Серия «Математика»
2014. Т. 7. С. 61—78

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.716

Классификация и перечисление базисов клона всех гиперфункций ранга 2 *

А. С. Казимиров, В. И. Пантелеев, Л. В. Токарева
Восточно-Сибирская государственная академия образования

Аннотация. В теории дискретных функций одним из объектов исследования являются гиперфункции — функции, заданные на конечном множестве A и принимающие в качестве своих значений все непустые подмножества множества A. Для гиперфункций специальным образом определяется суперпозиция.

Множества, содержащие все функции-проекции и замкнутые относительно суперпозиции, называются клонами. Клон называется максимальным, если единственным клоном, его содержащим и не совпадающим с ним, является клон всех гиперфункций. Множество гиперфункций называется полным, если оно содержится только в клоне всех гиперфункций. Множество гиперфункций называется базисом, если оно является полным множеством, но при удалении хотя бы одной гиперфункции это свойство нарушается.

В работе рассматриваются гиперфункции на двухэлементном множестве. Известно (В. В. Тарасов), что для такого множества число максимальных клонов равно 9. Для рассматриваемых гиперфункций приведена классификация по принадлежности к максимальным клонам. По этой классификации множество всех гиперфункций разбивается на 119 классов эквивалентности. С использованием данного разбиения оцениваются мощности всех возможных базисов и подсчитывается число различных типов базисов одинаковой мощности. При этом два базиса считаются разными по типу, если хотя бы для одной гиперфункции некоторого базиса не найдется эквивалентной в другом базисе. Показано, что базисы имеют мощности от 1 до 7, для мощности 1 существует только один тип базиса, для мощности 2 существует 581 тип базиса, для мощности 3 — 19 299, для мощности 4 — 58 974, для мощности 5 — 27 857, для мощности 6 — 2316, и для мощности 7 — 35 различных типов базиса.

Ключевые слова: гиперклон, базис, гиперфункция, полное множество, суперпозиция, замкнутое множество, мультифункция.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ: проекты № 12-01-00351, № 13-01-00621.

Введение

Пусть $|A|$ — мощность множества A, 2^A — множество всех подмножеств A и $E_2 = \{0,1\}$. Определим следующие множества функций:

$P_{2,n}^- = \{f \mid f : E_2^n \to 2^{E_2} \setminus \{\varnothing\}\}$, $P_2^- = \bigcup\limits_n P_{2,n}^-$,

$P_{2,n} = \{f \mid f \in P_{2,n}^-$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in E_2^n\}$, $P_2 = \bigcup\limits_n P_{2,n}$

Функции из P_2 называют булевыми функциями, из P_2^- — гиперфункциями.

Замечание 1. В дальнейшем договоримся не различать одноэлементные множества и элементы этого множества, а для множества E_2 будем использовать обозначение «$-$».

Для того чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, ..., x_m), ..., f_n(x_1, ..., x_m))$$

с внешней гиперфункцией $f(x_1, ..., x_n)$ и внутренними гиперфункциями $f_1(x_1, ..., x_m), ..., f_n(x_1, ..., x_m)$ определяла некоторую гиперфункцию $g(x_1, ..., x_m)$, необходимо определить значение гиперфункции на наборах из подмножеств множества E_2.

Если $(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in E_2^m$, то, по определению

$$g(\alpha_1, ..., \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, ..., \alpha_m)} f(\beta_1, ..., \beta_n). \tag{1}$$

Функции $f : (\alpha_1, ..., \alpha_n) \to \{\alpha_i\}$ называются селекторными.

Определение 1. *Гиперклон (клон) — множество гиперфункций, замкнутое относительно суперпозиции и содержащее все селекторные функции.*

Пусть K — гиперклон, K называется максимальным гиперклоном тогда и только тогда, когда замыкание $[K \cup \{f\}]$ совпадает с множеством P_2^- для любой $f \in P_2^- \setminus K$.

Пусть m-местный предикат R^m на множестве $2^{E_2} \setminus \{\varnothing\}$ имеет вид

$$R^m = \{\, (\alpha_{11}, ..., \alpha_{1m}), (\alpha_{21}, ..., \alpha_{2m}), ..., (\alpha_{p1}, ..., \alpha_{pm}) \,\}.$$

Определение 2. *Гиперфункция $f(x_1, ..., x_n)$ сохраняет предикат R^m, если для любых n наборов $(\beta_{11}, ..., \beta_{1m}), ..., (\beta_{n1}, ..., \beta_{nm})$ из предиката набор*

$$(f(\beta_{11}, ..., \beta_{n1}), ..., f(\beta_{1m}, ..., \beta_{nm}))$$

принадлежит предикату.

Определение 3. *Гиперфункция сильно сохраняет предикат, если любая функция, полученная из нее отождествлением переменных, сохраняет предикат.*

Известно [1], что в клоне всех гиперфункций ранга 2 максимальными являются 9 клонов.

