Серия «Математика»
2014. Т. 7. С. 133—140

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.716

О двух изоморфных интервалах в решетке ультраклонов ранга 2 *

С. Ю. Халтанова
Восточно-Сибирская государственная академия образования

Аннотация. Рассматриваются мультифункции, заданные на двухэлементном множестве, и специальным образом определенная суперпозиция таких функций. Множество всех мультифункций содержит в себе множество булевых функций, множество частичных функций и множество гиперфункций. Обычным образом определяются клоны мультифункций. Интервалом $I(A, B)$ называется частично упорядоченное по включению множество всех клонов, содержащих клон A и являющихся подмножествами клона B.

В статье описывается фрагмент интервала решетки клонов мультифункций, содержащих все мультифункции, сохраняющие 0 и 1. При этом, если мультифункция сохраняет 0 и 1, то она ни на одном наборе не возвращает пустое множество. Известно, что если рассматривать только частичные булевы функции, то весь интервал содержит 45 клонов.

В работе показано, что рассматриваемый фрагмент содержит 12 клонов и для него в решетке клонов частичных функций имеется изоморфный интервал.

Ключевые слова: клон, суперпозиция, интервал, булевы функции, гиперфункции, частичные функции, мультифункции.

Введение

В теории функциональных систем, как правило, рассматриваются функции вместе с некоторым образом определенной операцией суперпозиции. Естественным является вопрос описания решетки всех замкнутых относительно заданной суперпозиции множеств функций. Решетка таких множеств для булевых функций (функций алгебры логики) полностью описана в [8]. В общем случае такая задача является достаточно сложной и к настоящему времени она не решена полностью для широкого класса дискретных функций, в том числе для функций k-значной логики, для частичных, гипер- и мультифункций.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ: проект № 13-01-00621.

Сложность полного решения задачи вызывает необходимость описания различных интервалов в решетках функций. С описанием различных интервалов решеток дискретных функций можно ознакомиться в работах [1; 2; 5; 6; 7].

В настоящей работе описываются два изоморфных интервала в решетке ультраклонов [3; 4] мультифункций, определенных на двухэлементном множестве.

1. Основные понятия и определения

Пусть $E = \{0, 1\}$, $E' = \{0, 1, \varnothing\}$, $F = \{0, 1, \{0, 1\}\}$, $F' = \{0, 1, \varnothing, \{0, 1\}\}$. Функции $f : E^n \to E$ называются булевыми функциями; функции $f : E^n \to E'$ — частичными функциями; функции $f : E^n \to F$ — гиперфункциями; функции $f : E^n \to F'$ — мультифункциями.

Через P^2 обозначим множество всех булевых функций, через P^* — множество частичных функций, через $P^\sim$ — множество гиперфункций, через $P^{\widetilde{*}}$ — множество мультифункций.

Функция $f(x_1, \dots, x_n) : f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \{\alpha_i\}$ называется селекторной.

Для функций будем использовать запись как в виде вектора-строки, так и в виде вектора-столбца значений функции на всех наборах, расположенных в натуральном порядке.

Суперпозиция мультифункций $f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ определяет мультифункцию $g(x_1, \dots, x_m)$ следующим образом [4]:

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если это пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Частичный ультраклон — множество мультифункций, замкнутое относительно суперпозиции и содержащее все селекторные функции.

Частичные ультраконы ниже будем называть просто клонами. Наименьший клон, содержащий множество A, будем обозначать через $[A]$.

Интервалом $I(A, B)$ называется частично упорядоченное по включению множество всех клонов, содержащих клон A и являющихся подмножествами клона B.

Пусть K — клон, K_1 — его подклон, тогда K_1 называется максимальным подклоном в K тогда и только тогда, когда $[K_1 \cup \{f\}] = K$ для любой $f \in K \setminus K_1$.

В дальнейшем будем использовать кодировку: $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0, 1\} \leftrightarrow \sim$, $\varnothing \leftrightarrow *$.

