Серия «Математика»
2014. Т. 7. С. 34—45

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 531.36

Стабилизация нелинейных механических систем с неполным измерением обобщенных координат *

А. А. Косов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. Рассматриваются системы с дефицитом управляющих воздействий и измерением только части обобщенных координат. Предложен способ стабилизации положения равновесия, основанный на введении вспомогательных координат и применении энергетического подхода с использованием полной энергии расширенной системы в качестве функции Ляпунова. Для существенно нелинейных систем с обобщенно однородным потенциалом выделены три случая, в которых равновесие можно стабилизировать до глобальной асимптотической устойчивости.

Ключевые слова: стабилизация, функции Ляпунова.

1. Введение

При решении задач стабилизации для механических систем широко используется энергетический подход, при котором полная энергия системы используется для построения функции Ляпунова, обеспечивающей требуемую динамику [1; 2]. Законы управления, использующие рассеивание энергии, получили распространение и находят применение при решении многих практических задач (см., например, обзор [3]). В последнее десятилетие интенсивно изучаются задачи стабилизации механических систем с дефицитом управляющих воздействий [4], когда управление может воздействовать непосредственно только на некоторые обобщенные координаты.

В данной статье рассматривается задача стабилизации положения равновесия механической системы при измерении только части обобщенных координат и действии управления только по этим же координатам. Остальные обобщенные координаты и все обобщенные скорости

* Работа выполнена при поддержке Программы № 17 Президиума РАН и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00376).

считаются недоступными для измерения и не могут использоваться в обратной связи.

Развернутая постановка задачи и описание рассматриваемой системы даны в разделе 2. В статье предлагается способ решения задачи стабилизации на основе введения дополнительных вспомогательных координат и применения энергетического подхода с использованием полной энергии расширенной системы в качестве функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы Барбашина – Красовского [5; 6].

В разделе 3 изучается существенно нелинейный случай, когда потенциал исходной системы является обобщенно однородной [7] функцией координат. Для этого случая найдены достаточные условия стабилизируемости равновесия до устойчивости (без гарантии притяжения) в терминах кинетической и потенциальной энергии исходной системы. В разделе 4 указаны три случая, в которых при дополнительных условиях удается гарантировать и притяжение всех решений к равновесию, т. е. обоснована возможность осуществления стабилизации до глобальной асимптотической устойчивости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую механическую систему, движения которой описываются уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_U. \tag{2.1}$$

Здесь вектор обобщенных координат составной $q = (x^T,\ y^T)^T \in R^n$ (верхний индекс T здесь и далее означает транспонирование), $x \in R^m$, $y \in R^k$, $n = m + k$, измеряются только компоненты вектора $x \in R^m$, управлять можно только приложением сил в первых m уравнениях, т. е. $Q_U \equiv (u_1, \dots, u_m, 0, \dots, 0)^T$. Кинетическая энергия $T = \dfrac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\dot{q}$ является положительно определенной квадратичной формой обобщенных скоростей $\dot{q} \in R^n$, матрица $A(q)$ является симметричной положительно определенной непрерывно дифференцируемой функцией обобщенных координат. Потенциальную энергию $\Pi(q) = \Pi(x, y)$ считаем непрерывно дифференцируемой функцией координат, для которой выполнены условия $\Pi(0) = 0$ и $\dfrac{\partial \Pi(0)}{\partial q} = 0$.

При отсутствии управления $Q_U \equiv 0$ система (2.1) имеет положение равновесия $q = \dot{q} = 0$, которое не может быть асимптотически устойчивым уже ввиду отсутствия диссипации. Ставится задача стабилизации положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (2.1) до асимптотической устойчивости за счет выбора управления по принципу неполной обратной связи с использованием только доступной измерению части $x \in R^m$ полного вектора $(q^T,\ \dot q^T)^T \in R^{2n}$ состояния системы.

