(F))$ будем для краткости писать $c(F)$.

Пусть $v_{y_1}, \ldots, v_{y_N}$ — все вершины графа $G(F)$. Предположим, что длины всех путей от вершины v_i до v_j образуют множество $D_{i,j}$. Оставим в каждом таком множестве по одному минимальному неотрицательному элементу $d_{i,j}$. Отметим, что по лемме 9 множество $D_{i,j}$ содержит числа $(d_{i,j} + \alpha c(F)) \pmod{h_\sigma}$ для всех α, откуда $0 \leqslant d_{i,j} < c(F)$.

Условимся, что первые n переменных из множества $\{y_1, \ldots, y_N\}$ и только они являются свободными переменными предиката p.

Лемма 11. *Предикату $p(y_1, \ldots, y_n)$ удовлетворяют все наборы $(\sigma^{d_{i,1}}(b)$, $\sigma^{d_{i,2}}(b)$,$\ldots$, $\sigma^{d_{i,i-1}}(b)$, b, $\sigma^{d_{i,i+1}}(b)$,$\ldots$, $\sigma^{d_{i,n}}(b))$ и только они, где b — произвольный элемент множества $M_{c(F)}$, произвольное $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Пусть набор $\tilde{a}$ таков, что $p(a_1, \ldots, a_n) = TRUE$. Рассмотрим некоторую компоненту a_i указанного набора. По лемме 9 существует замкнутый путь длины $c(F)$, проходящий через вершину v_{y_i}. По определению графа G_F получаем, что $\sigma^{c(F)}(a_i) = a_i$, откуда $a_i \in M_{c(F)}$. Пусть $j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Между вершинами v_{y_i} и v_{y_j} существует путь длины $d_{i,j}$. Следовательно, должно выполняться соотношение $a_j = \sigma^{d_{i,j}}(b)$. Получаем, что никакие наборы, кроме тех, что указаны в формулировке леммы, не могут удовлетворять предикату p.

Пусть теперь набор $\tilde{a}$ удовлетворяет формулировке леммы. Зафиксируем некоторое число $i \in \{1, \ldots, n\}$ и обозначим $a_i = b$. Присвоим каждой переменной y_j предиката p (свободной и связанной) значение, равное $\sigma^{d_{i,j}}(b)$. Покажем далее, что $p(\tilde{a}) = TRUE$.

Рассмотрим произвольное вхождение сомножителя $R_\sigma(y_j, y_q)$ в формулу F, задающую предикат p над $\{R_\sigma\}$. Переменные y_j и y_q примут соответственно значения $a_j = \sigma^{d_{i,j}}(b)$ и $a_q = \sigma^{d_{i,q}}(b)$. Сомножителю $R_\sigma(y_j, y_q)$ в $G(F)$ соответствует ребро (v_{y_q}, v_{y_j}). Отметим, что в графе $G(F)$ существуют пути от вершины v_{y_i} к вершинам v_{y_q} и v_{y_j} с длинами соответственно $d_{i,q}$ и $d_{i,j}$. Составим новый путь из вершины v_{y_i} в вершину v_{y_j} через v_{y_q} длины $d_{i,q}+1$. По следствию 3 существует целое число α такое, что $d_{i,j} = d_{i,q} + 1 + \alpha c(F)$.

Учитывая, что $a_q \in M_{c(F)}$, получаем

$$a_j = \sigma^{d_{i,j}}(b) = \sigma^{d_{i,q}+1+\alpha c(F)}(b) = \sigma^{1+\alpha c(F)}(a_q) = \sigma(a_q),$$

откуда $R_\sigma(a_j, a_q) = TRUE$. При описанном присвоении произвольный сомножитель в формуле F истинен, откуда $p(\tilde{a}) = TRUE$. □

Обозначим через $G_{d,j}$ графы, соответствующие формулам $F_{d,j}$ из выражения (1.1), задающим предикаты $R_{d,j}$ над $\{R_\sigma\}$.

Лемма 12. *Пусть* $P = \{R_{d_1,i_i}, \ldots, R_{d_m,i_m}\}$, $d_0 = \text{НОД}(d_1, \ldots, d_m)$, $M_{d_0} \neq \emptyset$. *Тогда для любых целых чисел* a_i, b_i $(i \in \{1, \ldots, m\})$ *справедливо* $R_{t,p} \in [P]$, *где* $t = \text{НОД}(d_0, \sum\limits_{j=1}^{m} a_j i_j)$ *и* $p = \sum\limits_{i=1}^{m} b_j i_j \pmod p$.