Пусть $t \in \{2, \sim\}$, $k \in \{*, \widetilde{*}\}$. Определим следующие множества:
$T_{01}^t = \{f \in P^t \mid f(0, \dots, 0) = 0, f(1, \dots, 1) = 1\}$,

$T^k_{0,*} = \{f \in P^k \mid f(0,\ldots,0) = *\}$, $T^k_{1,*} = \{f \in P^k \mid f(1,\ldots,1) = *\}$,
$T^k_{01,*1} = \{f \in P^k \mid f(0,\ldots,0) = *, f(1,\ldots,1) = 1\}$,
$T^t_{01,0*} = \{f \in P^k \mid f(0,\ldots,0) = 0, f(1,\ldots,1) = *\}$,
$T^k_{01,**} = \{f \in P^k \mid f(0,\ldots,0) = *, f(1,\ldots,1) = *\}$.

Очевидно, что множество T^t_{01} является клоном, а остальные множества замкнуты относительно суперпозиции.

2. Вспомогательные леммы

Для $\alpha \in F'$ определим $\bar{\alpha}$: $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$, $\bar{*} = *$, $\bar{\sim} = \sim$.

Для набора $\mathbf{a} = \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in (F')^n$ набор $\mathbf{a}^\nabla = \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$ назовем двойственным.

Функция f^∇ называется двойственной к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $f^\nabla(\mathbf{a}) = \bar{f}(\mathbf{a}^\nabla)$ для любого набора $\mathbf{a}$.

Индукцией определим понятие двойственного терма Φ^∇ к терму Φ следующим образом: если терм — переменная x, то $x^\nabla = \bar{x}$; если $\Phi = f(x_1, \ldots, x_n)$, то $\Phi^\nabla = f^\nabla(x_1, \ldots, x_n)$; если $\Phi = f(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, то $\Phi^\nabla = f^\nabla(\Phi_1^\nabla, \ldots, \Phi_n^\nabla)$.

Индукцией по глубине терма легко показать, что выполняется *принцип двойственности* : если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ представима термом Φ, то двойственная ей функция $f^\nabla(x_1, \ldots, x_n)$ представима термом Φ^∇.

Следствие 1. *Если A — клон, то $A^\nabla = \{f^\nabla \mid f \in A\}$ — клон.*

Клон A^∇ называется двойственным к клону A.

Следствие 2. *Если A, B — клоны, A максимальный клон в B, то A^∇ максимальный клон в B^∇.*

Лемма 1. *Следующие множества функций являются клонами*

1) $T^{\sim}_{01} \cup C$ для любого $C \in \{T^{\tilde{*}}_{0,*}, T^{\tilde{*}}_{01,*1}, T^{\tilde{*}}_{01,**}\}$;

2) $T^{\sim}_{01} \cup A \cup B$ при $A \in \{T^{\tilde{*}}_{01,0*}, T^{\tilde{*}}_{1,*}\}$, $B \in \{T^{\tilde{*}}_{0,*}, T^{\tilde{*}}_{01,**}\}$;

3) $T^{\sim}_{01} \cup T^{\tilde{*}}_{01,0*} \cup T^{\tilde{*}}_{01,*1} \cup T^{\tilde{*}}_{01,**}$.

Доказательство. 1) Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_m)$ является суперпозицией $f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$, где $f, f_1, \ldots, f_n$ принадлежат множеству $T^{\sim}_{01} \cup C$. Покажем, что $g \in T^{\sim}_{01} \cup C$.

Если функции $f, f_1, \ldots, f_n$ принадлежат $T^{\sim}_{01}$, то $g \in T^{\sim}_{01}$. Если же они принадлежат C, то и $g \in C$.

Теперь рассмотрим случаи, когда $f \in T_{01}^{\sim}$ и хотя бы одна $f_i \in C$ или $f \in C$ и хотя бы одна $f_i \in T_{01}^{\sim}$.

В обоих случаях получим $g \in C$, так как $g(0,\dots,0) = *$,
$$g(1,\dots,1) = \begin{cases} 1, \text{если } C = T^*_{01,*1};\\ *, \text{если } C = T^*_{01,**};\\ \delta \in \{0,1,*\}, \text{если } C = T^*_{0,*}, \end{cases}$$
а на остальных наборах значение функции g может быть произвольным.