1. M — класс функций, сохраняющих предикат

$$\forall i(x_i \neq -) \to (x_1 = 1 \wedge x_2 = 0).$$

2. D_3 — класс функций, сохраняющих предикат

$$\forall i(x_i \neq -) \to (x_1 \oplus x_2 = 1).$$

3. L — класс функций, сохраняющих предикат

$$\forall i(x_i \neq -) \to (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 = 0).$$

4. $Q_9^{'}$ — класс функций, сохраняющих предикат

$$\forall \neg(x_1 = 0 \wedge x_2 = x_3 = 1 \vee x_1 = 1 \wedge x_2 = x_3 = 0).$$

5. C_1 — класс функций, сохраняющих предикат $x \neq -$.
6. C_2 — класс функций, сохраняющих предикат $x \neq 1$.
7. C_3 — класс функций, сохраняющих предикат $x \neq 0$.
8. C_4 — класс функций, сильно сохраняющих предикат

$$\forall i(x_i \neq -) \to (x_1 = 0 \wedge x_2 = 1).$$

9. $Q_9^{''}$ — класс функций, сильно сохраняющих предикат

$$\forall i(x_i \neq -) \to (x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \vee x_2 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_4).$$

Гиперклон C_1 — это клон всех булевых функций P_2, $C_1 \cap M$ — монотонные булевы функции, $C_1 \cap D_3$ — самодвойственные булевы функции, $C_1 \cap L$ — линейные булевы функции.

Множество гиперфункций называется полным, если оно содержится только в клоне всех гиперфункций. Множество гиперфункций называется базисом, если оно является полным множеством, но при удалении хотя бы одной гиперфункции это свойство нарушается.

В [1] показано, что множество гиперфункций является полным тогда и только тогда, когда оно целиком не содержится ни в одном из максимальных клонов.

Для рассматриваемых гиперфункций в работе приведена классификация по принадлежности к максимальным клонам. По этой классификации множество всех гиперфункций разбивается на 119 классов эквивалентности. С использованием данного разбиения оцениваются мощности всех возможных базисов, и подсчитывается число различных типов базисов одинаковой мощности. При этом два базиса считаются разными по типу, если хотя бы для одной гиперфункции некоторого базиса не найдется эквивалентной в другом базисе. Показано, что базисы имеют мощности от 1 до 7, для мощности 1 существует только один тип базиса, для мощности 2 существует 581 тип базиса, для мощности 3 — 19 299, для мощности 4 — 58 974, для мощности 5 — 27 857, для мощности 6 — 2316, и для мощности 7 — 35 различных типов базиса.

Известно [2; 3], что для булевых функций число аналогичных классов эквивалентности равно 15, имеется один тип базиса мощности 1, 17 типов базиса мощности 2, 22 типа базиса мощности 3, 2 типа базиса мощности 4, базисов большей мощности не существует.

Классы эквивалентности и типы базисов для различных дискретных функций, в том числе функций k-значной логики, частичных функций, изучались в ряде работ [4; 5; 6; 7; 8].

Основной результат

Пусть есть матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ & \vdots & \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

размерности $m \times n$. Столбцы этой матрицы обозначим через $A^1, ..., A^n$. Для гиперфункции $f(x_1, ..., x_n)$ определим $f\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ & \vdots & \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$ как следующее множество

$$\left\{ f(B^1, ..., B^n) \mid B^j \in \{A^1, ..., A^n\} \right\}.$$

Здесь, если $B^j = (b_1^j, ..., b_m^j)^t$ при $j \in \{1, ..., n\}$, то

$$f(B^1, ..., B^n) = \begin{pmatrix} f(b_1^1, ..., b_1^n) \\ \vdots \\ f(b_m^1, ..., b_m^n) \end{pmatrix}.$$

Для каждой гиперфункции однозначным образом определим вектор принадлежности максимальным клонам. Длина такого вектора равна 9 и соответствующая координата равна 0, если гиперфункция принадлежит соответствующему максимальному клону, и 1 иначе.

На множестве всех гиперфункций определим отношение эквивалентности следующим образом: эквивалентными будут гиперфункции, у которых совпадают векторы принадлежности максимальным клонам. Так как число максимальных клонов равно 9, то наибольшее возможное число классов эквивалентности равно $2^9 = 512$. Но, несложно заметить, что число всех двоичных векторов длины 9 больше числа классов эквивалентности.