Для решения задачи стабилизации рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию $\tilde\Pi(x,w)$ измеряемых обобщенных координат $x \in R^m$ и вспомогательных переменных $w \in R^l$ и выберем закон управления для системы (2.1) в потенциальном виде

$$Q_U = -\frac{\partial\tilde\Pi(x,w)}{\partial q}. \tag{2.2}$$

Введем в рассмотрение также две функции вспомогательных переменных: квадратичную форму $\tilde T(\dot w) = \dfrac{1}{2}\dot w^T \tilde A \dot w$, где $\tilde A$ — постоянная симметричная положительно определенная матрица, и непрерывно дифференцируемую положительно определенную однородную порядка $\nu+1 > 1$ функцию $\tilde F(\dot w)$. Будем считать, что динамика вспомогательных переменных описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde T}{\partial\dot w} + \frac{\partial\tilde F(\dot w)}{\partial\dot w} = -\frac{\partial\tilde\Pi(x,w)}{\partial w}. \tag{2.3}$$

Систему (2.1), (2.3), замкнутую управлением (2.2), можно рассматривать как уравнения движения механической системы с потенциальными и диссипативными силами, для которой вектор обобщенных координат составной $\hat q = (x^T, y^T, w^T)^T \in R^{n+l}$, а кинетическая $\hat T$ и потенциальная $\hat\Pi$ энергия и функция Релея $\hat F$ имеют вид $\hat T = T + \tilde T$, $\hat\Pi = \Pi + \tilde\Pi$, $\hat F = \tilde F$. При этом выбор всех функций "с волной" в нашем полном распоряжении. Дифференцируя полную энергию в силу системы (2.1)–(2.3), получаем соотношение $\dfrac{d}{dt}\left(\hat T + \hat\Pi\right) = -(\nu+1)\hat F(\dot w) \le 0$. Поэтому, если функцию $\tilde\Pi(x,w)$ можно выбрать так, чтобы потенциальная энергия $\hat\Pi(x,y,w)$ замкнутой системы была положительно определенной по всем координатам (x,y,w), то положение равновесия $q = \dot q = 0$, $w = \dot w = 0$ будет устойчиво по Ляпунову. Если дополнительно удастся показать, что в множестве $\{\dot w = 0\}$ нет целых траекторий системы (2.1)–(2.3), кроме равновесия $q = \dot q = 0$, $w = \dot w = 0$, то это равновесие на основании теоремы Барбашина – Красовского [5, 6] будет асимптотически устойчиво.

Основная задача данной статьи состоит в том, чтобы получить условия на кинетическую и потенциальную энергию исходной системы (2.1), при выполнении которых стабилизация при помощи указанного выше закона управления (2.2) действительно может быть осуществлена. Рассматривается существенно нелинейный случай, когда потенциальная энергия является обобщенно-однородной функцией координат.

3. Стабилизация систем с обобщенно-однородным потенциалом до устойчивости

Будем далее предполагать, что исходный потенциал $\Pi(x, y)$ в системе (2.1) является непрерывно дифференцируемой обобщенно-однородной функцией [7] координат класса $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_k)$ порядка $\mu + 1$. Здесь $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_k$ — положительные рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $\mu > \max\{\alpha_i - 1, \beta_j - 1, i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, k}\}$ — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем. Отметим, что в частности потенциал $\Pi(x, y)$ может быть однородным полиномом четной степени.

Стабилизирующее управление для системы (2.1) ищем в виде (2.2), где вспомогательный потенциал $\tilde{\Pi}(x, w)$ является функцией измеряемых координат $x \in R^m$ и вспомогательных переменных $w \in R^m$. Выберем эту функцию следующим образом:

$$\tilde{\Pi}(x, w) = \lambda \Phi_1(x) + \gamma \Psi(x, w) + \Phi(w). \tag{3.1}$$

Здесь λ и γ — положительные числа; $\Phi_1(x)$ — непрерывно дифференцируемая положительно определенная обобщенно-однородная функция класса $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ порядка $\mu + 1$; $\Phi(w)$ — непрерывно дифференцируемая положительно определенная обобщенно-однородная функция класса $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ порядка $\mu + 1$, причем $\max\{\delta_1, \dots, \delta_m\} < \mu + 1$; $\Psi(x, w)$ — непрерывно дифференцируемая обобщенно-однородная функция класса $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \delta_1, \dots, \delta_m)$ порядка $\mu + 1$ такая, что при любых постоянных векторах $c^\circ, w^\circ \in R^m$ система уравнений

$$\frac{\partial \Psi(x, w^\circ)}{\partial w} = c^\circ$$

имеет только конечное число решений относительно вектора $x \in R^m$.

