Серия «Математика»
2014. Т. 7. С. 141—159

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.554

Квазиполя и проективные плоскости трансляций малых четных порядков *

П. К. Штуккерт
Сибирский федеральный университет

Аннотация. Построения различных классов конечных недезарговых плоскостей трансляций и квазиполей тесно связаны и с середины прошлого века систематически опираются на компьютерные вычисления. Мы находим структурное описание полуполей порядка 32 и квазиполей порядка 16, соответствующих плоскостей трансляций.

Известно, что проективные плоскости трансляций любого примарного порядка p^n с простым p удается построить, координатизируя их линейным пространством W размерности n над простым полем из p элементов и характеризуя регулярным множеством, позволяющим снабдить W структурой квазиполя (возможно наперед заданным). Плоскость называют полуполевой, если W — полуполе; в случае поля W плоскость дезаргова. Изоморфность полуполевых плоскостей равносильна изотопности их полуполей.

Строение квазиполей порядка p^n, в отличие от конечных полей, изучено мало даже при небольших простых или близких к простым n. Клейнфилд в 1960 году классифицировал, с точностью до изоморфизмов, квазиполя с ядром порядка 4 и все полуполя порядка 16. Классификацию всех плоскостей трансляций порядка 16 и 32 позднее завершили Демпволф и др. С помощью регулярных множеств недезарговых плоскостей удается построить 5 полуполей порядка 32 и 7 квазиполей порядка 16, исчерпывающих, с точностью до изотопизмов, все полуполя порядка 32 и, соответственно, квазиполя порядка 16. Основные результаты статьи перечисляют для них в случае полуполей (в случае квазиполей частично) ядра и все подполя, а также введенные порядки элементов и спектры соответствующих луп.

Ключевые слова: плоскость трансляций, регулярное множество, квазиполе, Полуполе, порядок элемента лупы.

1. Введение

Проективная плоскость характеризуется как множество точек с определенными подмножествами, называемыми прямыми [4]. Конечные

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 12–01–00968.

плоскости порядка n существуют не для любого натурального числа $n \geq 2$, в частности, их нет при $n = 6$ (Г. Тарри, 1900 г.). Плоскости любых примарных порядков, т. е. с единственным простым делителем, получают как плоскости трансляций, координатизируемые конечно-мерным линейным пространством W. Плоскость трансляций характеризуют регулярным множеством, позволяющим снабдить W структурой квазиполя. Если квазиполе есть кольцо, его называют полуполем, а плоскость — полуполевой; когда W — поле, плоскость дезаргова. Изоморфность полуполевых плоскостей равносильна изотопности их полуполей [3; 11; 13; 15; 17].

Наименьшие четные порядки недезарговых полуполевых плоскостей и плоскостей трансляций, в силу [19] и [12], равны 16. Для нечетных порядков они даже не совпадают [10]. С использованием латинских прямоугольников Клейнфилд [12] классифицировал квазиполя с ядром порядка 4 и все полуполя порядка 16. Полностью классификация недезарговых плоскостей трансляций завершена для порядка 16 в работах [8; 9; 14], а для порядка 32 – в работах [18] (случай полуполей) и [9].

Мы исследуем вопросы структурного описания конечных квазиполей малых четных порядков 16 и 32, прежде всего, описание подполей, ядер и порядков элементов. Структурное описание всех (с точностью до изоморфизма) полуполей порядка 16 изучалось в [5].

Предварительные сведения о плоскостях трансляций и квазиполях приводятся в § 1. В § 2 изучается структурное описание квазиполей, соответствующих каждой недезарговой плоскости трансляций порядка 16; основной здесь является теорема 2.

Теоремы 4 и 5 в § 3 устанавливают структурное описание полуполей, соответствующих каждой полуполевой плоскости порядка 32.

Автор очень благодарна научному руководителю профессору Владимиру Михайловичу Левчуку за постановку задачи и внимание к работе.

2. Плоскость трансляций и ее квазиполе

Согласно [4, § 20.1], проективная плоскость π — это множество точек с определенными подмножествами, называемыми прямыми, и удовлетворяющими следующим аксиомам:

1) две различные точки лежат на одной и только одной прямой;

2) две различные прямые пересекаются в единственной точке;

3) существуют четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Определение 1. *Проективные плоскости π_1 и π_2 называют изоморфными, если существует изоморфизм π_1 на π_2, т. е. биективное отображение, сохраняющее инцидентность, точек и прямых плоскости π_1, соответственно, в точки и прямые плоскости π_2.*

Проективную плоскость называют конечной, если хотя бы на одной (равносильно, любой) ее прямой число $n+1$ точек конечно; число n называют *порядком* плоскости. Свойства порядка см. [4, Теорема 20.1.1].

Построение проективных плоскостей трансляций связано с выбором n-мерного линейного пространства W над полем F в качестве координатизирующего множества. Векторы внешней прямой суммы $V = W \oplus W$ двух копий пространства W представляются в виде

$$(x, y) \in V, \qquad x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in W.$$

Напомним, что расщепление аддитивной группы — это набор ее подгрупп (компоненты расщепления) с попарно нулевыми пересечениями, дающих в теоретико-множественном объединении всю группу.

Далее используем расщепление μ аддитивной группы $(V,+)$ такое, что $V = M \oplus N$ для любых различных $M, N \in \mu$; тогда компоненты есть n-мерные подпространства. К этому случаю приводят множества

$$V(\infty) = (0, W),\ V(0) = (W, 0),\ V(\sigma) = \{(v, v^\sigma) \mid v \in W)\}(\sigma \in GL(W)).$$

Проективную плоскость трансляций $\mu(V)$ получают из V, считая точками 1-мерные подпространства из V, а прямыми — компоненты из μ и всевозможные смежные классы по ним; по определению, смежные классы по одной и той же подгруппе пересекаются в одной и той же точке (∞), называемой особой точкой, а множество всех особых точек считаем особой прямой $[\infty]$ проективной плоскости [7; 11; 15].

Регулярное множество плоскости π — это множество $R = \theta(W)$ с нулевой матрицей O и с единичной матрицей для аддитивного отображения θ пространства W в кольцо $M(n, F)$ всех $n \times n$-матриц над F такого, что в $GL(n, F)$ лежат множество $R \setminus \{O\}$ и $\theta(u) - \theta(v)$ при $u, v \in W,\ u \neq v$. Ранг π — это размерность W. Умножение на W вводим, полагая

$$x \circ y := x \cdot \theta(y) \quad (x, y \in W). \tag{2.1}$$

Напомним, что множество L с бинарной операцией $\circ$ называют *лупой*, если в $(L, \circ)$ существует нейтральный элемент (нуль 0 в аддитивной терминологии) и уравнения $a \circ x = b$ и $x \circ a = b$ однозначно разрешимы при любых $a, b \in L$. В частности, группа — это ассоциативная лупа.