Остальные утверждения доказываются аналогичным образом. $\square$

Лемма 2. *Если* $f \in T^{\widetilde{*}}_{0,*} \setminus (T^{\widetilde{*}}_{01,*1} \cup T^{\widetilde{*}}_{01,**})$, *то* $[T_{01}^{\sim} \cup \{f\}] = T_{01}^{\sim} \cup T^{\widetilde{*}}_{0,*}$.

Доказательство. Покажем справедливость включения
$$T_{01}^{\sim} \cup T^{\widetilde{*}}_{0,*} \subseteq [T_{01}^{\sim} \cup \{f\}]\,.$$

Отождествлением переменных из функции f можно получить одноместную функцию $(*0)$ или $(*\sim)$.

Вторая функция позволяет получить первую:
$$\begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}\begin{pmatrix}* & 0\\ \sim & 0\\ * & 0\\ \sim & 1\end{pmatrix} = \begin{matrix}*\\0\\*\\\sim\end{matrix}, \begin{matrix}*\\0\\*\\\sim\end{matrix}\begin{pmatrix}* & 0\\ \sim & 1\end{pmatrix} = \begin{matrix}*\\0\end{matrix}.$$

Пусть $g(x_1,\dots,x_m) \in T^{\widetilde{*}}_{0,*}$ и на наборах $\widetilde{\gamma}_1,\dots,\widetilde{\gamma}_t$ значение функции равно $*$.

Имея функцию $(*0)$ и множество $T_{01}^{\sim}$, можно получить такую функцию $h(x_1,\dots,x_n)$, что на наборах $\widetilde{\gamma}_1,\dots,\widetilde{\gamma}_t$ ее значение равно $*$, а на остальных наборах она принимает значение 0.

Рассмотрим функцию $u(y,x_1,\dots,x_n)$ из множества $T_{01}^{\sim}$ такую, что
$u(1,\dots,1) = 1$;
$$u(0,\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \begin{cases} g(\alpha_1,\dots,\alpha_n), \text{ если } g(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \neq *;,\\ 0 \text{ иначе }. \end{cases}$$
Тогда $g(x_1,\dots,x_n) = u(h(x_1,\dots,x_n),x_1,\dots,x_n)$.

Обратное включение очевидно. $\square$

Применяя принцип двойственности, получаем

Лемма 3. *Если* $f \in T^{\widetilde{*}}_{1,*} \setminus (T^{\widetilde{*}}_{01,0*} \cup T^{\widetilde{*}}_{01,**})$, *то* $[T_{01}^{\sim} \cup \{f\}] = T_{01}^{\sim} \cup T^{\widetilde{*}}_{1,*}$.

Лемма 4. *Если* $f \in T^{\widetilde{*}}_{01,*1}$, *то* $[T_{01}^{\sim} \cup \{f\}] = T_{01}^{\sim} \cup T^{\widetilde{*}}_{01,*1}$.

Доказательство. Справедливость равенства в одну сторону очевидна, а в другую показывается аналогично доказательству леммы 3. $\square$

Используя принцип двойственности, получаем

Лемма 5. *Если* $f \in T^{\widetilde{*}}_{01,0*}$, *то* $[T^{\sim}_{01} \cup \{f\}] = T^{\sim}_{01} \cup T^{\widetilde{*}}_{01,0*}$.

Лемма 6. *Пусть* $f \in T^{\widetilde{*}}_{01,**}$, *тогда* $(*1**) \in [T^{\sim}_{01} \cup \{f\}]$.