Функцию $\Psi(x, w)$ с такими свойствами можно выбрать неединственным образом, например:

а) $\Psi(x, w) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i w_i x_i^{\mu/\alpha_i}$, $a_i \neq 0$;

б) $\Psi(x, w) = \sum\limits_{i=1}^{m} (a_i w_i + b_i x_i)^{(\mu+1)/\alpha_i}$, $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$;

в) $\Psi(x, w) = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i w_i x_i^{\mu/\alpha_i} + \sum\limits_{i=p+1}^{m} (a_i w_i + b_i x_i)^{(\mu+1)/\alpha_i}$, $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, $1 \leq p \leq m - 1$.

Во всех трех случаях $\Psi(x, w)$ будет обобщенно-однородной функцией порядка $\mu + 1$, однако разных классов: класса $(\alpha_1, \dots \alpha_m,\ 1, \dots, 1)$ в случае а), класса $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ в случае б), класса $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, 1, \dots, 1, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_m)$ в случае в). Поэтому выбор функции $\Phi(w)$ и класса ее однородности $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ должен быть согласован с выбором функции $\Psi(x,w)$, чтобы задаваемый (3.1) потенциал $\tilde{\Pi}(x,w)$ обладал свойством обобщенной однородности.

Для того чтобы потенциал замкнутой системы $\hat{\Pi}(x,y,w) = \Pi(x,y) + \tilde{\Pi}(x,w)$ был положительно определенным по (x,y,w), очевидно необходимо, чтобы была положительно определена по y функция $\Pi(0,y)$. Далее будем считать это условие выполненным. Покажем, что для обобщенно-однородных потенциалов $\Pi(x,y)$ выполнение этого необходимого условия является и достаточным для того, чтобы полный потенциал $\hat{\Pi}(x,y,w)$ можно было сделать положительно определенным за счет выбора входящих в (3.1) параметров λ и γ.

Рассмотрим несколько более общую ситуацию. Пусть $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x,y)$ — непрерывные положительно обобщенно однородные функции соответственно классов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ и $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ порядка $\rho > 0$, заданные при всех значениях аргументов $x \in R^m$ и $y \in R^k$. Все числа $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ и ρ считаем вещественными положительными. Введем функции $r_1(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|^{1/\alpha_i}$, $r_2(y) = \sum\limits_{i=1}^{k} |y_i|^{1/\beta_i}$, $r(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|^{1/\alpha_i} + \sum\limits_{i=1}^{k} |y_i|^{1/\beta_i}$ и множество

$$S = \left\{ (x,y) \in R^m \times R^k \Big| \quad \sum_{i=1}^{m} |x_i|^{1/\alpha_i} + \sum_{i=1}^{k} |y_i|^{1/\beta_i} = 1 \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(0,y)$ положительно определены, т. е. при всех $x \in R^m$, $y \in R^k$ удовлетворяют неравенствам*

$$\Phi_1(x) \geq a_1 r_1^{\rho}(x), \quad a_1 > 0,$$

$$\Phi_2(0,y) \geq a_2 r_2^{\rho}(y), \quad a_2 > 0.$$

Тогда для достаточно большого числа $\lambda > 0$ связка

$$\Phi^{(\lambda)}(x,y) = \lambda \Phi_1(x) + \Phi_2(x,y)$$

будет положительно определенной функцией по отношению ко всем переменным, т. е. при всех $x \in R^m, y \in R^k$ выполняется неравенство

$$\Phi^{(\lambda)}(x,y) \geq a\, r^{\rho}(x,y), \quad a > 0.$$

Доказательство. Пусть утверждение теоремы 1 неверно. Тогда существуют последовательности $\lambda_j \to +\infty$ и $\left(x^{(j)}, y^{(j)}\right) \in S$ такие, что

$$\Phi^{(\lambda_j)}(x^{(j)}, y^{(j)}) = \min_{(x,y)\in S} \Phi^{(\lambda_j)}(x,y) \leq 0. \tag{3.2}$$