Определение 2. *Конечное множество Q с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\circ$ называют левым квазиполем, если:*
1) $(Q,+)$ — абелева группа; 2) $(Q \setminus \{0\}, \circ)$ – лупа; 3) $0 \circ x = 0$ $(x \in Q)$;
4) выполняется левый дистрибутивный закон

$$x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z \qquad (x, y, z \in Q).$$

Замечание 1. Хьюгес [11] называет $(Q, +, \circ)$ с произвольным Q, не обязательно конечным, и условиями 1)–4) *слабым квазиполем (weak quasifield)*, а квазиполем — при дополнительном условии: *уравнение $a \circ x = b \circ x + c$ однозначно разрешимо при $a, b, c \in Q$, $a \neq b$.*

По [11, Теорема 7.3], конечное слабое квазиполе есть квазиполе.

Конечное *правое квазиполе* определяется аналогично с соответствующими изменениями свойств 3) и 4) (Люнебург [15] под «квазиполем» понимает «правое квазиполе»). Далее, как и Хьюгес [11], говорим «квазиполе» вместо «левое квазиполе», если не оговорено противное.

Отметим, что квазиполе с двусторонней дистрибутивностью называют *полуполем*; в терминологии А.Г. Куроша [1, II.6.1] – это квазитело.

Плоскость π называют *плоскостью трансляций*, если $(W, +, \circ)$ есть квазиполе, и называют *полуполевой плоскостью*, когда $(W, +, \circ)$ есть полуполе [3; 11; 15]. Известна

Лемма 1. *Плоскость трансляций является дезарговой тогда и только тогда, когда соответствующее ей квазиполе есть поле.* □

Взаимосвязь между классами изоморфных проективных плоскостей и классами изотопных конечных полуполей выявил Алберт [6].

Теорема 1. *Две полуполевые плоскости изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие им полуполя изотопны.* □

Для произвольного квазиполя Q с единицей e несложно доказывается следующая лемма, где

$$ke = \underbrace{e + e + \ldots + e}_{k \text{ раз}}, \quad (-k)e = -ke \text{ при } k \in Z,\ k > 0, \quad 0e = 0.$$

Лемма 2. *Отображение $\chi : \ k \to ke$ $(k \in Z)$ есть гомоморфизм кольца Z целых чисел в квазиполе Q, причем либо $\chi(Z) \simeq Z_p$ для некоторого простого числа p, либо $\chi(Z) \simeq Z$.* □

По определению [11], *правое ядро* или *ядро* квазиполя Q — это

$$N_r(Q) = \{k \in Q \mid x \circ (y \circ k) = (x \circ y) \circ k,\ (x + y) \circ k = x \circ k + y \circ k \ \ (x, y \in Q)\}.$$

Аналогично вводят левое ядро. Ядро всякого квазиполя есть тело; конечное квазиполе всегда является правым векторным пространством над своим ядром [11, Теорема 7.2]. В частности, справедлива

Лемма 3. *Ядро конечного квазиполя Q изоморфно полю $GF(q)$ для подходящего q. Если n — размерность Q над ядром, то $|Q| = q^n$.* □

3. Квазиполя порядка 16

Недезарговы полуполевые плоскости порядка 16 классифицировал в 1960 году Клейнфилд [12], описав изотопные классы их полуполей; всего таких классов 2. Характеризуя таблицу Кэли лупы W^* некоторых квазиполей W латинскими прямоугольниками (см. также [2]), он доказал, что число неизоморфных полуполей порядка 16 равно 24.

Явно формулы умножения двух полуполей из [12] – представителей изотопных классов, выписал Кнут [13]. Структурное описание всех неизоморфных полуполей порядка 16 изучалось в [5]: для каждого полуполя W перечислены его подполя, найдены таблица Кэли и *спектр* лупы W^*.

Определение 3. *Порядком элемента x в лупе называем наименьшее целое число $n \geq 1$ (обозначаем $|x|$) такое, что хотя бы одно произведение длины n элемента x равно e; в остальных случаях $|x| = \infty$. Спектром лупы назовем множество порядков всех ее элементов.*

Далее используем обозначение g^k для k-й степени ($k \geq 1$) элемента g квазиполя с правильной, правонормированной, расстановкой скобок.

Недезарговы плоскости трансляций порядка 16 классифицировали Демпволф и Рейфхат [8], [9]; с точностью до изоморфизмов, их оказалось всего 7, включая две полуполевые плоскости.

Мы исследуем в этом параграфе квазиполя, соответствующие плоскостям трансляций порядка 16 из [9].

Выбирая координатизирующее множество как 4-мерное пространство W над Z_2, регулярные множества плоскостей трансляций обозначаем через R_i, $1 \leq i \leq 8$, соответственно нумерации из [9]. В частности,

$$R_1 = \{O, E, \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 0&1&1&0\\ 1&1&0&1\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&1&1\\ 1&0&1&0\\ 1&1&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&1\\ 1&1&0&1\\ 0&1&1&1\\ 1&0&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 1&1&1&1\\ 0&0&1&1\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&1\\ 1&1&0&0\\ 1&1&1&0\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&1&0\\ 1&1&1&0\\ 1&0&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 0&1&0&1\\ 0&1&0&0\\ 1&0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 1&0&1&0\\ 1&1&1&1\\ 0&1&1&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&1&1\\ 1&0&0&0\\ 1&1&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&1\\ 0&0&0&1\\ 0&1&0&1\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 1&0&0&1\\ 0&0&0&1\\ 1&1&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&0&1\\ 0&0&1&0\\ 1&1&0&0\\ 0&1&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&1&0\\ 1&0&0&0\\ 1&0&1&1\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&0&1&1\\ 0&1&1&0\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}\}.$$

Через Q_i обозначаем квазиполя, соответствующие плоскостям трансляций с регулярными множествами R_i.

Структурное описание квазиполя Q_1 устанавливает

Теорема 2. *Квазиполе Q_1 имеет единственное максимальное подполе*

$$H = \{0, e, (0,0,1,0), (1,0,1,0)\},$$

являющееся ядром. Каждый элемент из $Q_1 \setminus H$ имеет порядок 5 и порождает лупу Q_1^*.