Доказательство. Так как $f \in T^{\widetilde{*}}_{01,**}$, то для функции f выполняется $f(0,\dots,0) = *, f(1,\dots,1) = *$ и существует такой набор $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, что $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \neq *$. Выберем набор $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ такой, что набор $(0\alpha_i\beta_i1) \in \{(0011),(0101)\}$ для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ и в функцию f вместо переменной x_i подставим $(0\alpha_i\beta_i1)$. Получим функцию $g(x,y) = (*\gamma\delta*)$, где $\gamma \in \{0,1,\sim\}$, $\delta \in \{0,1,\sim,*\}$. Пусть $g_1 = (0011)$, $g_2 = (0111)$,$g_3 = (*\gamma**)$, тогда при любых γ, δ имеем $g(g_1,g_2) = g_3$ и суперпозиция $g_2(g_3,g_2)$ определяет функцию $(*1**)$. □

Лемма 7. *Пусть* $f = (*1**)$, *тогда* $[T^2_{01} \cup \{f\}] = T^2_{01} \cup T^*_{01,**}$.

Доказательство. Справедливость утверждения показывается по аналогии с леммой 3. □

3. Основной результат

Пусть P_* — множество мультифункций, которые на всех наборах принимают значение $*$, тогда очевидной является следующая лемма.

Лемма 8. *Если* A *— клон в* $P^{\widetilde{*}}$, *то* $A \cup P_*$ *— клон.*

Замечание 1. С учетом леммы 8 будем рассматривать только такие клоны, которые содержат множество P_*.

Теорема 1 ([5]). *Интервал* $I(T^2_{01}, T^2_{01} \cup T^*_{1,*} \cup T^*_{0,*})$ *содержит* 12 *клонов, и они вложены друг в друга так, как показано на рисунке 1.*

Теорема 2. *Интервал* $I(T^2_{01}, T^2_{01} \cup T^*_{1,*} \cup T^*_{0,*})$ *изоморфен интервалу* $I(T^{\sim}_{01}, T^{\sim}_{01} \cup T^{\widetilde{*}}_{1,*} \cup T^{\widetilde{*}}_{0,*})$.

Доказательство. Введем обозначения: для $\alpha \in \{1,*\}$ и произвольного множества функций M положим

$$\alpha \cdot M = \{\alpha \cdot f \mid f \in M\},$$

где $\alpha \cdot f$ — это суперпозиция $\cdot(\alpha, f)$.

Тогда произвольный клон K из интервала $I(T^2_{01}, T^2_{01} \cup T^*_{1,*} \cup T^*_{0,*})$ можно представить как

$$K = T^2_{01} \cup \alpha_1 \cdot T^*_{01,**} \cup \alpha_2 \cdot T^*_{01,*1} \cup \alpha_3 \cdot T^*_{01,*1t} \cup \alpha_4 \cdot T^*_{0*} \cup \alpha_5 \cdot T^*_{1,*}.$$

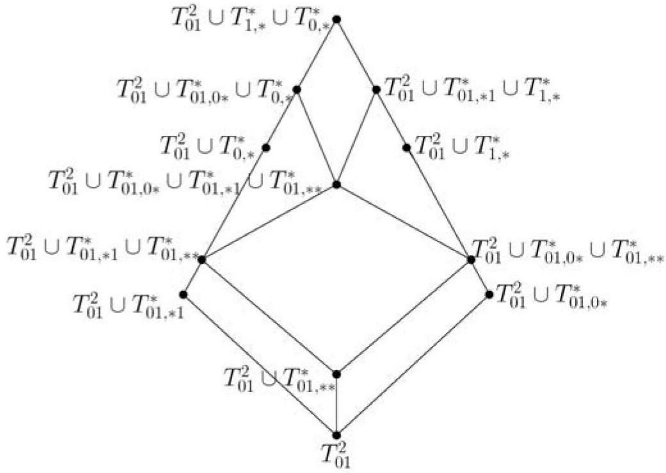

Рис. 1. Интервал $I(T^2_{01}, T^2_{01} \cup T^*_{0*} \cup T^*_{1*})$

Отображение φ, которое ставит в соответствие клону K клон $\tilde{K}$

$$\tilde{K} = T_{\widetilde{01}} \cup \alpha_1 \cdot \widetilde{T^*_{01,**}} \cup \alpha_2 \cdot \widetilde{T^*_{01,*1}} \cup \alpha_3 \cdot \widetilde{T^*_{01,*1t}} \cup \alpha_4 \cdot \widetilde{T^*_{0*}} \cup \alpha_5 \cdot \widetilde{T^*_{1,*}},$$

удовлетворяет следующим условиям:

1) φ является взаимно-однозначным отображением;

2) $K_1 \subseteq K_2 \Leftrightarrow \tilde{K}_1 \subseteq \tilde{K}_2$.