Лемма 1. *Если для гиперфункции f выполняется $f \notin C_2$ и $f \notin C_3$, то $f \notin M$ и $f \notin C_4$.*

Доказательство. Если гиперфункция не принадлежит клонам C_2 и C_3, то на наборе из всех нулей она возвращает 1, а на наборе из всех 1 она возвращает 0. А это означает, что она не принадлежит классам M и C_4. $\square$

Лемма 2. *Если для f выполняется $f \notin C_2, f \notin C_3, f \notin D_3$, то гиперфункция f не принадлежит клонам L, Q_9' и Q_9''.*

Доказательство. Так как гиперфункция f не принадлежит клону D_3, то

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & - & 1 & - & - \\ 1 & 0 & - & 0 & - & 1 & - \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Учитывая, что на наборе из всех 0 функция возвращает 1, а на наборе из всех 1 функция возвращает 0, получим

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & - & 1 & - & - \\ 1 & 0 & - & 0 & - & 1 & - \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\square$

Лемма 3. *Если функция f принадлежит клону C_1 и не принадлежит клону Q_9', то она не принадлежит клону Q_9''.*

Доказательство. Заметим вначале, что любой набор, не содержащий «$-$» и принадлежащий предикату Q_9', можно дополнить до набора, не содержащего «$-$» и принадлежащего предикату Q_9''. Наборы, содержащие «$-$» и принадлежащие предикату Q_9', очевидно, можно дополнить, не используя «$-$», до наборов, принадлежащих предикату Q_9''.

К матрице предиката Q_9' добавим строку таким образом, чтобы все наборы стали принадлежать предикату Q_9'' и сохраняли свойство не содержать «$-$». Полученную матрицу обозначим через B. Тогда очевидно

$$f(B) \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0(1) \end{pmatrix} \right\}.$$

Любой из 4-х возможных наборов не принадлежит Q_9''. □

Лемма 4. *Если булева функция f не принадлежит клону L и принадлежит клону D_3, то она не принадлежит клону Q_9'.*

Доказательство. Пусть A — матрица предиката L. Функция f не принадлежит клону L. Из восьми возможных случаев рассмотрим один: $f(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. В матрице A столбцы, содержащие «$-$», очевидно, можно заменить на соответствующие столбцы этой же матрицы, но уже не содержащие «$-$» так, что значение функции не изменится.

Получим

$$f\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&1&0 \\ 0&1&1&0&0&1&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Отсюда следует

$$f\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заменим столбцы вида $(011)^t$ и $(100)^t$ на $(010)^t$ и $(101)^t$, соответственно. Это нам даст равенство (с учетом того, что функция булева)

$$f\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0(1) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

В матрице слева все столбцы принадлежат предикату Q_9'. Для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай, когда справа получаем $(101)^t$.

Третья строка равенства 2, третья строка равенства 3 и строка, двойственная к четвертой строке равенства 2, дадут следующее равенство

$$f\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0&1&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&0&1&1&0&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Теорема 1. *Гиперфункции, не принадлежащие клонам C_2 и C_3, порождают не более 13 классов эквивалентности.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную гиперфункцию f. Если f не принадлежит клону D_3, то по леммам 1 и 2 ей может соответствовать один из двух векторов — (111101111) и (111111111). Первому вектору соответствует функция, вектор значений которой имеет вид (1110), а второму — $(1--11--0)$.

Теперь рассмотрим случай, когда функция f принадлежит клону D_3. С учетом леммы 1 число возможных классов не больше 16 — это классы, соответствующие всевозможным векторам вида $(10\alpha_1\alpha_2\alpha_3 111\alpha_4)$. Все классы разобьем на два типа: первый образуют функции, принадлежащие C_1, а второй — не принадлежащие C_1.

– Функции первого типа: $f \in C_1$.

- f — линейная функция. Линейная булева функция, не сохраняющая 0 и не сохраняющая 1, — это функция, представимая как
$$f(x) = x_1 + ... + x_{2k+1} + 1.$$
При $k = 0$ получаем функцию (10), которой соответствует вектор (100001110). В остальных случаях имеем:
$$f(1,1,...,1,1) = 0, f(1,1,...,1,0) = 1, f(0,1,...,1,1) = 1,$$
значит, функция не сохраняет предикат Q'_9 и по лемме 3 она не сохраняет предикат Q''_9. Остался один набор — (100101111) и соответствующая ему функция — (10010110).
- f — нелинейная булева функция. Леммы 3 и 4 оставляют один возможный набор — (101101111).

– Функции, не принадлежащие C_1, могут породить не более 8 классов эквивалентности.

□

Лемма 5. *Если функция f на всех наборах принимает значение 1 или «$-$», не принадлежит клону C_2, то она не принадлежит клону C_4 тогда и только тогда, когда она не принадлежит клону D_3.*

Доказательство. Пусть функция f не принадлежит клону D_3:
$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & - & - & - \\ 1 & 0 & - & - & 0 & 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Отсюда следует
$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отождествим у функции f те переменные, вместо которых подставляли столбец $(10)^t$. Полученную функцию обозначим через g. Для нее выполняется
$$g\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Функция f на наборе из всех нулей возвращала 1, значит и функция g обладает этим свойством. Поэтому

$$g\begin{pmatrix} 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство означает, что g (а значит, и f) не принадлежит C_4.