Доказательство. Таблицу Кэли лупы Q_1^* строим по правилу (2.1); умножение на единичный элемент в ней опускаем.

Таблица 1

Таблица Кэли лупы Q_1^*

	(0,0,0,1)	**(0,0,1,0)**	**(0,0,1,1)**	**(0,1,0,0)**	**(0,1,0,1)**	**(0,1,1,0)**	**(0,1,1,1)**
(0,0,0,1)	(0,1,0,0)	(1,1,0,1)	(1,0,1,1)	(0,1,0,1)	(1,1,1,1)	(0,0,1,0)	(1,0,1,0)
(0,0,1,0)	(1,1,0,1)	(1,0,1,0)	(0,1,1,1)	(0,0,1,1)	(1,1,1,0)	(1,0,0,1)	(0,1,0,0)
(0,0,1,1)	(1,0,0,1)	(0,1,1,1)	(1,1,0,0)	(0,1,1,0)	(0,0,0,1)	(1,0,1,1)	(1,1,1,0)
(0,1,0,0)	(0,1,1,0)	(0,0,1,1)	(1,1,0,1)	(1,1,1,1)	(1,1,0,0)	(1,1,1,0)	(0,1,0,1)
(0,1,0,1)	(0,0,1,0)	(1,1,1,0)	(0,1,1,0)	(1,0,1,0)	(0,0,1,1)	(1,1,0,0)	(1,1,1,1)
(0,1,1,0)	(1,0,1,1)	(1,0,0,1)	(1,0,1,0)	(1,1,0,0)	(0,0,1,0)	(0,1,1,1)	(0,0,0,1)
(0,1,1,1)	(1,1,1,1)	(0,1,0,0)	(0,0,0,1)	(1,0,0,1)	(1,1,0,1)	(0,1,0,1)	(1,0,1,1)
(1,0,0,1)	(0,1,0,1)	(1,1,1,1)	**(1,0,0,0)**	(0,0,0,1)	(1,0,1,0)	(0,1,0,0)	(1,1,0,1)
(1,0,1,0)	(1,1,0,0)	**(1,0,0,0)**	(0,1,0,0)	(0,1,1,1)	(1,0,1,1)	(1,1,1,1)	(0,0,1,1)
(1,0,1,1)	**(1,0,0,0)**	(0,1,0,1)	(1,1,1,1)	(0,0,1,0)	(0,1,0,0)	(1,1,0,1)	(1,0,0,1)
(1,1,0,0)	(0,1,1,1)	(0,0,0,1)	(1,1,1,0)	(1,0,1,1)	(1,0,0,1)	**(1,0,0,0)**	(0,0,1,0)
(1,1,0,1)	(0,0,1,1)	(1,1,0,0)	(0,1,0,1)	(1,1,1,0)	(0,1,1,0)	(1,0,1,0)	**(1,0,0,0)**
(1,1,1,0)	(1,0,1,0)	(1,0,1,1)	(1,0,0,1)	**(1,0,0,0)**	(0,1,1,1)	(0,0,0,1)	(0,1,1,0)
(1,1,1,1)	(1,1,1,0)	(0,1,1,0)	(0,0,1,0)	(1,1,0,1)	**(1,0,0,0)**	(0,0,1,1)	(1,1,0,0)

	(1,0,0,1)	**(1,0,1,0)**	**(1,0,1,1)**	**(1,1,0,0)**	**(1,1,0,1)**	**(1,1,1,0)**	**(1,1,1,1)**
(0,0,0,1)	(0,1,1,1)	(1,1,0,0)	**(1,0,0,0)**	(1,1,1,0)	(0,1,1,0)	(1,0,0,1)	(0,0,1,1)
(0,0,1,0)	(1,1,1,1)	**(1,0,0,0)**	(0,1,0,1)	(0,0,0,1)	(1,1,0,0)	(1,0,1,1)	(0,1,1,0)
(0,0,1,1)	**(1,0,0,0)**	(0,1,0,0)	(1,1,0,1)	(1,1,1,1)	(1,0,1,0)	(0,0,1,0)	(0,1,0,1)
(0,1,0,0)	(1,0,1,0)	(0,1,1,1)	(0,0,0,1)	(1,0,0,1)	(0,0,1,0)	**(1,0,0,0)**	(1,0,1,1)
(0,1,0,1)	(1,1,0,1)	(1,0,1,1)	(1,0,0,1)	(0,1,1,1)	(0,1,0,0)	(0,0,0,1)	**(1,0,0,0)**
(0,1,1,0)	(0,1,0,1)	(1,1,1,1)	(0,1,0,0)	**(1,0,0,0)**	(1,1,1,0)	(0,0,1,1)	(1,1,0,1)
(0,1,1,1)	(1,1,1,0)	(0,0,1,1)	(1,1,0,0)	(0,1,1,0)	**(1,0,0,0)**	(1,0,1,0)	(1,1,1,0)
(1,0,0,1)	(1,1,1,0)	(0,1,1,0)	(0,0,1,1)	(0,0,1,0)	(1,0,1,1)	(0,1,1,1)	(1,1,0,0)
(1,0,1,0)	(0,1,1,0)	(0,0,1,0)	(1,1,1,0)	(1,1,0,1)	(0,0,0,1)	(0,1,0,1)	(1,0,0,1)
(1,0,1,1)	(0,0,0,1)	(1,1,1,0)	(0,1,1,0)	(0,0,1,1)	(0,1,1,1)	(1,1,0,0)	(1,0,1,0)
(1,1,0,0)	(0,0,1,1)	(1,1,0,1)	(1,0,1,0)	(0,1,0,1)	(1,1,1,1)	(0,1,1,0)	(0,1,0,0)
(1,1,0,1)	(0,1,0,0)	(0,0,0,1)	(0,0,1,0)	(1,0,1,1)	(1,0,0,1)	(1,1,1,1)	(0,1,1,1)
(1,1,1,0)	(1,1,0,0)	(0,1,0,1)	(1,1,1,1)	(0,1,0,0)	(0,0,1,1)	(1,1,0,1)	(0,0,1,0)
(1,1,1,1)	(1,0,1,1)	(1,0,0,1)	(0,1,1,1)	(1,0,1,0)	(0,1,0,1)	(0,1,0,0)	(0,0,0,1)

С помощью таблицы Кэли устанавливаем равенство левого и правого обратных элементов к любому элементу лупы Q_1^*. Кроме того, H есть подполе порядка 4.