Доказательство. Рассмотрим следующий предикат:

$$R_{d_0}(x) = \exists y_1, \ldots y_m R_{d_1,i_1}(x, y_1) \,\&\, R_{d_2,i_2}(x, y_2) \ldots \,\&\, R_{d_m.i_m}(x, y_m). \quad (2.1)$$

Указанный предикат можно реализовать формулой F_0 над $\{R_\sigma\}$, полученной подстановкой в выражение (2.1) формул F_{d_j,i_j} (выражение (1.1)) для предикатов R_{d_j,i_j}. Отметим, что граф G_{F_0} получается соединением графов G_{d_j,i_j} по одной вершине. Используя лемму 10, получаем, что $c(F_0) = \text{НОД}(d_1, \ldots, d_m) = d_0$. Откуда по лемме 11 имеем, что $R_{d_0}(b) = TRUE$ тогда и только тогда, когда $b \in M_{d_0}$.

Введем следующие предикаты

$$\begin{gathered} R^n_{d_j,i_j}(x_1, x_2) = \\ \exists y_1, \ldots, y_{n-1} R_{d_j,i_j}(x_1, y_1) \,\&\, R_{d_j,i_j}(y_1, y_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R_{d_j,i_j}(y_{n-1}, x_2), \end{gathered} \quad (2.2)$$

$$\begin{gathered} \overline{R}_a(x) = \\ \exists y_1, \ldots, y_{s-1} R^{a_{j_1}}_{d_{j_1},i_{j_1}}(x, y_1) \,\&\, R^{a_{j_2}}_{d_{j_2},i_{j_2}}(y_1, y_2) \,\&\, \ldots \,\&\, R^{a_{j_s}}_{d_{j_s},i_{j_s}}(y_{s-1}, x_2), \end{gathered} \quad (2.3)$$

где $j_1, \dots, j_s$ — номера всех ненулевых чисел из множества $\{a_1, \dots, a_m\}$. Мы подразумеваем, что все связанные переменные предикатов $R^n_{d_j,i_j}$ различны и отличны от связанных переменных $y_1, \dots, y_{s-1}$ из формулы (2.2).

Обозначим через $F^n_{d_j,i_j}$ формулу для предиката $R^n_{d_j,i_j}$, получающуюся подстановкой формул F_{d_j,i_j} в выражение (2.2). По лемме 10 справедливо $c(F^n_{d_j,i_j}) = d_j$. Аналогично обозначим через $\overline{F}_a$ формулу для предиката $\overline{R}_a$, получающуюся подстановкой формул $F^n_{d_j,i_j}$ в выражение (2.3). По лемме 10 справедливо $c(\overline{F}_a) = \text{НОД}(d_{j_1}, \dots, d_{j_s}, \sum\limits_{j=1}^{m} a_j i_j)$. Используя лемму 11, имеем $\overline{R}_a(b) = TRUE$ тогда и только тогда, когда $b \in M_{c(\overline{F}_a)}$.

Обозначим $T_1(x) = R_{d_0}(x) \,\&\, \overline{R}_a(x)$. Заметим, что $M_{d_0} \bigcap M_{c(\overline{F}_a)} = M_t$, откуда получаем, что $T_1(b) = TRUE$ тогда и только тогда, когда $b \in M_t$.

Введем теперь предикат

$$R_b(x_1, x_2) =$$
$$\exists y_1, \dots, y_{r-1} R^{b_{s_1}}_{d_{s_1},i_{s_1}}(x_1, y_1) \,\&\, R^{b_{s_2}}_{d_{s_2},i_{s_2}}(y_1, y_2) \,\&\, \dots \,\&\, R^{b_{s_r}}_{d_{s_r},i_{s_r}}(y_{r-1}, x_2), \tag{2.4}$$

где $s_1, \dots, s_r$ — номера всех ненулевых чисел из множества $\{b_1, \dots, b_m\}$. Мы опять подразумеваем, что все связанные переменные предикатов $R^n_{d_j,i_j}$ различны и отличны от связанных переменных $y_1, \dots, y_{r-1}$ из формулы (2.4).

Обозначим через F_b формулу для предиката R_b, получающуюся подстановкой формул $F^n_{d_j,i_j}$ в выражение (2.4). По лемме 10 справедливо $c(F_b) = \text{НОД}(d_{s_1}, \dots, d_{s_r})$, а по лемме 11 — $R_b(x_1, x_2) = R_{c(F_b),p}$.

В силу $M_t \subseteq M(c(F_b))$ справедиво $R_{t,p}(x_1, x_2) = T_1(x_1) \,\&\, R_b(x_1, x_2)$.