Если сама функция f не сохраняет предикат C_4, то она не сохраняет и предикат D_3. Пусть предикат C_4 не сохраняет функция g, полученная из f отождествлением некоторых переменных, т. е.

$$g\begin{pmatrix} 0 & 0 & - & - & 1 & - \\ 1 & - & 0 & 1 & - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Но тогда

$$g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

А это значит, что и для f выполняется

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Теорема 2. *Гиперфункции, не принадлежащие клону C_2 и принадлежащие клону C_3, порождают не более 29 классов эквивалентности.*

Доказательство. Рассматриваемые в теореме функции не принадлежат клону C_2, значит, на наборе, состоящем из одних нулей, они возвращают 1.

Случай а). Рассматриваем только булевы функции. Очевидно, что на наборе, состоящем из одних единиц, рассматриваемые функции возвращают 1. Значит, они не принадлежат клонам C_4 и D_3.

Если функция является монотонной, то она не может ни на одном наборе возвращать 0, значит, это функция тождественно равная 1 и ей соответствует один класс — (010001010).

Если же функция не является монотонной, то на некотором наборе она возвращает 0. Поэтому

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, функция не принадлежит клону Q_9', а по лемме 3 — и клону Q_9''. Число возможных классов эквивалентности не больше 2.

Случай б). Рассматриваемая функция не является булевой.

Случай б1). Функция f ни на одном наборе не принимает значение 0. Значит, она принадлежит клонам M, L, Q_9', Q_9''. С учетом леммы 5, все возможные классы — это классы, соответствующие векторам вида $(0\alpha00110\alpha0)$.

Случай б2). Функция f на некотором наборе возвращает 0. С учетом этого и того, что $f(0,...,0)=1$, получаем, что $f \notin M$.

Предположим, что функция не принадлежит клону D_3:

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 & - & - & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & 1 & - & - & - \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & - & - & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & 1 & - & - & - \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Из последнего равенства сразу, или с учетом того, что на некотором наборе функция возвращает 0, следует, что f не принадлежит Q_9'. Число возможных классов в этом случае не более 8.

Если функция принадлежит клону D_3, то число возможных классов не более 16. □

Двойственным образом получаем:

Теорема 3. *Гиперфункции, принадлежащие клону C_2 и не принадлежащие клону C_3, порождают не более 29 классов эквивалентности.*

Лемма 6. *Линейная булева функция f, зависящая не менее чем от 2-х переменных и сохраняющая 0 и 1, сохраняет и предикат C_4.*

Доказательство. Функция f представима как $f = x_1 + x_2 + ... + x_{2k+1}$. Очевидно, что если вместо хотя бы одной переменной подставить «$-$», то функция возвратит «$-$». Единственный набор из предиката C_4, который не содержит «$-$», — $(01)^t$. При подстановке этого набора вместо всех переменных получаем $(01)^t$. □

Лемма 7. *Если функция является булевой и нелинейной, то она не принадлежит Q_9'.*

Доказательство. Наборы-константы принадлежат Q_9'. Подставляя в нелинейную булеву функцию одноместные функции-константы (с учетом того, что функция сохраняет нуль и единицу), получим функции x_1x_2 или $x_1x_2 + x_1 + x_2$. Несложно показывается, что обе они не принадлежат Q_9'. □

Лемма 8. *Если функция не принадлежит клону C_4, то она не принадлежит клону D_3 или не принадлежит клону M.*

Доказательство. Справедливость леммы очевидна, если функция сама не сохраняет предикат C_4.

Пусть теперь функция g получена из f отождествлением переменных и не сохраняет предикат C_4, т. е.

$$g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & - & - & - \\ 1 & - & - & 0 & 1 & - \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассмотрим один из трех случаев:

$$g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & - & - & - \\ 1 & - & - & 0 & 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Функция g не принадлежит M, а значит, и f не принадлежит M.