Не ограничивая общности можно считать последовательность $(x^{(j)}, y^{(j)}) \in S$ сходящейся $\left(x^{(j)}, y^{(j)}\right) \to (\bar{x}, \bar{y}) \in S$. Возможны два случая: либо $r_1(\bar{x}) > 0$, либо $r_1(\bar{x}) = 0$.

В первом случае для достаточно больших номеров j будем иметь $r_1(x^{(j)}) \geq \dfrac{1}{2} r_1(\bar{x}) > 0$. Функция $\Phi_2(x,y)$ на S ограничена снизу

$$\Phi_2(x^{(j)}, y^{(j)}) \geq \min_{(x,y)\in S} \Phi_2(x,y) = b_2 > -\infty.$$

Поэтому $\Phi^{(\lambda_j)}(x^{(j)}, y^{(j)}) = \lambda_j \Phi_1(x^{(j)}) + \Phi_2(x^{(j)}, y^{(j)}) \geq \lambda_j \dfrac{a_1}{2^\rho} r_1^\rho(\bar{x}) + b_2 \to +\infty$ при $j \to +\infty$, что противоречит (3.2).

Во втором случае имеем $\Phi^{(\lambda_j)}(x^{(j)}, y^{(j)}) \geq \Phi_2(x^{(j)}, y^{(j)})$. В силу сходимости $\left(x^{(j)}, y^{(j)}\right) \to (0, \bar{y}) \in S$ и непрерывности $\Phi_2(x,y)$ при достаточно больших номерах j выполняются неравенства $\Phi^{(\lambda_j)}(x^{(j)}, y^{(j)}) \geq \Phi_2(x^{(j)}, y^{(j)}) > \dfrac{1}{2}\Phi_2(0,\bar{y}) > \dfrac{a_2}{2} > 0$, что снова противоречит (3.2). Теорема доказана. □

Как показывают примеры, без условий типа обобщенной однородности даже при сколь угодно больших $\lambda > 0$ связка $\Phi^{(\lambda)}(x,y) = \lambda\Phi_1(x) + \Phi_2(x,y)$ может не быть положительно определенной. Например, в случае, когда $\Phi_2(x,y)$ является суммой линейной формы по первому аргументу и положительно определенной квадратичной формы по второму аргументу, а $\Phi_1(x)$ является положительно определенной квадратичной формой, очевидно, что построить положительно определенную связку невозможно. Если же для этого случая взять $\Phi_1(x) = \|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2}$, то в полном соответствии с теоремой 1 связка $\lambda\Phi_1(x) + \Phi_2(x,y)$, являющаяся положительно обобщенно однородной класса

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) \equiv (2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1)$$

порядка 2, будет положительно определенной при всех достаточно больших $\lambda > 0$.

Из теоремы 1 следует, что при достаточно большом $\lambda > 0$ функция $\Pi(x,y) + \lambda\Phi_1(x) + \Phi(w)$ положительно определена, но тогда, очевидно, при достаточно малом $\gamma > 0$ будет положительно определенной функцией потенциал замкнутой системы $\hat{\Pi}(x,y,w) = \Pi(x,y) + \tilde{\Pi}(x,w)$. Используя в качестве функции Ляпунова полную энергию $V = \hat{T} + \hat{\Pi}$, после дифференцирования в силу замкнутой системы (2.1)–(2.3) получим неравенство $\dot{V} \leq -(\nu+1)\tilde{F}(\dot{w}) \leq 0$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Если потенциальная энергия $\Pi(x,y)$ исходной системы (2.1) является непрерывно дифференцируемой обобщенно-однородной функцией такой, что $\Pi(0,y)$ положительно определена, то при законе управления по принципу неполной обратной связи (2.2), (3.1), выбирая* *число $\lambda > 0$ достаточно большим, а число $\gamma > 0$ достаточно малым, можно стабилизировать положение равновесия $q = \dot{q} = 0$, $w = \dot{w} = 0$ замкнутой системы (2.1)–(2.3) до устойчивости.*