Для вычисления порядков элементов заметим, что число различных неассоциативных произведений элемента g длины n, т. е. с различными расстановками скобок, для случаев $n = 1, 2, 3, 4, 5$ равно соответственно $1, 1, 2, 5, 14$. В частности, все они при $n = 1, 2, 3, 4$ отличны от e для элемента $g = (0, 0, 0, 1)$, а $g^5 = e$. Более того, аналогично находим, что любой элемент из $Q_1 \setminus H$ имеет порядок 5.

Несложно проверяется также, что квазиполе Q_1 есть и левое, и правое векторное пространство над подполем H, так что H — ядро. □

Аналогичное описание получено для квазиполей Q_i, $i = 2, 3, 4, 5$. Отметим, что квазиполя Q_6 и Q_7 являются полуполями и изучались в [5]; Q_8 — поле.

Замечание 2. Клейнфилд [12] описал квазиполя порядка 16 и ядром порядка 4, с точностью до изоморфизмов; он показал, что из них всего 70 не являются полуполями. Далее. Как показывает проверка, сложение в регулярных множествах R_i, $1 \leq i \leq 5$, не замкнуто.

4. Полуполя порядка 32

В этом параграфе нашей целью является перечисление, с точностью до изотопизмов, и структурное описание полуполей порядка 32, на основе известного описания полуполевых плоскостей того же порядка.

Классификацию полуполевых плоскостей порядка 32 в 1962 году анонсировал Волкер [18]. В 2011 году все плоскости трансляций порядка 32 классифицировали Демпволф и Рокенфеллер [9; 16], наряду с описанием регулярных множеств. Число таких плоскостей, с точностью до изоморфизмов, равно 9, включая 6 полуполевых. Координатизирующее множество здесь есть 5-мерное пространство W над полем Z_2. Регулярные множества недезарговых полуполевых плоскостей порядка 32, согласно [9], записываются как множества $R_i = \theta_i(W)$, $i = 1, 2, ..., 5$, состоящие из всевозможных матриц при $x, y, z, w, s \in Z_2$, соответственно,

$$R_1 : \quad \begin{pmatrix} x & y & z & w & s \\ z & x+z & y+s & w+s & w \\ z+s & w & x+w & y+w & z \\ w & z+w & w+s & x+z & y+w \\ y+z+w+s & z+s & y+w+s & z+w & x+w \end{pmatrix},$$

$$R_2: \begin{pmatrix} x & y & z & w & s \\ z+w+s & x+z+s & y+w & s & w+s \\ z+s & w & x+z+w & y+z & z \\ z+w & z+w+s & w+s & x+s & y+z+s \\ y+z+w & z+w & y+z+w+s & z+s & x+z+w+s \end{pmatrix},$$

$$R_3: \begin{pmatrix} x & y & z & w & s \\ z+w & x & y+z+w & w+s & w \\ z+s & z+w & x+z+w & y+w & z \\ z & s & z+w+s & x+z+w+s & y+z+s \\ y+z+w & z & y+z+w+s & z+w & x+z+s \end{pmatrix},$$

$$R_4: \begin{pmatrix} x & y & z & w & s \\ s & x & y+s & z & w \\ z+w & z+w+s & x+z & y+z & z \\ z+s & z+w & s & x+s & y \\ y+w+s & z & y+w & w+s & x \end{pmatrix},$$

$$R_5: \begin{pmatrix} x & y & z & w & s \\ z & x+z+w & y+w & w+s & w \\ z+s & w & x & y+w & z+w \\ z+w+s & z+s & s & x+z+w & y+z+s \\ y+z+w & w+s & y & z & x+z \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в [9] при каждом i выписываются все 32 матрицы над Z_2 из R_i.

Через P_i обозначаем полуполе W с умножением (2.1) при $\theta = \theta_i$. С учетом теоремы 1, из [16], [9] вытекает

Теорема 3. *Каждое полуполе порядка 32 изотопно точно одному из полуполей P_i, $1 \leq i \leq 5$, или полю Галуа $GF(32)$.* $\square$

С помощью формулы (2.1) и регулярного множества R_i выписываем таблицу Кэли каждой лупы P_i^* (с помощью компьютерных вычислений ее построение упрощается); умножение на единичный элемент в ней опускаем. В частности, для лупы P_5^* таблица Кэли — табл. 2.

Структурное описание полуполей P_i дают следующие две теоремы.

Теорема 4. *В полуполе P_5 существует подполе H порядка 4, являющееся единственным максимальным подполем и не являющееся ни правым, ни левым ядром. Каждый элемент из $P_5 \setminus H$ порождает лупу P_5^* и имеет порядок > 3; спектр лупы P_5^* совпадает с $\{1,3,4,5,6,7,8\}$.*

Доказательство. С помощью табл. находим левый и правый обратные элементы к элементам лупы P_5^*.

В лупе P_5^* только у первых пяти элементов в табл. 3 правые и левые обратные элементы совпадают. Поэтому P_5 не имеет подполей порядка больше 4. Ясно, что $H = \{0, e, (0,0,0,1,0), (1,0,0,1,0)\}$ – подполе. В то же время, кубы 4 и 5-го элементов таблицы 3 не равны 1, как показывает табл. 2. Поэтому H — единственное максимальное подполе в P_5.

Таблица Кэли показывает также, что все степени ≤ 3 каждого из элементов $(0,0,0,0,1)$, $(0,0,0,1,1)$, $(0,1,1,1,1)$ неединичны, а одна из третьих степеней совпадает с правым или левым обратным к этому элементу. Поэтому порядки этих элементов равны 4. Продолжая аналогичную процедуру, находим порядки всех элементов лупы P_5^* и ее спектр.

Таблица 2 показывает, что правильные расстановки скобок 24 элементов из $P_5 \setminus H$ (кроме 4 элементов $g_1 = (0,1,0,0,1)$, $g_2 = (0,1,1,0,1)$, $g_3 = (1,1,0,0,1)$, $g_4 = (1,1,1,0,1)$) дают все ненулевые элементы полуполя P_5, причем их 31-ая степень равна $e = (1,0,0,0,0)$. С другой стороны, вторые степени элементов g_i дают элементы, которые порождают лупу P_5^*: $g_1^2 = (0,0,1,1,0)$, $g_2^2 = (0,0,0,1,0)$, $g_3^2 = (1,1,0,1,0)$, $g_4^2 = (1,0,0,1,0)$. Поэтому лупа P_5^* порождается всяким элементом из $P_5 \setminus H$.