3) φ является отображением «на»;

Первое и второе утверждения очевидны.

Пусть есть некоторый клон K' из интервала $I(T_{\widetilde{01}}, T_{\widetilde{01}} \cup \widetilde{T^*_{0*}} \cup \widetilde{T^*_{1*}})$.

Введем следующие обозначения: $A_1 = \widetilde{T^*_{01,*1}}$, $A_2 = \widetilde{T^*_{01,**}}$, $A_3 = \widetilde{T^*_{01,0*}}$, $A_4 = \widetilde{T^*_{0,*}} \backslash (A_1 \cup A_2)$, $A_5 = \widetilde{T^*_{1,*}} \backslash (A_2 \cup A_3)$.

Если найдется $f \in K' \backslash T_{\widetilde{01}}$, то f принадлежит одному из A_i.

Рассмотрим все возможные случаи:

– $f \in A_1$, тогда по лемме 4 получаем, что $A_1 \subseteq K'$;

– $f \in A_2$, по леммам 6 и 7 $A_2 \subseteq K'$;

– $f \in A_3$, по лемме 5 $A_3 \subseteq K'$;

– $f \in A_4$, по лемме 2 $\widetilde{T^*_{0,*}} \subseteq K'$, следовательно, $A_1, A_2, A_4 \subseteq K'$;

– $f \in A_5$, по лемме 3 $\widetilde{T^*_{1,*}} \subseteq K'$, следовательно, $A_2, A_3, A_5 \subseteq K'$.

Таким образом, каждое из множеств A_i входит целиком в K' или имеет с ним пустое пересечение.

Несложно показать, что если существуют одновременно две функции $f_1 \in A_1$, $f_2 \in A_3$, то $A_2 \subseteq K'$.

В результате получаются следующие возможные комбинации множеств A_i, входящих в K' (0 в i-м столбце означает то, что множество

A_i не содержится в клоне K', 1 — содержится):

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	Клон K'
0	0	0	0	0	$T_{01}^{\sim}$
1	0	0	0	0	$T_{01}^{\sim} \cup T_{01,*1}^{\widetilde{*}}$
0	1	0	0	0	$T_{01}^{\sim} \cup T_{01,**}^{\widetilde{*}}$
0	0	1	0	0	$T_{01}^{\sim} \cup T_{01,0*}^{\widetilde{*}}$
1	1	0	0	0	$T_{01}^{\sim} \cup T_{01,*1}^{\widetilde{*}} \cup T_{01,**}^{\widetilde{*}}$
0	1	1	0	0	$T_{01}^{\sim} \cup T_{01,**}^{\widetilde{*}} \cup T_{01,0*}^{\widetilde{*}}$
1	1	1	0	0	$T_{01}^{\sim} \cup T_{01,*1}^{\widetilde{*}} \cup T_{01,**}^{\widetilde{*}} \cup T_{01,0*}^{\widetilde{*}}$
1	1	0	1	0	$T_{01}^{\sim} \cup T_{0,*}^{\widetilde{*}}$
1	1	1	1	0	$T_{01}^{\sim} \cup T_{0,*}^{\widetilde{*}} \cup T_{01,0*}^{\widetilde{*}}$
0	1	1	0	1	$T_{01}^{\sim} \cup T_{1,*}^{\widetilde{*}}$
1	1	1	0	1	$T_{01}^{\sim} \cup T_{1,*}^{\widetilde{*}} \cup T_{01,*1}^{\widetilde{*}}$
1	1	1	1	1	$T_{01}^{\sim} \cup T_{0,*}^{\widetilde{*}} \cup T_{1,*}^{\widetilde{*}}$

Все возможные комбинации дают 12 клонов, изоморфных клонам из интервала $I(T_{01}^2, T_{01}^2 \cup T_{1,*}^* \cup T_{0,*}^*)$. □