Замечание 1. Утверждение теоремы 2 останется справедливым и в том случае, когда в правой части (2.1) наряду с потенциальными будут присутствовать произвольные гироскопические и диссипативные силы.

Перейдем теперь к рассмотрению случаев, когда равновесию можно обеспечить стабилизацию до более сильного свойства асимптотической устойчивости.

4. Стабилизация систем с обобщенно-однородным потенциалом до асимптотической устойчивости

Чтобы гарантировать асимптотическую устойчивость, достаточно дополнительно показать, что в множестве нулей производной функции Ляпунова нет целых траекторий, кроме исследуемого равновесия. Для этого потребуется накладывать дополнительные условия на исходную систему (2.1). Далее мы рассмотрим три различных случая такого рода условий, обеспечивающих возможность стабилизации до асимптотической устойчивости.

4.1. Диссипация по неизмеряемым координатам

Пусть в системе дополнительно присутствуют силы сопротивления с полной диссипацией по отношению к скоростям изменения $\dot{y}$ неизмеряемых координат y и уравнения движения вместо (2.1) записываются в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + D(q, \dot{q}) + Q_U. \tag{4.1}$$

Здесь непрерывная и липшицева функция $D(q, \dot{q})$ удовлетворяет условию $\dot{q}^T D(q, \dot{q}) \leq -\varphi(\|\dot{y}\|) \leq 0$, где функция $\varphi(r)$ строго монотонно возрастает и $\varphi(0) = 0$. Свойства всех других функций, фигурирующих в (4.1), были оговорены выше.

Теорема 3. *Если потенциальная энергия $\Pi(x, y)$ системы (4.1) является непрерывно дифференцируемой обобщенно-однородной функцией такой, что $\Pi(0, y)$ положительно определена, то при законе управления по принципу неполной обратной связи (2.2), (3.1), выбирая число $\lambda > 0$ достаточно большим, а число $\gamma > 0$ достаточно малым, можно стабилизировать положение равновесия $q = \dot{q} = 0$, $w = \dot{w} = 0$ замкнутой системы (4.1), (2.2), (2.3) до глобальной асимптотической устойчивости.*

Доказательство. Используя в качестве функции Ляпунова полную энергию $V = \hat{T} + \hat{\Pi}$, после дифференцирования в силу замкнутой системы (4.1), (2.2), (2.3), получим неравенство $\dot{V} \leq -(\nu+1)\tilde{F}(\dot{w}) - \varphi(\|\dot{y}\|) \leq 0$. Если параметры λ и γ в соответствии с теоремой 1 выбраны так, чтобы функция $V = \hat{T} + \hat{\Pi}$ была положительно определена, то локальная устойчивость равновесия обеспечена. Из обобщенной однородности потенциала и однородности кинетической энергии по скоростям следует ограниченность всех решений системы (4.1). В множестве нулей производной функции Ляпунова имеем $\dot{w} \equiv 0$ и $\dot{y} \equiv 0$. Тогда $w \equiv w^\circ \equiv const$, $y \equiv y^\circ \equiv const$ и из (2.3) в силу выбора вспомогательного потенциала в соответствии с (3.1) получаем тождество $x \equiv x^\circ \equiv const$. Тем самым установлено, что целые траектории в множестве нулей производной функции Ляпунова могут быть только равновесиями. Значит все частные производные суть нули $\dfrac{\partial\hat{\Pi}(x^\circ, y^\circ, w^\circ)}{\partial x_i} = 0$, $\dfrac{\partial\hat{\Pi}(x^\circ, y^\circ, w^\circ)}{\partial y_j} = 0$, $\dfrac{\partial\hat{\Pi}(x^\circ, y^\circ, w^\circ)}{\partial w_s} = 0$. Поскольку потенциал замкнутой системы $\hat{И}(x, y, w)$ является положительно определенной обобщенно-однородной функцией своих аргументов, то из уравнения Эйлера [7] следует, что положение равновесия в системе единственно, поэтому $x^\circ \equiv 0$, $y^\circ \equiv 0$, $w^\circ \equiv 0$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы Барбашина–Красовского [5, 6], из которой и следует глобальная асимптотическая устойчивость положения равновесия $x = \dot{x} = 0$, $y = \dot{y} = 0$, $w = \dot{w} = 0$. Теорема доказана. □