Также табл. 2 показывает, что над подполем H полуполе P_5 не является ни левым, ни правым векторным пространством, поскольку

$$(1,0,0,1,0) \cdot ((0,0,0,1,0) \cdot (0,0,0,0,1)) = (1,1,0,0,0),$$

$$((1,0,0,1,0) \cdot (0,0,0,1,0)) \cdot (0,0,0,0,1) = (0,0,0,0,1),$$

и

$$((0,0,0,0,1) \cdot (0,0,0,1,0)) \cdot (1,0,0,1,0) = (0,0,1,1,1),$$

$$(0,0,0,0,1) \cdot ((0,0,0,1,0) \cdot (1,0,0,1,0)) = (0,0,0,0,1).$$

Поэтому подполе H не является ни левым, ни правым ядром. □

Теорема 5. *В каждом полуполе P_i, $i = 1,2,3,4$, подполе порядка 2 есть единственное подполе. Всякий элемент порядка > 1 порождает лупу P_i^*, а спектр лупы P_i^* совпадает с $\{1,4,5,6,7\}$ при $i = 1,2$, с $\{1,4,5,6,7,8\}$ при $i = 3$, и с $\{1,5,6,7,8,9\}$ при $i = 4$.*

Доказательство. Доказательство теоремы проводится по аналогичной схеме. Правый и левый обратный элементы совпадают в лупе P_1^* только для единичного элемента, в лупах P_2^* и P_3^* — для 3 элементов. Сейчас легко получаем максимальность подполя порядка 2 в этих полуполях. Это же верно и для коммутативной лупы P_4^*, поскольку она не имеет элементов порядка 3. Спектр и порядки элементов выявляют следующие таблицы.

Таблицы Кэли позволяют также несложно доказать однопорожденность каждой лупы. □

Таблица 2

Лупа P_5^*

	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111	01000
00001	11000	01000	10000	10011	01011	11011	00011	10100
00010	11101	10010	01111	11011	00110	01001	10100	00001
00011	00101	11010	11111	01000	01101	10010	10111	10101
00100	10000	01011	11011	10001	00001	11010	01010	00010
00101	01000	00011	01011	00010	01010	00001	01001	10110
00110	01101	11001	10100	01010	00111	10011	11110	00011
00111	10101	10001	00100	11001	01100	01000	11101	10111
01000	00010	01111	01101	11000	11010	10111	10101	00100
01001	11010	00111	11101	01011	10001	01100	10110	10000
01010	11111	11101	00010	00011	11100	11110	00001	00101
01011	00111	10101	10010	10000	10111	00101	00010	10001
01100	10010	00100	10110	01001	11011	01101	11111	00110
01101	01010	01100	00110	11010	10000	10110	11100	10010
01110	01111	10110	11001	10010	11101	00100	01011	00111
01111	10111	11110	01001	00001	10110	11111	01000	10011
10001	11001	01010	10011	10111	01110	11101	00100	11100
10010	11100	10000	01100	11111	00011	01111	10011	01001
10011	00100	11000	11100	01100	01000	10100	10000	11101
10100	10001	01001	11000	10101	00100	11100	01101	01010
10101	01001	00001	01000	00110	01111	00111	01110	11110
10110	01100	11011	10111	01110	00010	10101	11001	01011
10111	10100	10011	00111	11101	01001	01110	11010	11111
11000	00011	01101	01110	11100	11111	10001	10010	01100
11001	11011	00101	11110	01111	10100	01010	10001	11000
11010	11110	11111	00001	00111	11001	11000	00110	01101
11011	00110	10111	10001	10100	10010	00011	00101	11001
11100	10011	00110	10101	01101	11110	01011	11000	01110
11101	01011	01110	00101	11110	10101	10000	11011	11010
11110	01110	10100	11010	10110	11000	00010	01100	01111
11111	10110	11100	01010	00101	10011	11001	01111	11011

	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111
00001	01100	11100	00100	00111	11111	01111	10111
00010	11100	10011	01110	11010	00111	01000	10101
00011	10000	01111	01010	11101	11000	00111	00010
00100	10010	01001	11001	10011	00011	11000	01000
00101	11110	10101	11101	10100	11100	10111	11111
00110	01110	11010	10111	01001	00100	10000	11101
00111	00010	00110	10011	01110	11011	11111	01010
01000	00110	01011	01001	11100	11110	10011	10001
01001	01010	10111	01101	11011	00001	11100	00110
01010	11010	11000	00111	00110	11001	11011	00100
01011	10110	00100	00011	00001	00110	10100	10011
01100	10100	00010	10000	01111	11101	01011	11001
01101	11000	11110	10100	01000	00010	00100	01110
01110	01000	10001	11110	10101	11010	00011	01100
01111	00100	01101	11010	10010	00101	01100	11011
10001	00101	10110	01111	01011	10010	00001	11000
10010	10101	11001	00101	10110	01010	00110	11010
10011	11001	00101	00001	10001	10101	01001	01101
10100	11011	00011	10010	11111	01110	10110	00111
10101	10111	11111	10110	11000	10001	11001	10000
10110	00111	10000	11100	00101	01001	11110	10010
10111	01011	01100	11000	00010	10110	10001	00101
11000	01111	00001	00010	10000	10011	11101	11110
11001	00011	11101	00110	10111	01100	10010	01001
11010	10011	10010	01100	01010	10100	10101	01011
11011	11111	01110	01000	01101	01011	11010	11100
11100	11101	01000	11011	00011	10000	00101	10110
11101	10001	10100	11111	00100	01111	01010	00001
11110	00001	11011	10101	11001	10111	01101	00011
11111	01101	00111	10001	11110	01000	00010	10100

	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111	11000
00001	11001	01001	10001	10010	01010	11010	00010	10101
00010	11111	10000	01101	11001	00100	01011	10110	00011
00011	00110	11001	11100	01011	01110	10001	10100	10110
00100	10100	01111	11111	10101	00101	11110	01110	00110
00101	01101	00110	01110	00111	01111	00100	01100	10011
00110	01011	11111	10010	01100	00001	10101	11000	00101
00111	10010	10110	00011	11110	01011	01111	11010	10000
01000	01010	00111	00101	10000	10010	11111	11101	01100
01001	10011	01110	10100	00010	11000	00101	11111	11001
01010	10101	10111	01000	01001	10110	10100	01011	01111
01011	01100	11110	11001	11011	11100	01110	01001	11010
01100	11110	01000	11010	00101	10111	00001	10011	01010
01101	00111	00001	01011	10111	11101	11011	10001	11111
01110	00001	11000	10111	11100	10011	01010	00101	01001
01111	11000	10001	00110	01110	11001	10000	00111	11100
10001	01000	11011	00010	00110	11111	01100	10101	01101
10010	01110	00010	11110	01101	10001	11101	00001	11011
10011	10111	01011	01111	11111	11011	00111	00011	01110
10100	00101	11101	01100	00001	10000	01000	11001	11110
10101	11100	10100	11101	10011	11010	10010	11011	01011
10110	11010	01101	00001	11000	10100	00011	01111	11101
10111	00011	00100	10000	01010	11110	11001	01101	01000
11000	11011	10101	10110	00100	00111	01001	01010	10100
11001	00010	11100	00111	10110	01101	10011	01000	00001
11010	00100	00101	11011	11101	00011	00010	11100	10111
11011	11101	01100	01010	01111	01001	11000	11110	00010
11100	01111	11010	01001	10001	00010	10111	00100	10010
11101	10110	10011	11000	00011	01000	01101	00110	00111
11110	10000	01010	00100	01000	00110	11100	10010	10001
11111	01001	00011	10101	11010	01100	00110	10000	00100