Остается заметить, что согласно выражениям (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) предикаты R_{d_0}, $\overline{R}_a$, R_b реализуются формулами над множеством предикатов P. Следовательно, справедливо $R_{t,p} \in [P]$. $\square$

Лемма 13. *Пусть классы S_{d_1,i_1} и S_{d_2,i_2} таковы, что справедливо $M_{d_1} \subseteq M_{d_2}$ и $\text{НОД}(d_1, i_2)$ не делит i_1. Тогда существует функция F, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *$F \notin S_{d_1,i_1}$;*
2. *для любого $d_3 \in D_\sigma$ такого, что $M_{d_1} \nsubseteq M_{d_3}$, выполнено $F \in S_{d_3,m}$, где m — любое число;*
3. *для любого $d_4 \in D_\sigma$ такого, что $M_{d_2} \subseteq M_{d_4}$, и r такого, что $i_2 r$ делит h_{d_4}, выполнено $F \in S_{d_4,i_2 r}$.*

Доказательство. Обозначим $\pi_1 = \sigma^{i_1}$, $\pi_2 = \sigma^{i_2}$. Пусть множество M_{d_1} состоит из элементов, входящих в циклы подстановки π_1 с длинами $m_1, \dots, m_p$. Возьмем в каждом из указанных циклов по произвольному элементу $a_1, \dots, a_p$, пусть $b_q = \pi_1(a_q)$, $q = 1, \dots, p$.

Поскольку НОД(d_1, i_2) не делит i_1, то $d_1 \neq i_1$, откуда π_1 — не тождественная подстановка на множестве M_{d_1}. Получаем, что у подстановки π_1 на множестве M_{d_1} существует цикл длины, большей 1. Пусть элемент d принадлежит этому циклу.

Обозначим через F p-местную функцию, равную d на наборах $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ и $\tilde{b} = (b_1, \ldots, b_p)$; на любом наборе $\tilde{c} = (c_1, \ldots, c_p)$ таком, что существует число m: $c_q = \pi_2^m(a_q)$ для всех $q = 1, \ldots, p$ или $c_q = \pi_2^m(b_q)$ для указанных q, значение функции равно $\pi_2^m(d)$ (в дальнейшем множество наборов данного вида вместе с наборами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ будем обозначать C), на остальных наборах $F(\tilde{x}) = x_1$. Докажем корректность определения указанной функции.

Во-первых, покажем, что не существует чисел α, β таких, что $\pi_2^\alpha(\tilde{a}) = \pi_2^\beta(\tilde{b})$. Предположим противное, тогда для всех $q = 1, \ldots, p$ $\sigma^{i_2(\alpha-\beta)}(a_q) = b_q$ или $\sigma^{i_2(\alpha-\beta)-i_1}(a_q) = a_q$. Предположим, что элементы $a_1, \ldots, a_p$ входят в циклы исходной подстановки σ с длинами $m'_1, \ldots, m'_{p'}$, откуда $m'_j | (i_2(\alpha - \beta) - i_1)$ для любого $j \in \{1, \ldots, p'\}$. А поскольку мы условились, что $d_1 = \text{НОК}(m'_1, \ldots, m'_{p'})$, то $d_1 | (i_2(\alpha - \beta) - i_1)$. Следовательно, существуют константы k_1, k_2 такие, что справедливо $k_1 i_2 + k_2 d_1 = i_1$, откуда НОД(d_1, i_2) делит i_1. Получаем противоречие с условием леммы.

Во-вторых, если для некоторого t справедливо $\pi_2^t(a_q) = a_q$ для всех $q \in \{1, \ldots, p\}$, то для функции F должно выполняться

$$d = f(\tilde{a}) = f(\pi_2^t(a_1), \ldots, \pi_2^t(a_p)) = \pi_2^t(d),$$

что обеспечивается выбором элемента d.

Покажем теперь, что построенная функция удовлетворяет сформулированным условиям.

Согласно выбору элемента d, выполнено $\pi_1(d) \neq d$. Заметим, что элементы a_q $(q \in \{1, \ldots, p\})$ принадлежат множеству M_{d_1}, следовательно, указанному множеству принадлежат и все элементы b_q. Поскольку $b_q = \pi_1(a_q)$, то $R_{d_1,i_1}(a_q, b_q) = TRUE$ для любого $q \in \{1, \ldots, p\}$. Итак, получаем, что рассмотрение наборов $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ и $\tilde{b} = (b_1, \ldots, b_p) = (\pi_1(a_1), \ldots, \pi_1(a_p))$ для предиката R_{d_1,i_1} дает $F \notin \operatorname{Pol} R_{d_1,i_1} = S_{d_1,i_1}$.

