Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 2. С. 124—133

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.562

О функции роста конечных жестких решеток

О. Е. Перминова
Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Аннотация. Изучаются жесткие решетки, т. е. решетки, любой эндоморфизм которых является постоянным эндоморфизмом (преобразует все элементы в какой-либо один элемент) или тождественным эндоморфизмом. Доказывается, что функция роста конечных жестких решеток экспоненциальна.

Ключевые слова: решетка, эндоморфизм, жесткая решетка, функция роста.

Введение

Одной из наиболее известных комбинаторных характеристик алгебраических систем является функция роста, которая для заданного натурального n указывает число n-элементных конечных алгебраических систем заданного вида. Широко известна и функция роста другого вида, которая указывает число n-элементных подсистем или элементов данной алгебраической системы, обладающих заданным свойством. В монографии Ф. Харари [1] можно найти много примеров функций роста, указывающих для каждого натурального n число n-элементных графов того или иного вида. Р. И. Григорчуком изучалась известная функция роста групп, определяющая количество различных элементов группы, записываемых в виде произведения порождающих элементов, В. И. Трофимовым изучались другие интересные аналоги функций роста групп, луп, полугрупп, графов (см. [2]).

Для многих классов алгебраических систем задача нахождения функций роста оказалась очень трудной и не решенной до сих пор. Например, не найдены такие функции, указывающие для каждого натурального n число n-элементных конечных решеток, различных видов графов (гамильтоновых графов, турниров и др.). Поэтому вместо нахождения функции роста решается задача нахождения достаточно "хороших"нижней $g(n)$ или верхней $h(n)$ оценок числа n-элементных алгебраических систем. А именно, устанавливается, что для данного натурального n существует не менее $g(n)$ или не более $h(n)$ алгебраических систем из заданного класса с n элементами, где $g(n), h(n)$ — некоторые функции натурального аргумента n.

В работе [3] найдены экспоненциальные нижняя и верхняя оценки функции роста для класса конечных решеток. В данной статье доказано, что является экспоненциальной нижняя оценка функции роста для класса конечных жестких решеток.

Решетка называется *жесткой*, если любой её эндоморфизм является постоянным эндоморфизмом (т. е. преобразует все элементы в какой-либо один элемент) или тождественным эндоморфизмом.

В работе [4] доказано, что для каждого натурального $n \geq 10$ существует $n - 8$ жестких попарно невложимых друг в друга n-элементных решеток.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Функция роста конечных жестких решеток экспоненциальна.*

Отсюда следует, что число жестких решеток, также как и число всех решеток, имеет экспоненциальный рост.

1. Описание конструкций жестких решеток

Короной (см. рис. 1) называется частично-упорядоченное множество $\{x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2, \ldots,\ x_m,\ y_m\}$ $(m \geq 3)$ со следующим отношением частичного порядка $\leq$:

$$x_i,\ x_{i+1} \leq y_i\ (i = 1, \ldots, m-1),\ x_1,\ x_m \leq y_m,$$

при этом множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ являются антицепями, т. е. состоят из попарно несравнимых элементов.

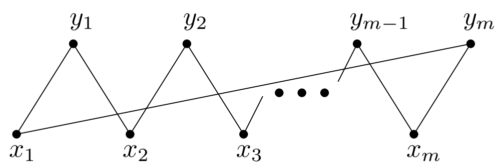

Рис. 1. Корона порядка $2m$.

При обозначении решеток будем пользоваться следующим правилом. Нижний индекс в обозначении решетки - это порядок (число элементов) решетки. Например, R_n - решетка порядка n.

Далее нам потребуются решетки R_{2m+2} (см. рис. 2), где m – натуральное число, $m \geq 4$, частично-упорядоченным подмножеством которых является корона порядка $2m$.

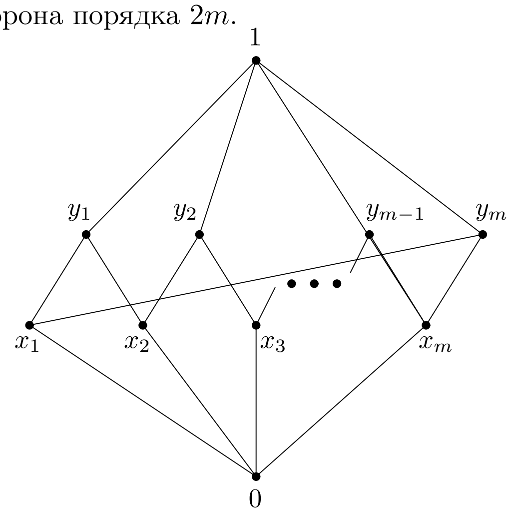

Рис. 2. Решетка R_{2m+2}.

Расширениями решетки назовем решетки, полученные из данной решетки с помощью применения конечного числа процедур одноэлементного расширения (см. [5]).

Покажем, что решетки $\tilde{R}_{5+2p} = \{0, a, b, c, z_1, z_1^*, \ldots, z_p, z_p^*, 1\}$ и $\tilde{R}_{5+2p+1} = \{0, a, b, c, z_1, z_1^*, ..., z_p, z_p^*, z_{p+1}, 1\}$ (p - натуральное число, $p \geq 1$), диаграммы которых представлены на рис. 3, являются расширениями двухэлементного интервала $[0, 1]$, причем нуль 0 и единица 1 интервала $[0, 1]$ остаются нулем 0 и единицей 1 решеток $\tilde{R}_{5+2p}$ и $\tilde{R}_{5+2p+1}$.