Список литературы

1. Алексеев В. Б. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике / В. Б. Алексеев, А. А. Вороненко // Дискрет. математика. – 1994. – Т. 6, вып. 4. – С. 58–79.
2. Жук Д. Структура замкнутых классов в предполном классе самодвойственных функций трехзначной логики // Докл. Рос. акад. наук. — 2011. — Т. 437, № 6. — С. 738–742.
3. Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. – 2009. – № 2 (68). – С. 60–79.
4. Пантелеев В. И. О двух максимальных мультиклонах и частичных ультраклонах / В. И. Пантелеев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 46–53.
5. Lau D. Function algebras on finite sets. A basic course on many-valued logic and clone theory / D. Lau. – Berlin : Springer-Verlag. 2006. – 668 p.
6. Doroslovaćki R., Pantović J., Vojvodić G. One interval in the lattice of partial hyperclones // Chechoslovak Mathematical Journal. – 2005. – N 55(130). – P. 719–724.
7. Pantovic J., Vojvodic G. On the partial hyperclone lattice // Proceedings of 35th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2005). – 2005. – P. 96–100.
8. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic / E. L. Post // Annals of Math. Studies. – Princeton : Univ. Press, 1941. – Vol. 5. – 122 p.

Халтанова Соёлма Юрьевна, аспирант, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, г. Иркутск, ул. Н. Набережная, 6, тел.: (3952)200567 (e-mail: soelabad@mail.ru)

S. Haltanova

On Two Isomorphic Intervals in the Lattice of Ultraclones on Two-Elements Set

Abstract. This paper considers multifunctions on two-elements set with superposition defined in a special way. Set of all multifunctions contains set of Boolean functions, set of partial functions and set of hyperfunctions. Clone of multifunctions is a set closed under superposition. Interval $I(A, B)$ is a partially ordered by inclusion set of all subclones of B containing A.

This paper describes a fragment of an interval in the lattice of clones containing all multifunctions preserving 0 and 1 (if particular function simultaneously preserves 0 and 1 then it cannot have an empty set as a value on any input). It is known that interval of partial Boolean functions preserving 0 and 1 consists of 45 clones.

This paper shows that considered interval contains 12 clones and has an isomorphic interval in the lattice of clones of partial functions.

Keywords: clone, superposition, Boolean functions, partial functions, hyperfunctions, multifunctions.

References

1. Alekseev V.B. On Some Closed Sets in Partial Two-Valued Logic. *Disktretnaya matematika*, 1994, vol. 6, no. 4, pp. 58-79.
2. Zhuk D. A Structure of Closed Sets in a Maximal Set of Self-Dual Functions of Three-Valued Logic. *Dokl. Ros. Akad. Nauk*, 2011, vol. 437, no. 6, pp. 738-742.
3. Panteleyev V.I. Completeness Criterion for Incompletely Defined Boolean Functions. *Vestnik Samar. Gos. Univ. Est.-Naush. Ser.*, 2009, vol. 2, no. 68, pp. 60-79.
4. Panteleyev V.I. On Two Maximal Multiclones and Partial Ultraclones. *Izvestiya Irk. Gos. Univ. Ser. Matematika*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 46-53.
5. Lau D. Function Algebras on Finite Sets. A Basic Course on Many-Valued Logic and Clone Theory. Berlin, Springer-Verlag, 2006. 668 p.
6. Doroslovaćki R., Pantović J., Vojvodić G. One Interval in the Lattice of Partial Hyperclones. *Chechoslovak Mathematical Journal*, 2005, no. 55(130), pp. 719-724.
7. Pantovic J., Vojvodic G. On the Partial Hyperclone lattice. *Proceedings of 35th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic* [ISMVL 2005], 2005, pp. 96–100.
8. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic. Annals of Math. Studies, Princeton, Univ. Press, 1941, vol. 5. 122 p.

Haltanova Soelma, Postgraduate, East Siberian State Academy of Education, 6, N. Naberezhnaya st., Irkutsk, 664011, tel.: (3952) 200567 (e-mail: soelabad@mail.ru)