Отметим, что свойство обобщенной однородности потенциала в доказательстве теоремы 3 использовалось двояким образом: для обоснования возможности сделать полный потенциал положительно определенным привлекалась теорема 1, и при обосновании единственности положения равновесия использовалось уравнение Эйлера. В ряде случаев эти свойства можно установить и без предположений об обобщенной однородности, поэтому предложенный здесь способ стабилизации может успешно применяться и в случаях, когда никаких требований по однородности потенциала нет.

4.2. Случай, когда уравнения для измеряемых и неизмеряемых координат связаны через потенциальные силы

Рассмотрим теперь случай, когда в системе (2.1)

$$m = \dim x = \dim y = k,$$

т. е. размерности векторов измеряемых и неизмеряемых координат совпадают, а кинетическая и потенциальная энергии имеют следующий специальный вид:

$$T = T_1(x,\dot x) + T_2(y,\dot y) = \frac{1}{2}\dot x^T A_{11}(x)\dot x + \frac{1}{2}\dot y^T A_{22}(y)\dot y, \tag{4.2}$$

$$\Pi = \Pi_1(x) + \Pi_{12}(x,y) + \Pi_2(y). \tag{4.3}$$

Здесь $A_{11}(x)$ и $A_{22}(y)$ — непрерывно дифференцируемые симметричные положительно определенные $m\times m$-матрицы, $\Pi_1(x)$ и $\Pi_2(y)$ — непрерывно дифференцируемые обобщенно однородные функции порядка $\mu+1$ классов $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ и $(\beta_1,\dots,\beta_m)$ соответственно (числа μ, α_i, β_i — положительные рациональные с нечетными числителями и знаменателями, причем $\mu+1 > \max\{\alpha_i,\ \beta_i,\ i=1,2,\dots,m\}$), функция $\Pi_{12}(x,y)$ задается формулой $\Pi_{12}(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i y_i^{\sigma_i}$, где вещественные коэффициенты $c_i \neq 0$, а σ_i — положительные рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, причем $\alpha_i + \beta_i\sigma_i = \mu+1$. Уравнения движения замкнутой системы записываются в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot x} - \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi_1(x)}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_{12}(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde\Pi(x,w)}{\partial x}, \tag{4.4}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \dot y} - \frac{\partial T_2}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi_2(y)}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_{12}(x,y)}{\partial y}. \tag{4.5}$$

Эту систему надо еще дополнить уравнениями динамики вспомогательных переменных (2.3) и формулой для управляющего потенциала (3.1). Отметим, что связь между (4.4) и (4.5) обеспечивается только за счет порожденных потенциалом $\Pi_{12}(x,y)$ слагаемых в правых частях.