Пусть $M_{d_1} \nsubseteq M_{d_3}$. Следовательно, существует цикл C_t подстановки σ длины m_t, элементы которого принадлежат множеству M_{d_1} и не принадлежат M_{d_3}. Рассмотрим любые два p-местных набора $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$, покомпонентно удовлетворяющие предикату $R_{d_3,m}$, где m — любое число. Из сказанного выше и того факта, что t-я компонента любого набора из множества C принадлежит циклу C_t, следует, что $\tilde{x}, \tilde{y} \notin C$. Получаем, что $R_{d_3,m}(F(\tilde{x}), F(\tilde{y})) = R_{d_3,m}(x_1, y_1) = TRUE$. Следовательно, $F \in \operatorname{Pol} R_{d_3,m} = S_{d_3,m}$.

Пусть, наконец, $M_{d_2} \subseteq M_{d_4}$, i_2, r удовлетворяют условиям леммы. Снова возьмем два произвольных набора $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, покомпонентно удовлетворяющих предикату $R_{d_4,i_2 r}$.

Предположим, что $\tilde{x} \in C$. Следовательно, существует m: $\tilde{x} = (\pi_2^m(a_1), \ldots,\pi_2^m(a_p))$, откуда $\tilde{y} = (\pi_2^{m+r}(a_1), \ldots, \pi_2^{m+r}(a_p))$ (либо указанные соотношения справедливы для набора $\tilde{b}$). Получаем, что $\tilde{y} \in C$. Итак, либо оба набора $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ принадлежат множеству C, либо оба не принадлежат C. Во втором случае $R_{d_4,i_2r}(F(\tilde{x}), F(\tilde{y})) = R_{d_4,i_2r}(x_1, y_1) = TRUE$. В первом случае будет выполнено

$$R_{d_4,i_2r}(F(\tilde{x}), F(\tilde{y})) = R_{d_4,i_2r}(F(\pi_2^m(\tilde{a})), F(\pi_2^{m+r}(\tilde{a})) =$$

$$= R_{d_4,i_2r}(d', \pi_2^r(d')) = TRUE,$$

где $d' = \pi_2^m(d)$ (поскольку $d \in M_{d_1}$, то $d' \in M_{d_1}$, откуда $d' \in M_{d_4}$).

Окончательно получаем, что $F \in \operatorname{Pol} R_{d_4,i_2r} = S_{d_4,i_2r}$. □

Лемма 14. *Пусть классы S_{d_1,i_1} и S_{d_2,i_2} таковы, что справедливо $M_{d_1} \subset E_k$, и у подстановки σ существует цикл $L \subseteq M_{d_2} \setminus M_{d_1}$ длины l, удовлетворяющей условию $l | \text{НОК}(i_2, d_1)$. Тогда существует функция G, удовлетворяющая условиям:*

1. *$G \notin S_{d_1,i_1}$;*
2. *для любого $d_3 \in D_\sigma$ такого, что $M_{d_1} \nsubseteq M_{d_3}$, выполнено $G \in S_{d_3,m}$, где m — любое число;*
3. *для любого $d_4 \in D_\sigma$ такого, что $M_{d_2} \subseteq M_{d_4}$, и r такого, что i_2r делит h_{d_4}, выполнено $G \in S_{d_4,i_2}$.*

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему. Обозначим $\pi_1 = \sigma^{i_1}$, $\pi_2 = \sigma^{i_2}$, возьмем по элементу a_i из каждого цикла подстановки π_1 на множестве M_{d_1} и составим из указанных элементов p-местный набор $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_p)$. Пусть элемент $d \in L$. Определим p-местную функцию G следующим образом. Положим $G(\tilde{a}) = d$; на любом наборе $\tilde{c} = (c_1, \ldots, c_p)$ таком, что существует число m: $c_q = \pi_2^m(a_q)$ для всех $q = 1, \ldots, p$, функция G равна $\pi_2^m(d)$. Обозначим указанное множество p-местных наборов (вместе с $\tilde{c}$) через C. На всех остальных наборах положим $g^\sigma_{d_1,i_1,L}(\tilde{x}) = x_1$.