В оставшихся случаях получаем, что f не принадлежит D_3. □

Лемма 9. *Если функция f не принадлежит клону D_3 и принимает как значение 0, так и значение 1, то она не принадлежит клону Q'_9.*

Доказательство. Справедливость леммы следует из двух следующих возможных равенств:

$$f\begin{pmatrix} 0/1 & 0/1 & 0/1 & 0/1 & 0/1 & 0/1 & 0/1 \\ 0 & 1 & 0 & - & 1 & - & - \\ 1 & 0 & - & 0 & - & 1 & - \end{pmatrix} \text{ есть } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Лемма 10. *Если $f \in C_1$ и $f \in C_4$, то $f \in D_3$.*

Доказательство. Предположим, что $f \notin D_3$. Тогда на наборах из предиката получается набор, который не принадлежит предикату:

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & - & - & - \\ 1 & 0 & - & - & 0 & 1 & - \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассмотрим случай, при котором получается набор $(00)^t$. Так как значения функции не равны «$-$», то при любом уточнении наборов, являющихся аргументами функции, значения не изменятся. Таким образом:

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отождествим все переменные, соответствующие наборам $(01)^t$, и все переменные, соответствующие $(10)^t$:

$$f_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $f \in C_4$ и $f \in C_1$, то $f(0,...,0) = 0$, $f(1,...,1) = 1$, иначе

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

т. е. $f \notin C_4$.

Тогда при отождествлении получим:

$$f_1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

И далее

$$f_1\begin{pmatrix} 0 & - \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т. е. $f_1 \notin C_4$, а значит, и $f \notin C_4$.

Аналогично рассматривается случай, когда получается набор $(11)^t$.

$\square$

Введем обозначение $f^0_{x_i}$, $f^1_{x_i}$ для нулевой и единичной остаточных подфункций, полученных из f подстановкой 0 и 1 вместо x_i.

Лемма 11. *Если $f \in C_1$ и $f \in C_4$, то для каждого i выполняется одно из двух условий:*

1. $f^0_{x_i} = \overline{f}^1_{x_i}$.

2. $f^0_{x_i} \le f^1_{x_i}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, предположим, что оба условия не выполняются для $i = 1$. Тогда найдутся $\alpha_2,...,\alpha_n \in E_2$ и $\beta_2,...,\beta_n \in E_2$, что

$$f(0,\alpha_2,...,\alpha_n) = f(1,\alpha_2,...,\alpha_n), \quad f(0,\beta_2,...,\beta_n) > f(1,\beta_2,...,\beta_n).$$

Пусть $f(0,\alpha_2,...,\alpha_n) = f(1,\alpha_2,...,\alpha_n) = 0$.

Отождествим переменные по каждому из четырех множеств $\{i \,|\, \alpha_i = a, \beta_i = b\}$ при $a, b \in E_2$ и получим

$$f_1\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отождествим 2-ю и 4-ю, а также 3-ю и 5-ю переменные:

$$f_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $f \in D_3$, то $f_2 \in D_3$:

$$f_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если $f_2(0,1,1) = 1$, то $f_2(1,0,0) = 0$ и

$$f_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f_2 \notin C_4$. Значит, $f_2(0,1,1) = 0$ и $f_1(0,1,1,1,1) = 0$. Отождествим в функции f_1 2-ю с 3-й и 4-ю с 5-й переменные:

$$f_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $f_3 \in D_3$, то

$$f_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f_3 \begin{pmatrix} 1 & - & 0 \\ - & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и $f_3, f \notin C_4$.

Аналогично рассматривается случай, когда

$$f(0, \alpha_2, ..., \alpha_n) = f(1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 1.$$

Таким образом, предположение не верно и для каждого i выполняется одно из двух условий леммы. $\square$

Лемма 12. *Если $f \in C_1$ и $f \in C_4$ и хотя бы для одного i выполняется $f^0_{x_i} = \overline{f}^1_{x_i}$, то для всех i выполняется $f^0_{x_i} = \overline{f}^1_{x_i}$ или $f^0_{x_i} = f^1_{x_i}$.*

Доказательство. Пусть $f^0_{x_i} = \overline{f}^1_{x_i}$. Выберем j такое, что $f^0_{x_j} \neq f^1_{x_j}$.

Для упрощения изложения положим $i = 1$, $j = 2$. Тогда

$$f(\alpha_1, 0, \alpha_3, ..., \alpha_n) = a, f(\alpha_1, 1, \alpha_3, ..., \alpha_n) = \overline{a}.$$

При этом $f(\overline{\alpha}_1, 0, \alpha_3, ..., \alpha_n) = \overline{a}$, $f(\overline{\alpha}_1, 1, \alpha_3, ..., \alpha_n) = a$.

Если $a = 0$, то $f(\overline{\alpha}_1, 0, \alpha_3, ..., \alpha_n) > f(\overline{\alpha}_1, 1, \alpha_3, ..., \alpha_n)$. Если $a = 1$, то $f(\alpha_1, 0, \alpha_3, ..., \alpha_n) > f(\alpha_1, 1, \alpha_3, ..., \alpha_n)$.

Таким образом, $f^0_{x_j} \not\leq f^1_{x_j}$, а значит, по предыдущей лемме, $f^0_{x_j} = \overline{f}^1_{x_j}$. $\square$

Следовательно, если $f \in C_1$ и $f \in C_4$, то f будет линейной по всем переменным или монотонной по всем переменным, т. е. справедлива:

Лемма 13. *Если $f \in C_1$ и $f \in C_4$, то $f \in L$ или $f \in M$.*

Теорема 4. *Гиперфункции, принадлежащие клону C_2 и принадлежащие клону C_3, порождают не более 48 классов эквивалентности.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Пусть функция f является булевой.