Теорема 4. *Если кинетическая и потенциальная энергии имеют вид (4.2) и (4.3) соответственно, а функция $\Pi_2(y)$ положительно определена, то при законе управления по принципу неполной обратной связи (2.2), (3.1), выбирая число $\lambda > 0$ достаточно большим, а число $\gamma > 0$ достаточно малым, можно стабилизировать положение равновесия $q = \dot q = 0$, $w = \dot w = 0$ замкнутой системы (4.4), (4.5), (2.3), (3.1) до глобальной асимптотической устойчивости.*

Доказательство. Оно аналогично доказательству предыдущей теоремы и основано на применении той же самой функции Ляпунова в виде полной энергии. Однако теперь для производной в силу системы получим неравенство $\dot V \le -(\nu+1)\tilde F(\dot w) \le 0$. В множестве нулей производной функции Ляпунова имеем $\dot w \equiv 0$. Значит, $w \equiv w^\circ \equiv const$, и из (2.3) в силу выбора вспомогательного потенциала в соответствии с (3.1) получаем тождество $x \equiv x^\circ \equiv const$. Теперь из (4.4) получаем уравнение $\dfrac{\partial \Pi_{12}(x^\circ,y)}{\partial x} = const = b^\circ \in R^m$, откуда находим $y \equiv y^\circ \equiv const$. Завершающая часть доказательства дословно совпадает с таковой для предыдущей теоремы. □

4.3. Случай, когда уравнения для измеряемых и неизмеряемых координат связаны через кинетическую энергию

Рассмотрим теперь случай, когда в системе (2.1)

$$m = \dim x = \dim y = k,$$

а кинетическая и потенциальная энергия имеют следующий специальный вид:

$$T = T_1(x, \dot{x}) + T_{12}(\dot{x}, \dot{y}) + T_2(\dot{y}) = \frac{1}{2}\dot{x}^T A_{11}(x)\dot{x} + \dot{x}^T A_{12}\dot{y} + \frac{1}{2}\dot{y}^T A_{22}\dot{y}, \quad (4.6)$$

$$\Pi = \Pi_1(x) + \Pi_2(y). \quad (4.7)$$

Здесь $A_{11}(x)$ и A_{22} — непрерывно дифференцируемые и постоянные симметричные положительно определенные $m \times m$-матрицы, A_{12} — невырожденная $m \times m$-матрица, $\Pi_1(x)$ и $\Pi_2(y)$ — непрерывно дифференцируемые обобщенно однородные функции порядка $\mu + 1$ классов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ соответственно (числа μ, α_i, β_i — положительные рациональные с нечетными числителями и знаменателями, причем $\mu + 1 > \max\{\alpha_i,\ \beta_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$). Будем предполагать также, что для любого постоянного вектора $c^\circ \in R^m$ система уравнений $\dfrac{\partial \Pi_2(y)}{\partial y} = c^\circ$ имеет конечное множество решений. Уравнения движения замкнутой системы записываются в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T_1}{\partial x} + A_{12}\,\ddot{y} = -\frac{\partial \Pi_1(x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\Pi}(x, w)}{\partial x}, \quad (4.8)$$

$$A_{12}^T\,\ddot{x} + A_{22}\,\ddot{y} = -\frac{\partial \Pi_2(y)}{\partial y}. \quad (4.9)$$

Эту систему надо еще дополнить уравнениями динамики вспомогательных переменных (2.3) и формулой для управляющего потенциала (3.1). Отметим, что связь между (4.8) и (4.9) обеспечивается только за счет порожденных слагаемым $T_{12}(\dot{x}, \dot{y})$ в кинетической энергии членов в левых частях.

Теорема 5. *Если кинетическая и потенциальная энергии имеют вид (4.6) и (4.7) соответственно, а функция $\Pi_2(y)$ положительно определена, то при законе управления по принципу неполной обратной связи (2.2), (3.1), выбирая число $\lambda > 0$ достаточно большим, а число $\gamma > 0$ достаточно малым, можно стабилизировать положение равновесия $q = \dot{q} = 0$, $w = \dot{w} = 0$ замкнутой системы (4.8), (4.9), (2.3), (3.1) до глобальной асимптотической устойчивости.*