Снова покажем корректность определения функции. Пусть число r — минимальное, удовлетворяющее условию $\pi_2^r(a_q) = a_q$ для всех $q \in \{1, \ldots, p\}$. Следовательно, элементы $a_1, \ldots, a_p$ входят в циклы исходной подстановки σ, длины которых делят число i_2r. Число $d_1 \in D_\sigma$ равно наименьшему общему кратному длин циклов исходной подстановки σ, элементы которых образуют множество M_{d_1}. Получаем, что $d_1 | i_2r$, или существует число t такое, что выполнено $i_2r = td_1$. Но поскольку r — минимальное число, удовлетворяющее условию $\pi_2^r(a_q) = a_q$ для всех $q \in \{1, \ldots, p\}$, то ни для какого числа $r' < r$ не справедливо $d_1 | i_2r'$, откуда

$$i_2r = td_1 = \text{НОК}(i_2, d_1). \tag{2.5}$$

По определению числа r для корректности определения функции G должно выполняться следующее соотношение:

$$d = G(\tilde{a}) = G(\pi_2^r(a_1), \ldots, \pi_2^r(a_p)) = \pi_2^r(d) = \sigma^{ri_2}(d).$$

Указанное равенство выполнено тогда и только тогда, когда элемент d принадлежит циклу подстановки σ, длина l которого делит число ri_2. Но по условию $l|\,\text{НОК}(i_2, d_1)$, откуда, согласно (2.5), получаем $l|i_2r$. Корректность определения функции G доказана.

Покажем, что функция G удовлетворяет сформулированным требованиям. Пусть $\tilde{b} = (\pi_1(a_1), \ldots, \pi_1(a_p))$. Первый пункт вытекает из соотношения $R_{d_1,i_1}(G(\tilde{a}), G(\tilde{b})) = R_{d_1,i_1}(d, G(\tilde{b})) = FALSE$ (поскольку $d \notin M_{d_1}$). Доказательства второго и третьего пунктов полностью повторяют аналогичные доказательства в предыдущей лемме. □

Докажем теперь важные следствия рассмотренных утверждений.

3. Классы, содержащие S_σ

Теорема 1. *В решетке замкнутых классов k-значной логики над классом самодвойственных функций S_σ находятся только классы вида $S_{d,i}$ и их пересечения.*

Доказательство. Из леммы 6 следует, что все классы $S_{d,i}$ содержат класс S_σ. Поэтому нам достаточно показать, что любой замкнутый класс A, содержащий класс S_σ, совпадает с одним из указанных классов.

Рассмотрим один из предикатов p, который сохраняют все функции системы A, то есть $p \in \text{Inv}(A)$. По лемме 4 получаем, что предикат p реализуется некоторой формулой F над $\{R_\sigma\}$. Сопоставим формуле F граф G_F.

Рассмотрим вначале случай, когда граф G_F связен.

Покажем, что замкнутый класс $\text{Pol}\, p$ совпадает с одним из классов вида $S_{d,i}$.

Перенумеруем вершины графа G_F. Будем предполагать, что первые n вершин $v_{x_1}, \ldots, v_{x_n}$ $(n \geqslant 1)$ графа G_F соответствуют свободным переменным $x_1, \ldots, x_n$ формулы F, остальные — связанным. Обозначим через $d_{i,j}$ минимальное неотрицательное расстояние от вершины v_{x_i} до вершины v_{x_j}.

Рассмотрим теперь следующие случаи.

Пусть предикат p — одноместный $(n = 1)$. По лемме 11 получаем, что $p(x) = TRUE$ тогда и только тогда, когда $x \in M_{c(F)}$. Согласно лемме 5 мы можем взять число $d \in D_\sigma$ такое, что $M_{c(F)} = M_d$. Тогда имеем $p(x) = R_{d,d}$, откуда $\operatorname{Pol} p = S_{d,d}$. Отметим, что в данном случае мы получили либо P_k, либо предполный центральный класс.

Пусть теперь предикат p двухместный ($n = 2$). Из леммы 11 следует, что $p(a, b) = TRUE$ тогда и только тогда, когда $a, b \in M_{c(F),\sigma}$ и $b = \sigma^{d_{1,2}}(a)$. Снова по лемме 5 возьмем число $d \in D_\sigma$ такое, что $M_{c(F)} = M_d$, а по следствию из леммы 8 число i — делитель d такое, что $S_{c(F),d_{1,2}} = S_{d,i}$.

Пусть теперь $n > 2$. Покажем, что в данном случае существует двухместный предикат R' такой, что $p \in [R']$, $R' \in [p]$, то есть $\operatorname{Pol}(p) = \operatorname{Pol}(R')$ (согласно лемме 1), а предикат R' относится ко второму случаю.