	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111
00001	01101	11101	00101	00110	11110	01110	10110
00010	11110	10001	01100	11000	00101	01010	10111
00011	10011	01100	01001	11110	11011	00100	00001
00100	10110	01101	11101	10111	00111	11100	01100
00101	11011	10000	11000	10001	11001	10010	11010
00110	01000	11100	10001	01111	00010	10110	11011
00111	00101	00001	10100	01001	11100	11000	01101
01000	01110	00011	00001	10100	10110	11011	11001
01001	00011	11110	00100	10010	01000	10101	01111
01010	10000	10010	01101	01100	10011	10001	01110
01011	11101	01111	01000	01010	01101	11111	11000
01100	11000	01110	11100	00011	10001	00111	10101
01101	10101	10011	11001	00101	01111	01001	00011
01110	00110	11111	10000	11011	10100	01101	00010
01111	01011	00010	10101	11101	01010	00011	10100
10001	10100	00111	11110	11010	00011	10000	01001
10010	00111	01011	10111	00100	11000	10100	01000
10011	01010	10110	10010	00010	00110	11010	11110
10100	01111	10111	00110	01011	11010	00010	10011
10101	00010	01010	00011	01101	00100	01100	00101
10110	10001	00110	01010	10011	11111	01000	00100
10111	11100	11011	01111	10101	00001	00110	10010
11000	10111	11001	11010	01000	01011	00101	00110
11001	11010	00100	11111	01110	10101	01011	10000
11010	01001	01000	10110	10000	01110	01111	10001
11011	00100	10101	10011	10110	10000	00001	00111
11100	00001	10100	00111	11111	01100	11001	01010
11101	01100	01001	00010	11001	10010	10111	11100
11110	11111	00101	01011	00111	01001	10011	11101
11111	10010	11000	01110	00001	10111	11101	01011

Таблица 3

Левый и правый обратный к элементам лупы P_5^*

Элемент	**Левый обратный**	**Правый обратный**
(1,0,0,0,0)	**(1,0,0,0,0)**	**(1,0,0,0,0)**
(0,0,0,1,0)	**(1,0,0,1,0)**	**(1,0,0,1,0)**
(1,0,0,1,0)	**(0,0,0,1,0)**	**(0,0,0,1,0)**
(1,0,0,0,1)	**(1,1,1,1,0)**	**(1,1,1,1,0)**
(1,1,1,1,0)	**(1,0,0,0,1)**	**(1,0,0,0,1)**
(0,0,0,0,1)	(0,0,1,0,0)	(0,0,0,1,1)
(0,0,0,1,1)	(0,0,0,0,1)	(0,1,0,0,1)
(0,0,1,0,0)	(0,1,0,1,1)	(0,0,0,0,1)
(0,0,1,0,1)	(0,1,1,0,1)	(1,1,0,1,0)
(0,0,1,1,0)	(1,1,1,0,1)	(0,1,1,1,0)
(0,0,1,1,1)	(1,0,0,1,1)	(1,1,0,0,0)
(0,1,0,0,0)	(0,1,0,0,1)	(1,0,1,0,0)
(0,1,0,0,1)	(0,0,0,1,1)	(0,1,0,0,0)
(0,1,0,1,0)	(1,0,1,1,0)	(1,1,0,0,1)
(0,1,0,1,1)	(0,1,1,0,0)	(0,0,1,0,0)
(0,1,1,0,0)	(1,1,0,0,0)	(0,1,0,1,1)
(0,1,1,0,1)	(1,1,1,0,0)	(0,0,1,0,1)
(0,1,1,1,0)	(0,0,1,1,0)	(1,1,0,1,1)
Элемент	**Левый обратный**	**Правый обратный**
(0,1,1,1,1)	(1,0,1,0,1)	(1,0,1,1,0)
(1,0,0,1,1)	(1,0,1,1,1)	(0,0,1,1,1)
(1,0,1,0,0)	(0,1,0,0,0)	(1,0,1,0,1)
(1,0,1,0,1)	(1,0,1,0,0)	(0,1,1,1,1)
(1,0,1,1,0)	(0,1,1,1,1)	(0,1,0,1,0)
(1,0,1,1,1)	(1,1,1,1,1)	(1,0,0,1,1)
(1,1,0,0,0)	(0,0,1,1,1)	(0,1,1,0,0)
(1,1,0,0,1)	(0,1,0,1,0)	(1,1,1,1,1)
(1,1,0,1,0)	(0,0,1,0,1)	(1,1,1,0,0)
(1,1,0,1,1)	(0,1,1,1,0)	(1,1,1,0,1)
(1,1,1,0,0)	(1,1,0,1,0)	(0,1,1,0,1)
(1,1,1,0,1)	(1,1,0,1,1)	(0,0,1,1,0)
(1,1,1,1,1)	(1,1,0,0,1)	(1,0,1,1,1)