— Если f не принадлежит клону D_3, то с учетом того, что функция принадлежит клонам C_2 и C_3, получаем

$$f\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - & - & - \\ 1 & 0 & - & - & 0 & 1 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Из этого равенства сразу следует, что, во-первых, $f \notin Q'_9$, $f \notin Q''_9$, $f \notin L$. А во-вторых,

$$f\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Отождествим у функции f те переменные, вместо которых подставляли $(1010)^t$ и $(1100)^t$, соответственно. Получим функцию g, для которой

$$g\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

И отсюда легко получаем, что

$$g\begin{pmatrix} 0 & - \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } g\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

То есть функция f не принадлежит C_4. Число возможных классов эквивалентности не превосходит 2.

— Пусть теперь булева функция f принадлежит клону D_3 и является линейной. Тогда это функция $f(x) = x$ или $f(x_1, ..., x_{2k+1}) = x_1 + ... + x_{2k+1}$ при $k > 1$. Первая функция образует один класс. Вторая функция, очевидно, является немонотонной и не принадлежит Q'_9, а потому не принадлежит Q''_9 (по лемме 3). Возможные наборы — это (100100001) и (100100011). Но для второго набора не существует гиперфункции (по лемме 6).

Рассматриваем нелинейные булевы функции, принадлежащие клону D_3. Если функция не является монотонной, то

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & - & - & - \\ 1 & 0 & 1 & - & - & 0 & 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда с учетом того, что функция сохраняет 0, получаем, что она не принадлежит клону Q_9'' (а значит, и клону Q_9''). Число возможных наборов по лемме 13 не больше одного.

Пусть теперь функция является монотонной.

В этом случае функция принадлежит клону C_4. В противоположном случае она не принадлежит D_3 или M (лемма 8), что противоречит рассматриваемому случаю. С учетом лемм 3 и 7 получаем один набор.

А теперь до конца теоремы рассматриваем только функции, не являющиеся булевыми.

Из леммы 8 следует, что число возможных наборов вида

$$\begin{array}{ccccc} M & D_3 & C_1 & C_2 & C_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

не более 8.

Из леммы 9 следует, что число возможных наборов вида

$$\begin{array}{ccccc} M & D_3 & C_1 & C_2 & C_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

не более 8, так как, если функция не является монотонной, то она принимает как значение 0, так и значение 1

Из леммы 9 также следует, что число возможных наборов вида

$$\begin{array}{ccccc} M & D_3 & C_1 & C_2 & C_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

не более 10. Исключаются наборы, в которых на 3-й позиции стоит 1, а на 4-й позиции стоит 0 (если функция не принадлежит L, то она принимает как значение 0, так и значение 1). Таких наборов 4. И исключаются наборы, в которых на 4-й позиции стоит 0, а на 9-й позиции стоит 1 (если функция не принадлежит клону Q_9'', то она опять же принимает как значение 0, так и значение 1). Таких наборов 2.

Очевидно, что число всех наборов вида

$$\begin{array}{ccccc} M & D_3 & C_1 & C_2 & C_3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

не более 16.

□

Теорема 5. *Множество всех гиперфункций порождает 119 классов эквивалентности.*

Доказательство. Доказательство следует из табл. 1 и теорем 1–4. □

Полный перебор показал, что имеется 581 тип базиса мощности 2, 19 299 типов базиса мощности 3, 58 974 типа базиса мощности 4, 27 857 типов базиса мощности 5, 2316 типов базиса мощности 6, 35 типов базиса мощности 7.

Таблица 1.