Рассмотрим множество элементов $d_{1,1}, \ldots, d_{1,n}$. Если среди них найдутся два равных $d_{1,i}$ и $d_{1,j}$, то согласно лемме 11 в любом наборе $\tilde{a} \in E_k^n$, удовлетворяющем предикату p, компоненты a_i и a_j будут равны. По лемме 2 мы можем перейти к предикату, задающему тот же класс $\operatorname{Pol} p$, в котором все числа $d_{1,1}, \ldots, d_{1,n}$ различны.

Применив алгоритм Евклида, получим, что существуют целые числа $b_1, \ldots, b_n$ такие, что

$$d = \text{НОД}(d_{1,1}, \ldots, d_{1,n}) = \sum_{i=1}^{n} b_i d_{1,i}. \tag{3.1}$$

По лемме 12 справедливо $R_{c(F),d_{1,i}} = R_{c(F),s_i d} \in [R_{c(F),d}]$. По леммам 11 и 12 получаем

$$p(x_1, \ldots, x_n) = R_{c(F),d_{1,2}}(x_1, x_2) \,\&\, R_{c(F),d_{1,3}}(x_1, x_3) \,\&\, \ldots \,\&\, R_{c(F),d_{1,n}}(x_1, x_n),$$

откуда $p \in [R_{c(F),d}]$.

Справедливость следующего соотношения вытекает непосредственно из леммы 11.

$$\begin{gathered} R_{c(F),b_i d_{1,i}}(x_1, x_2) = \exists y_j^i p(x_1, y_2^1 \ldots, y_{i-1}^1, y_i^1, y_{i+1}^1, \ldots, y_n^1) \,\& \\ \& \, p(y_i^1, y_2^2 \ldots, y_{i-1}^2, y_i^2, y_{i+1}^2, \ldots, y_n^2) \,\& \\ \& \, p(y_i^2, y_2^3 \ldots, y_{i-1}^3, y_i^3, y_{i+1}^3, \ldots, y_n^3) \,\& \, \ldots \, \& \\ \& \, p(y_i^{b_i-1}, y_2^{b_i} \ldots, y_{i-1}^{b_i}, x_2, y_{i+1}^{b_i}, \ldots, y_n^{b_i}), \end{gathered}$$

где под символом $\exists y_j^i$ подразумевается существование всех переменных, имеющих вид y_j^i и встречающихся в формуле.

Далее имеем $R_{c(F),d} \in [\{R_{c(F),b_i d_{1,1}}, \ldots, R_{c(F),b_i d_{1,n}}\}]$ в силу (3.1) и леммы 12, откуда окончательно $R_{c(F),d} \in [p]$.

Пусть теперь граф G_F несвязен. В этом случае каждая компонента связности G_F соответствует некоторой формуле F_i, задающей предикат p_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$. По лемме 3 получаем, что $\operatorname{Pol} p = \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Pol} p_i$, то есть класс $\operatorname{Pol} p$ совпадает с некоторым пересечением классов из рассмотренных семейств. $\square$

4. Структура надрешетки класса S_σ

Теорема 2. $S_{d_2,i_2} \subseteq S_{d_1,i_1}$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. $M_{d_1} \subseteq M_{d_2}$*;*
2. НОД$(i_2, d_1)|i_1$*;*
3. *для любого цикла L длины l подстановки σ на множестве $M_{d_2} \setminus M_{d_1}$ число l не делит* НОК(i_2, d_1).

Доказательство. Если нарушается первое требование, то существует цикл L_1 подстановки σ, элементы которого принадлежат множеству $M_{d_1} \setminus M_{d_2}$,. Возьмем два элемента a, b, принадлежащие указанному циклу, такие что $b = \sigma^{i_1}(a)$ (при этом возможна ситуация, когда $a = b$). Пусть d — некоторый элемент, не принадлежащий циклу L_1. Рассмотрим следующую функцию:

$$u(x) = \begin{cases} d, & \text{если } x = a; \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На множестве M_{d_2} справедливо $u(x) = x$, откуда $u(x) \in S_{d_2,i_2}$. Из соотношений $R_{d_1,i_1}(a, b) = TRUE$, $R_{d_1,i_1}(u(a), u(b)) = R_{d_1,i_1}(d, b) = FALSE$ (поскольку элементы d, b принадлежат разным циклам подстановки σ) следует, что $u(x) \notin S_{d_1,i_1}$.

Если нарушается второе требование, то выполнены условия леммы 13, и существует функция $F \in S_{d_2,i_2} \setminus S_{d_1,i_1}$. Если нарушается третье требование, то выполняются все условия леммы 14. Следовательно, существует функция $G \in S_{d_2,i_2} \setminus S_{d_1,i_1}$.

С другой стороны, пусть перечисленные в формулировке условия выполнены.