Таблица 4

Порядки элементов лупы P_5^*

y	(1,0,0,0,0)	(0,0,0,1,0)	(1,0,0,1,0)	(0,0,0,0,1)	(0,0,0,1,1)	(0,0,1,0,0)	(0,0,1,0,1)
|y|	1	3	3	4	4	7	6

y	(0,0,1,1,0)	(0,0,1,1,1)	(0,1,0,0,0)	(0,1,0,0,1)	(0,1,0,1,0)	(0,1,0,1,1)	(0,1,1,0,0)
|y|	6	5	6	7	6	5	5

y	(0,1,1,0,1)	(0,1,1,1,0)	(0,1,1,1,1)	(1,0,0,0,1)	(1,0,0,1,1)	(1,0,1,0,0)	(1,0,1,0,1)
|y|	5	5	4	7	7	7	6

y	(1,0,1,1,0)	(1,0,1,1,1)	(1,1,0,0,0)	(1,1,0,0,1)	(1,1,0,1,0)	(1,1,0,1,1)	(1,1,1,0,0)
|y|	6	7	6	7	7	5	8

y	(1,1,1,0,1)	(1,1,1,1,0)	(1,1,1,1,1)
|y|	5	7	6

Таблица 5

Порядки элементов лупы P_1^*

y	(1,0,0,0,0)	(0,0,0,0,1)	(0,0,0,1,0)	(0,0,0,1,1)	(0,0,1,0,0)	(0,0,1,0,1)	(0,0,1,1,0)
|y|	1	4	7	5	6	6	6

y	(0,0,1,1,1)	(0,1,0,0,0)	(0,1,0,0,1)	(0,1,0,1,0)	(0,1,0,1,1)	(0,1,1,0,0)	(0,1,1,0,1)
|y|	5	6	6	5	6	6	5

y	(0,1,1,1,0)	(0,1,1,1,1)	(1,0,0,0,1)	(1,0,0,1,0)	(1,0,0,1,1)	(1,0,1,0,0)	(1,0,1,0,1)
|y|	6	6	5	6	5	6	6

y	(1,0,1,1,0)	(1,0,1,1,1)	(1,1,0,0,0)	(1,1,0,0,1)	(1,1,0,1,0)	(1,1,0,1,1)	(1,1,1,0,0)
|y|	6	5	6	7	6	6	6

y	(1,1,1,0,1)	(1,1,1,1,0)	(1,1,1,1,1)
|y|	6	7	5

Таблица 6

Порядки элементов лупы P_2^*

y	(1,0,0,0,0)	(0,0,0,0,1)	(0,0,0,1,0)	(0,0,0,1,1)	(0,0,1,0,0)	(0,0,1,0,1)	(0,0,1,1,0)
|y|	1	5	4	6	7	6	5

y	(0,0,1,1,1)	(0,1,0,0,0)	(0,1,0,0,1)	(0,1,0,1,0)	(0,1,0,1,1)	(0,1,1,0,0)	(0,1,1,0,1)
|y|	6	6	6	6	6	6	5

y	(0,1,1,1,0)	(0,1,1,1,1)	(1,0,0,0,1)	(1,0,0,1,0)	(1,0,0,1,1)	(1,0,1,0,0)	(1,0,1,0,1)
|y|	6	7	6	6	5	6	6

y	(1,0,1,1,0)	(1,0,1,1,1)	(1,1,0,0,0)	(1,1,0,0,1)	(1,1,0,1,0)	(1,1,0,1,1)	(1,1,1,0,0)
|y|	6	6	5	6	5	6	6

y	(1,1,1,0,1)	(1,1,1,1,0)	(1,1,1,1,1)
|y|	5	7	5

Таблица 7

Порядки элементов лупы P_3^*

y	(1,0,0,0,0)	(0,0,0,0,1)	(0,0,0,1,0)	(0,0,0,1,1)	(0,0,1,0,0)	(0,0,1,0,1)	(0,0,1,1,0)
|y|	1	7	6	6	5	8	6

y	(0,0,1,1,1)	(0,1,0,0,0)	(0,1,0,0,1)	(0,1,0,1,0)	(0,1,0,1,1)	(0,1,1,0,0)	(0,1,1,0,1)
|y|	7	6	6	7	5	7	4

y	(0,1,1,1,0)	(0,1,1,1,1)	(1,0,0,0,1)	(1,0,0,1,0)	(1,0,0,1,1)	(1,0,1,0,0)	(1,0,1,0,1)
|y|	5	4	7	7	5	5	7

y	(1,0,1,1,0)	(1,0,1,1,1)	(1,1,0,0,0)	(1,1,0,0,1)	(1,1,0,1,0)	(1,1,0,1,1)	(1,1,1,0,0)
|y|	4	7	6	8	5	6	6

y	(1,1,1,0,1)	(1,1,1,1,0)	(1,1,1,1,1)
|y|	6	7	5

Таблица 8

Порядки элементов лупы P_4^*

y	(1,0,0,0,0)	(0,0,0,0,1)	(0,0,0,1,0)	(0,0,0,1,1)	(0,0,1,0,0)	(0,0,1,0,1)	(0,0,1,1,0)
|y|	1	8	9	7	8	9	8

y	(0,0,1,1,1)	(0,1,0,0,0)	(0,1,0,0,1)	(0,1,0,1,0)	(0,1,0,1,1)	(0,1,1,0,0)	(0,1,1,0,1)
|y|	7	7	7	8	9	9	9

y	(0,1,1,1,0)	(0,1,1,1,1)	(1,0,0,0,1)	(1,0,0,1,0)	(1,0,0,1,1)	(1,0,1,0,0)	(1,0,1,0,1)
|y|	9	7	8	8	8	8	5

y	(1,0,1,1,0)	(1,0,1,1,1)	(1,1,0,0,0)	(1,1,0,0,1)	(1,1,0,1,0)	(1,1,0,1,1)	(1,1,1,0,0)
|y|	8	6	8	9	8	7	5

y	(1,1,1,0,1)	(1,1,1,1,0)	(1,1,1,1,1)
|y|	7	9	6

Список литературы

1. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре / А. Г. Курош. – М.: Наука, 1973.
2. Левчук В. М. Перечисления полуполевых плоскостей и латинских прямоугольников / В. М. Левчук, С. В. Панов, П. К. Штуккерт // Механика и моделирование : сб. науч. ст. – Красноярск : СибГАУ,2012. – С. 56–70.
3. Подуфалов Н. Д. О функциях на линейных пространствах, связанных с конечными проективными плоскостями / Н. Д. Подуфалов // Алгебра и логика. – 2002. – Т. 41, № 1. – С. 83–103.
4. Холл М. Теория групп / М. Холл. – М. : ИЛ, 1962.
5. Штуккерт П. К. О свойствах полуполей четного порядка / П. К. Штуккерт // Материалы Междунар. науч. конф. по алгебре "Мальцевские чтения - 2013": электрон. сб. Новосибирск: НГУ, 2013. – С. 114.
6. Albert A. A. Finite division algebras and finite planes. / A. A. Albert // Proc. Sympos. Appl. Math. – Vol.10. – Amer. Math. Soc., Providence, R.I. – 1960. – P. 53-70.
7. André J. Über nicht-Desarguesche Ebenen mit transitiver Translationgruppe / J. André // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 156–186.
8. Dempwolff U. The Classification of the translation planes of order 16, I / U. Dempwolff, A. Reifart // Geom. Dedicata. – 1983. – Vol. 15. – P. 137–153.
9. Dempwolff U. File of Translation Planes of Small Order // www.mathematik.uni-kl.de/∼ dempw/dempw_-Plane.html.
10. Dickson L. E. Linear algebras in which division is always uniquely possible / L. E. Dixon // Trans. Amer. Math. Soc. – 1906. – Vol. 7. – P. 370–390.
11. Hughes D. R. Projective planes / D. R. Hughes, F. C. Piper. – Springer - Verlag : New-York Inc., 1973.
12. Kleinfeld E. Techniques for enumerating Veblen-Wedderburn systems / E. Kleinfeld // J. Assoc. Comput. Mach. – 1960. – Vol. 7. – P. 330–337.
13. Knuth D.E. Finite semifields and projective planes / D. E. Knuth // J. Algebra. – 1965. – Vol. 2. – P. 182–217.