Классы эквивалентности и соответствующие им функции

1	000000000	01	61	000010000	——
2	000010001	0———0———0————111	62	000010100	—0
3	000011000	1—	63	000110000	—————001
4	000110001	00—1—10—————————	64	001010000	—11—0——1
5	001010001	—1110——1	65	001100001	00010111
6	001110000	—01——1——————1——1	66	001110001	————0111
7	010000110	00	67	010001010	11
8	010010000	—11—	68	010010010	—111
9	010010110	—000	69	010011010	1——1
10	010110000	—001	70	010110001	———1—0————0—1———
11	010110010	——1—01—1	71	010110011	—10—0—11
12	011100011	0111	72	011110000	—00—————0——1——0—
13	011110001	———00111	73	011110010	—10—1——1———1———1
14	011110011	——1—0111	74	100001110	10
15	100010000	————1—0—	75	100010001	f_1
16	100010010	——110—0—	76	100010011	————1—1—00———01—
17	100010100	——10	77	100010101	f_2
18	100010110	—100	78	100010111	f_3
19	100011000	1—0—	79	100011001	f_4
20	100011010	110—	80	100011011	f_5
21	100011110	1——0	81	100011111	111————0———0———0
22	100100001	01101001	82	100101111	10010110
23	100110000	————1—01	83	100110001	————1001
24	100110010	———11——10—10—1——	84	100110011	—100———1—011—10—
25	100110100	—————110	85	100110101	————0110
26	100110110	———10—10	86	100110111	———10110
27	100111000	1———100—	87	100111001	1—0—0—1—
28	100111010	1——10—1—	88	100111011	1—0—011—
29	100111110	1————110	89	100111111	1———0110
30	101010000	———01————0————0—	90	101010001	—10—1——10—00————
31	101010010	f_6	91	101010011	——0—0—0—11—1—10—
32	101010100	—11—1——0	92	101010101	———10—0—0—0——000
33	101010110	—1——1——01————0—0	93	101010111	—10—0—00
34	101011000	1——1—10—	94	101011001	111——1—1—1—10———
35	101011010	1—1————01——0——0—	95	101011011	1——0111—
36	101011110	1——1—————10————0	96	101011111	1——0—000

37	101100011	01110001	97	101101111	11101000
38	101110000	−−0−−11−−0−−0−0−	98	101110001	−−−−1101
39	101110010	−10−0−−01−0−−1−−	99	101110011	−−110−01
40	101110100	−11−0−−1−−−−−−−−0	100	101110101	−−−−1110
41	101110110	−−−11−−−−−1−0−−00	101	101110111	−−−10100
42	101111000	110−−−11−−110−−−	102	101111001	1−1−1−0−
43	101111010	11−−1−0−−−−−00−−−	103	101111011	1−−1010−
44	101111110	100−0−−1−−−−−−−−0	104	101111111	1−−−1110
45	110100111	0110	105	110101011	1001
46	110110000	−−−11−0−	106	110110001	−−100−01
47	110110010	−−−11−01	107	110110011	−−−11001
48	110110100	−110	108	110110101	−−1−0110
49	110110110	0−10	109	110110111	−−−00110
50	110111000	100−	110	110111001	1−−0010−
51	110111010	1−01	111	110111011	1−−−1001
52	111100011	01111101	112	111100111	0100
53	111101011	1101	113	111101111	1110
54	111110000	−1100−−1	114	111110001	−−1110−−
55	111110010	−−−−−1−−0−001−001	115	111110011	−−−11101
56	111110100	−10−0−10	116	111110101	−−−11110
57	111110110	0−−1−110	117	111110111	−−−00100
58	111111000	1−−0011−	118	111111001	1−−0000−
59	111111010	1−−0−001	119	111111011	1−−−1101
60	111111111	1−−11−−0			

Функции $f_1 - f_6$ задаются следующим образом:

$$f_1 = (- - - - - - - - - - - - - - - - 111 - - - -0 - - - 0 - - - 0 - - - -$$
$$- - - - - - - - - - - - 111 - - - -0 - - - 0 - - - - -);$$
$$f_2 = (- - - - - - - - - - - - - - - - 111 - - - -0 - - - 0 - - - 0);$$
$$f_3 = (- - - - 1 - - - 1 - - - -0001 - - - 1 - - - 1 - - - -000);$$
$$f_4 = (1 - - - 1 - - - 1 - - - -000 - - - - - - - - - - - - - - - -);$$
$$f_5 = (111 - - - -0 - - - 0 - - - 0111 - - - -0 - - - 0 - - - -);$$
$$f_6 = (-1 - -1 - -01 - - - -0 - 0 - 1 - -1 - -01 - - - -0 - -).$$

Список литературы

1. Тарасов В. В. Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики / В. В. Тарасов // Проблемы кибернетики. – М. : Наука, 1975. – Вып. 30. – С. 319–325.
2. Яблонский С. В. О суперпозициях функций алгебры логики / С. В. Яблонский // Мат. сб. – 1952. – Т. 30,№ 2(72), С. 329–348.
3. Krnić L. Types of bases in the algebra of logic / L. Krnić // Glasnik matematicko-fizicki i astronomski. Ser 2. – 1965. – Vol. 20. – P. 23–32.
4. Classification and basis enumerations in many-valued logics / M. Miyakawa, I. Stojmenović, D. Lau, I. Rosenberg // Proc. 17th International Symposium on Multi-Valued logic. – Boston, 1987. – P. 151–160.