Напомним, что по лемме 12 для любых чисел a, b справедливо $R_{t,p} \in [R_{d_1,i_1}]$, где $t = \text{НОД}(d_2, ai_2)$, $p = bi_2 (\mathrm{mod}\ t)$. Положив $a = \frac{\text{НОК}(i_2,d_1)}{i_2}$, имеем $t = \text{НОД}(d_2, \text{НОК}(i_2, d_1))$.

В силу первого условия $d_1|d_2$. Очевидно, $d_1|\,\text{НОК}(i_2, d_1)$. Получаем, что $d_1|t$, то есть существует число α такое, что $t = \alpha d_1$. Покажем, что $M_{d_1} = M_t$.

Пусть $b \in M_{d_1}$, то есть элемент b принадлежит циклу подстановки σ длины l', делящей d_2. Но тогда $l'|\beta d_1 = t$. Получаем, что $b \in M_t$. С другой стороны, пусть $b \in M_t$. В этом случае длина l' цикла подстановки σ, содержащего элемент l', делит число $t = \text{НОД}\,(d_2, \text{НОК}\,(i_2, d_1))$. Но тогда l' делит оба числа d_2 и НОК (i_2, d_1). Из $l'|d_2$ следует, что $b \in M_{d_2}$, а из $l'|\,\text{НОК}\,(i_2, d_1)$ и третьего условия теоремы следует, что $b \notin M_{d_2} \setminus M_{d_1}$. Получаем, что $b \in M_{d_1}$.

Из второго условия и алгоритма Евклида следует, что существуют целые числа t_1, t_2, t_3 такие, что выполнено

$$i_1 = t_1 \,\text{НОД}(i_2, d_1) = t_2 i_2 + t_3 d_1.$$

Положив $b = t_2$, имеем $p = i_1 - t_3 d_1 (\text{mod } t)$. Следовательно, существует число β такое, что $p = i_1 - t_3 d_1 + \beta t = i_1 - t_3 d_1 + \beta\alpha d_1 = i_1 + \gamma d_1$, откуда $i_1 = \text{НОД}(p, d_1)$.

Из $M_t = M_{d_1}$ следует, что $R_{t,p} = R_{d_1,p}$. По нашему соглашению $d_1 \in D_\sigma$. Из $i_1 = \text{НОД}(p, d_1)$ и леммы 8 следует, что $R_{t,p} = R_{d_1,p} = R_{d_1,i_1}$.

Окончательно получаем, что $R_{d_1,i_1} \in [R_{d_2,i_2}]$. В силу леммы 1 имеем $S_{d_2,i_2} \subseteq S_{d_1,i_1}$. □

Следствие 4. *Для любого фиксированного числа $d \in D_\sigma$ решетка замкнутых классов $S_{d,i}$ изоморфна решетке делителей числа d относительно свойства делимости.*

Следствие 5. *Решетка классов самодвойственных функций S_{σ^i} изоморфна решетке делителей числа h_σ относительно свойства делимости.*

Лемма 15. *Пусть $P = \{R_{d_1,i_i}, \ldots, R_{d_m,i_m}\}$, $R_{d,i}$ — произвольный предикат, $A = \{R_{d_1,i_1}, \ldots, R_{d_l,i_l}\}$ — подмножество из предикатов множества P, для которых $M_d \subseteq M_{d_{j_i}}$. Пусть $\overline{d} = \text{НОД}\,(d_{j_1}, \ldots, d_{j_l})$, $\overline{i} = \text{НОД}\,(i_{j_1}, \ldots, i_{j_l})$. Тогда $\operatorname{Pol} P \subseteq S_{d,i} = \operatorname{Pol} R_{d,i}$ тогда и только тогда, когда справедливо $S_{\overline{d},\overline{i}} \subseteq S_{d,i}$.*

Доказательство. Из леммы 12 следует, что $R_{\overline{d},\overline{i}} \in [A]$, откуда по лемме 1 имеем, что $\operatorname{Pol} A \subseteq \operatorname{Pol} R_{\overline{d},\overline{i}} = S_{\overline{d},\overline{i}}$. Получаем, что из $S_{\overline{d},\overline{i}} \subseteq S_{d,i}$ следует $\operatorname{Pol} P \subseteq \operatorname{Pol} A \subseteq S_{\overline{d},\overline{i}} \subseteq S_{d,i}$.