Доказательство. Оно аналогично доказательству предыдущей теоремы и основано на применении той же самой функции Ляпунова в виде полной энергии. Для производной в силу системы снова получаем неравенство $\dot{V} \leq -(\nu+1)\tilde{F}(\dot{w}) \leq 0$. В множестве нулей производной функции Ляпунова имеем $\dot{w} \equiv 0$. Значит, $w \equiv w^\circ \equiv const$, и из (2.3) в силу выбора вспомогательного потенциала в соответствии с (3.1) получаем тождество $x \equiv x^\circ \equiv const$. Теперь из (4.8) получаем уравнение $A_{12}\ddot{y} = const = b^\circ \in R^m$, откуда находим $\ddot{y} = A_{12}^{-1}b^\circ$. Подставляя $\ddot{y}$ в (4.9) и решая полученное уравнение относительно y, найдем $y \equiv y^\circ \equiv const$. Завершающая часть доказательства дословно совпадает с таковой для теоремы 3. □

Список литературы

1. Румянцев В. В. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В. В. Румянцев, А. С. Озиранер. – М. : Наука, 1987. – 256 с.
2. Воротников В. И. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения / В. И. Воротников, В. В. Румянцев. – М. : Науч. мир, 2001. – 320 с.
3. Passive non-linear targeted energy transfer and its appli-cations to vibration absorption: a review / Y. S. Lee, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland, G. Kerschen, F. Nucera, S. Tsakirtzis, P. N. Panagopoulos // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part K. Journal of Multi-body Dynamics. – 2008. – Vol. 222, N 2. – P. 77–134.
4. Фантони И. Нелинейное управление механическими системами с дефицитом управляющих воздействий / И. Фантони, Р. Лозано. – М. ; Ижевск : Компьютер. динамика, 2012. – 312 с.
5. Барбашин Е. А. Об устойчивости движения в целом / Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 86, № 3. – С. 453–456.
6. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н. Н. Красовский. – М. : Физматгиз, 1959. – 211 с.
7. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования / В. И. Зубов. – Л. : Судостроение, 1974. – 325 с.

Косов Александр Аркадьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664046, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134 (e-mail: `kosov_idstu@mail.ru`)

Известия Иркутского государственного университета.
2014. Т. 7. Серия «Математика». С. 34–45

A. Kosov

Stabilization of Nonlinear Mechanical Systems with Partial Measurement of the Generalized Coordinates

Abstract. Systems with deficiency of control forces and measurement only parts of the generalized coordinates are considered. The method of stabilization of equilibrium position, based on introduction of auxiliary coordinates and application of energy approach with use of a total energy of expanded system as Lyapunov's function is offered. For essentially nonlinear systems with generally homogeneous potential energy three cases in which the equilibrium position can be stabilized to global asymptotic stability are revealed.

Keywords: stabilization, Lyapunov's function.

References

1. Rumjancev V.V., Oziraner, A.S. *Stability and Stabilization of Motion with Respect to Part of Variables.* Moscow, Nauka, 1987, 256 p. (in Russian).
2. Vorotnikov V.I., Rumjancev, V.V. *Stability and Control with Respect to part Coordinates of Phase Vector of Dynamical Systems: Theory, Methods and Applications.* Moscow, Scientific World, 2001. 320 p. (in Russian).
3. Lee Y.S., Vakakis A.F., Bergman L.A., McFarland D.M., Kerschen G., Nucera F., Tsakirtzis S., Panagopoulos P.N. Passive Non-Linear Targeted Energy Transfer and its Applications to Vibration Absorption: a Review. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part K. Journal of Multi-body Dynamics*, 2008, vol. 222, no. 2, pp. 77-134.
4. Fantoni I., Lozano R. *Non-Linear Control for Underactuated Mechanical Systems.* Springer, 2002. 295 p.
5. Barbashin E.A., Krasovsky N.N. On the Stability of Motion in the Large. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1952, vol. 86, no. 3, pp. 453-456. (in Russian).
6. Krasovsky N.N. *Some Problems of the Theory of Stability of Motion.* Moscow, GIFML, 1959. 211 p. (in Russian).
7. Zubov V.I. *Mathematical Methods for the Study of Automatic Control Systems.* New York etc., Pergamon Press; Yerusalem, Academic Press, 1962. 327 p.

Kosov Alexander, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS), 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, (e-mail: kosov_idstu@mail.ru)