14. Lorimer P. A Projective Plane of Order 16 / P. Lorimer // J. Combinatorial theory (A). – 1974. – Vol. 16. – P. 334–347.
15. Lüneburg H. Translation planes / H. Lüneburg. – Springer – Verlag : Berlin Heidelberg New-York Inc., 1980.
16. Rockenfeller R. Translationsebenen der Ordnung 32 / R. Rockenfeller // Diploma Thesis, FB Mathematik, University of Kaiserslautern, 2011.
17. Veblen O. Non-Desarguesian and Non-Pascalian Geometries / O. Veblen, J.H. Maclagan-Wedderburn // Trans. Amer. Math. Soc. – 1907. – Vol. 8, N 3. – P. 379–388.
18. Walker R. J. Determination of Division Algebras with 32 Elements / R. J. Walker // Proc. Symp. Appl. Math. XV, Amer. Math. Soc. – 1962. – P. 83–85.
19. Wesson J. R. On Veblen-Wedderburn Systems / J. R. Wesson // The Amer. Math. Monthly. – 1957. – Vol. 64, N 9. – P. 631–635.

Штуккерт Полина Константиновна, аспирант, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, тел.: 8-913-163-17-14. (e-mail: poli422@yandex.ru)

P. Shtukkert

Quasifields and Translation Planes of the Smallest Even Order

Abstract. Constructs of different classes of finite non-Desargues translation planes and quasifields closely related. It used by computer calculations since the middle of last century. We study semifields of order 32 and quasifields of order 16 of corresponding translation planes.

It is known that translation planes of any order p^n for a prime p can be constructed by using a coordinatizing set W of order n over the field of order p. By using a spread set we providing W of structure of quasifield. The plane is set to be *a semifield plane* if W is a semifield. The plane is Desargues if W is a field. It is well-known that semifield planes are isomorphic if and only if their semifields are isotopic.

Structure of quasifields of order p^n has been studied a few, even for small n. In 1960 Kleinfeld classified quasifields of order 16 with kernel of order 4 and all semifields of order 16 up to isomorphisms. Later Dempwolf and other completed the classification of all translation planes of order 16 and 32. We construct 5 semifields of order 32 and 7 quasifields of order 16 of non-Desargues planes by using their spread sets. For these semifields and for these quasifields (partially) our main results list for them introduced orders of all non-zero elements and all subfields.

Keywords: translation planes, spread set, quasifield, semifield, order of element of loop.

References

1. Albert A.A. Finite division algebras and finite planes. *Proc. Sympos. Appl. Math.*, vol.10. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1960, pp. 53-70.
2. Andre J., Uber nicht-Desarguesche Ebenen mit transitiver Translationgruppe .*J. Andre . Math. Z.* , 1954, vol. 60, pp. 156-186.
3. Dempwolff U., Reifart A. The Classification of the translation planes of order 16, *I. Geom. Dedicata*, 1983, vol. 15, pp. 137-153.

4. Dempwolff U. File of Translation Planes of Small Order. Available at: www.mathematik.uni-kl.de/ dempw.dempw_Plane.html.
5. Dickson L.E. Linear algebras in which division is always uniquely possible. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1906, vol. 7, pp. 370-390.
6. Hall M. Theory of groups. Moscow, 1962.
7. Hughes D.R., Piper F.C. Projective planes. Springer - Verlag: New-York Inc., 1973.
8. Kleinfeld E. Techniques for enumerating Veblen-Wedderburn systems. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 1960, vol. 7, pp. 330-337.
9. Knuth D.E. Finite semifields and projective planes. *J. Algebra*, 1965, vol. 2, pp. 182-217.
10. Kurosh A.A. Lectures on general algebra. Moscow, 1973.
11. Levchuk V.M., Panov S.V., Shtukker P.K. Enumeration of semifield planes and Latin rectangles. Book of scientific articles «Modeling and mechanics». Krasnoyarsk, Sib. St. Air. Univ., 2012, pp. 56-70.
12. Lorimer P. A Projective Plane of Order . *J. Combin. theory* (A), 1974, vol. 16, pp. 334-347.
13. Luneburg H. Translation planes. Springer - Verlag: Berlin Heidelberg New-York Inc., 1980.
14. Podufalov N.D. On functions on linear spaces. *J. Algebra and Logic*, 2002, vol. 41, no. 1, pp. 83-103.
15. Rockenfeller R. Translationsebenen der Ordnung 32. Diploma Thesis, FB Mathematik, Univ. of Kaiserslautern, 2011.
16. Shtukkert P.K. On the properties of semifields of even order. *Collection of abstracts, International Conference «Mal'tcev meeting»*. Novosibirsk, 2013, p. 114.
17. Veblen O. Non-Desarguesian and Non-Pascalian Geometries. *J.H. Maclagan-Wedderburn. Trans. Amer. Math. Soc.*, 1907, vol. 8, no. 3, pp. 379-388.
18. Walker R.J. Determination of Division Algebras with 32 Elements. *Proc. Symp. Appl. Math.* XV, Amer. Math. Soc., 1962, pp. 83-85.
19. Wesson J.R. On Veblen-Wedderburn Systems. *The Amer. Math. Monthly*, 1957, vol. 64, no. 9, pp. 631-635.

Shtukkert Polina, Postgraduate, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Siberian Federal University, 79, Svobodny st., Krasnoyarsk, 660041, tel.: 8-913-163-17-14. (e-mail: poli422@yandex.ru)