Пусть теперь выполнено $\operatorname{Pol} P \subseteq S_{d,i}$. Предположим, что $S_{\overline{d},\overline{i}} \nsubseteq S_{d,i}$. Поскольку $M_{\overline{d}} = M_{d_{j_1}} \bigcap \ldots \bigcap M_{d_{j_l}}$ и справедливо $M_d \subseteq M_{\overline{d}}$, то нарушается либо второй, либо третий пункт теоремы 2. Следовательно, справедливы условия либо леммы 13, либо леммы 14. Получаем, что существует функция $f \in S_{\overline{d},\overline{i}} \setminus S_{d,i}$ (это либо функция F, либо функция G) с описанными в указанных леммах свойствами.

Возьмем произвольный предикат $R_{d',i'} \in P \setminus A$. По определению множества A справедливо $M_d \nsubseteq M_{d'}$. Согласно второму пункту лемм 13 и 14 справедливо $f \in \operatorname{Pol} R_{d',i'}$. Пусть теперь $R_{d',i'} \in A$. В этом случае справедливо $M_{\overline{d}} \subseteq M_{d'}$. По определению числа $\overline{i}$ справедливо $i' = t\overline{i}$, где t — некоторое число. В силу третьего пункта лемм 13 и 14 опять получаем справедливость $f \in \operatorname{Pol} R_{d',i'}$.

Итак, мы показали, что $f \in \operatorname{Pol} P$. С другой стороны $f \notin S_{d,i}$. Получаем противоречие с соотношением $\operatorname{Pol} P \subseteq S_{d,i}$. □

По теореме 1 любой класс из надструктуры класса самодвойственных функций S_σ имеет вид $S_{i_1,d_1} \bigcap \ldots \bigcap S_{i_s,d_s}$, или $\mathrm{Pol}\,(R_{d_1,i_1}, \ldots, R_{d_s,i_s})$. Из леммы 15 получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $A = \mathrm{Pol}\,(R_{d_1,i_1}, \ldots, R_{d_s,i_s})$, $B = \mathrm{Pol}\,(R_{t_1,j_1}, \ldots, R_{t_m,j_m})$. *Для произвольного* $p \in \{1, \ldots, m\}$ *обозначим через* I_p *множество номеров* n *чисел из* $\{d_1, \ldots, d_s\}$, *удовлетворяющих* $M_{t_p} \subseteq M_{d_n}$. *Пусть* $\overline{d}_p, \overline{i}_p$ *— НОД чисел с номерами из* I_p *из множеств* $\{d_1, \ldots, d_s\}$ *и* $\{i_1, \ldots, i_s\}$ *соответственно.*

$A \subseteq B$ *тогда и только тогда, когда для любого* $p \in \{1, \ldots, m\}$ *справедливо* $S_{\overline{d}_p,\overline{i}_p} \subseteq S_{t_p,j_p}$ (*то есть для рассматриваемой пары классов выполнены указанные в теореме 2 условия*).

Несмотря на громоздкость полученного критерия, он дает простой алгоритм проверки вложения для двух классов из надструктуры класса самодвойственных функций (см. теоремы 2 и 3).

Список литературы

1. Арнольд И. В. Теоретическая арифметика / И. В. Арнольд. – М. : Учпедгиз, 1938. – 480 с.
2. Теория Галуа для алгебр Поста / В. Г. Боднарчук, В. А. Калужнин, В. Н. Котов, Б. А. Ромов // Кибернетика. – 1969. – № 3. – С. 1–10; – № 5. – С. 1–9.
3. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций / С. С. Марченков. – М. : Физматлит, 2000. – 128 с.
4. Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике / С. В. Яблонский // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1958. – Т. 51. – С. 5–142.
5. Яблонский С. В. Предполные классы в многозначных логиках / С. В. Яблонский, Г. П. Гаврилов, А. А. Набебин. – М. : Издат. дом МЭИ, 1997. – 144 с.

V. B. Larionov, V. S. Fedorova

Structure of classes of selfdual k-valued functions

Abstract. This paper contains full description of structure of classes, that contain arbitrary class of selfdual functions of multivalued logic; also main properties of this structure are proved.

Keywords: multivalued logic; selfdual function; structure.

Ларионов Виталий Борисович, кандидат физико-математических наук, ООО «Атес Медика Софт» (`vitalyblarionov@yandex.ru`)

Федорова Валентина Сегеевна, кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, тел.: (495) 939-53-92 (fedorovavs@cs.msu.ru)

Larionov Vitaly, Ates Medica Soft (vitalyblarionov@yandex.ru)

Fedorova Valentina, Moscow State University, faculty of computational mathematics and cybernetics, 119899, Moscow, Vorobyevy Gory, Moscow state university, faculty of computational mathematics and cybernetics, Phone: (495) 939-53-92 (fedorovavs@cs.msu.ru)