5. Classification and basis enumerations of the algebras for partial functions / M. Miyakawa, I. Stojmenović, D. Lau, I. Rosenberg // Proc. 19th International Symposium on Multi-Valued logic. – Rostock, 1989. – P. 8–13.
6. Lau D. Classification and enumerations of bases in $P_k(2)$/ D. Lau, M. Miyakawa // Asian-European Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 01, N 02. – P. 255–282.
7. Stojmenović I. Classification of P_3 and the enumeration of base of P_3 / I. Stojmenović // Rev. of Res. 14, Fat. of Sci., Math. Ser., Novi Sad. – 1984. – P. 73-80.
8. Miyakawa M., Rosenberg I., Stojmenović I. Classification of three-valued logical functions preserving 0 / Miyakawa M., Rosenberg I., Stojmenović I. // Discrete Applied Mathematics, 28 (1990) P. 231-249.

Казимиров Алексей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, г. Иркутск, ул. Н. Набережная, 6, тел.: (3952) 200567 (e-mail: `a.kazimirov@gmail.com`)

Пантелеев Владимир Иннокентьевич, доктор физико-математических наук, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, г. Иркутск, ул. Н. Набережная, 6, тел.: (3952) 200567 (e-mail: `vl.panteleyev@gmail.com`)

Токарева Лидия Владимировна, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, г. Иркутск, ул. Н. Набережная, 6, тел.: (3952) 200567 (e-mail: `lidia.t@mail.com`)

A. Kazimirov, V. Panteleyev, L. Tokareva

Classification and Enumeration of Bases in Clone of All Hyperfunctions on Two-Elements Set

Abstract. Hyperfunctions are functions from a finite set A to set of all nonempty subsets of A. Superposition of hyperfunctions is defined in a special way.

Clones are sets containing all projections and closed under superposition. Clone is a maximal clone if the only clone containing it is a clone of all hyperfunctions. Set of hyperfunctions is called complete set if the only clone containing it is a clone of all hyperfunctions. Set of hyperfunctions is a basis if it is a complete set and not any of its subsets is a complete set.

This paper considers hyperfunctions on a two-elements set. As Tarasov V. showed there are 9 maximal clones on this set.

Hyperfunctions on two-elements set classified by their membership in maximal clones. All hyperfunctions are divided into 119 equivalence classes. Based on this classification all kinds of bases are described. Two bases are of different kinds if there is a function in one basis with no equivalent function in the other one. We show that bases of hyperfunctions can have cardinality from 1 to 7: there is only one kind of basis with cardinality 1, 581 with cardinality 2, 19 299 with cardinality 3, 58 974 with cardinality 4, 27 857 with cardinality 5, 2316 with cardinality 6 and 35 with cardinality 7.

Keywords: clone, hyperclone, basis, hyperfunction, hyperoperation, complete set, superposition, closed set, multifunction, multioperation.

References

1. Tarasov V.V. Completeness Criterion for Partial Logic Functions (in Russian). *Problemy Kibernetiki*, Moscow, Nauka,1975, vol. 30, pp. 319-325.
2. Yablonskij S.V. On the Superpositions of Logic Functions (in Russian). *Mat. Sbornik*, 1952, vol. 30, no. 2(72), pp. 329-348.
3. Krnić L. Types of Bases in the Algebra of Logic. *Glasnik Matematicko-Fizicki i Astronomski*, ser 2, 1965, vol. 20, pp. 23-32.
4. Miyakawa M., Stojmenović I., Lau D., Rosenberg I. Classification and basis enumerations in many-valued logics. *Proc. 17th International Symposium on Multi-Valued logic*. Boston, May 1987, p. 151-160.
5. Miyakawa M., Stojmenović I., Lau D., Rosenberg I. Classification and basis enumerations of the algebras for partial functions. *Proc. 19th International Symposium on Multi-Valued logic*, Rostock, 1989, pp. 8-13.
6. Lau D., Miyakawa M. Classification and enumerations of bases in $P_k(2)$. *Asian-European Journal of Mathematics*, June 2008, vol. 1, no. 2, pp. 255-282.
7. Stojmenović I. Classification of P_3 and the enumeration of base of P_3, *Rev. of Res. 14, Fat. Of Sci., Math. Ser.*, Novi Sad, 1984, p. 73-80.
8. Miyakawa M., Rosenberg I., Stojmenović I. Classification of Three-valued logical functions preserving 0. *Discrete Applied Mathematics*, 1990, vol. 28, pp. 231-249.

Kazimirov Alexey, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), East Siberian State Academy of Education, 6, N. Naberezhnaya St., Irkutsk, 664011, tel.: (3952) 200567 (e-mail: a.kazimirov@gmail.com)

Panteleyev Vladimir, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), East Siberian State Academy of Education, 6, N. Naberezhnaya St., Irkutsk, 664011, (e-mail: vl.panteleyev@gmail.com)

Tokareva Lidia, East Siberian State Academy of Education, 6, N. Naberezhnaya St., Irkutsk, 664011, tel.: (3952) 200567
(e-mail: lidia.t@mail.com)