Пусть сначала $p = 1$. Тогда решетка $\tilde{R}_{5+2p} = \tilde{R}_7 = \{0, a, b, c, z_1, z_1^*, 1\}$ получается из интервала $[0, 1]$ с помощью применения следующих процедур одноэлементного расширения. Добавим последовательно между сравнимыми элементами 0 и 1 элементы a и c, между сравнимыми элементами a и 1 элементы b и z_1, между сравнимыми элементами 0 и z_1 элемент z_1^*. При $p \geq 1$ решетка $\tilde{R}_{5+2p+1}$ получается из решетки $\tilde{R}_{5+2p}$ добавлением между сравнимыми элементами a и z_p элемента z_{p+1} (такое расширение будем называть *процедурой вида* 1). При $p \geq 2$ решетка $\tilde{R}_{5+2p}$ получается из решетки $\tilde{R}_{5+2p-1}$ добавлением между сравнимыми элементами 0 и z_p элемента z_p^* (такое расширение будем называть *процедурой вида* 1*). Пусть $l = 5+2p$ или $l = 5+2p+1$. Из построения решеток видно, что решетка $\tilde{R}_{l+1}$ является одноэлементным расширением решетки $\tilde{R}_l$ и, следовательно, расширением интервала $[0, 1]$. Описанную процедуру расширения интервала будем называть далее *заменой интервала решеткой* $\tilde{R}_l$. Отметим, что конструкции решеток $\tilde{R}_l$ для $7 \leq l \leq 13$ взяты из работы [6].

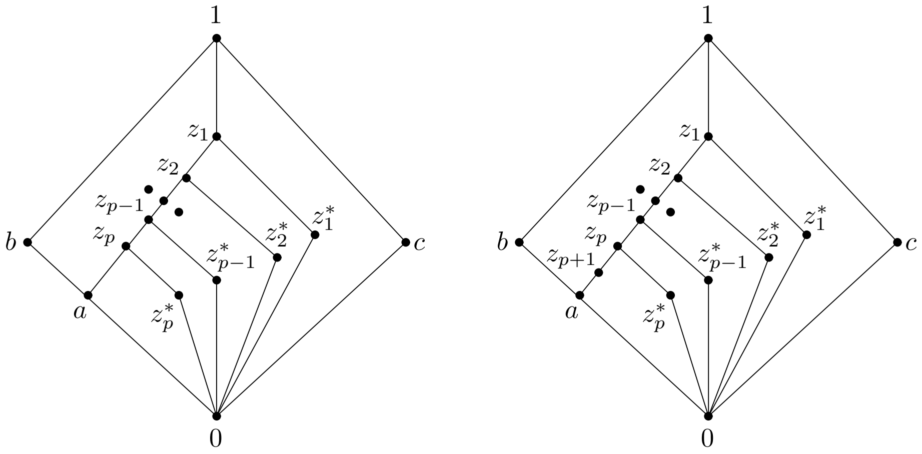

Рис. 3. Решетки $\tilde{R}_{5+2p}$ и $\tilde{R}_{5+2p+1}$.

Заменим теперь интервал $[x_m, y_m]$ решетки R_{2m+2} решеткой $\tilde{R}_7$, при этом нулем решетки $\tilde{R}_7$ будет элемент x_m, а единицей решетки $\tilde{R}_7$ будет элемент y_m. Полученное расширение решетки R_{2m+2} обозначим через R_{2m+7}.

Пусть $F = \{f_i^i, f_{i+1}^i | i = 1, ..., m-1\} \cup \{f_1^m\}$, $G = \{g_l | l = 1, ..., m\}$, $H = \{h_l | l = 1, ..., m\}$. Обозначим через $Ex = F \cup G \cup H \cup \{q\}$. Построим всевозможные расширения решетки R_{2m+7} элементами множества Ex следующим образом. Элементы f_i^i, f_{i+1}^i $(i = 1, ..., m-1)$, f_1^m, g_l, h_l $(l = 1, ..., m)$, q присоединяются с помощью процедуры одноэлементного расширения между парами сравнимых элементов $[x_i, y_i]$, $[x_{i+1}, y_i]$ $(i = 1, ..., m-1)$, $[x_1, y_m]$, $[0, y_l]$, $[x_l, 1]$ $(l = 1, ..., m)$, $[0, 1]$ решетки R_{2m+7}, соответственно. Поскольку $|Ex| = 4m$, мощность множества всех подмножеств множества Ex равна 2^{4m}. Для каждого фиксированного $k = 0, ..., 4m$ число k-элементных подмножеств множества Ex равно C_{4m}^k. Обозначим через R_{2m+7+k}^j - j-тое расширение решетки R_{2m+7} с помощью k-элементного подмножества множества Ex, $j = 1, ..., C_{4m}^k$. Число всех расширений решетки R_{2m+7} всеми подмножествами множества Ex равно $|\{R_{2m+7+k}^j | j = 1, ..., C_{4m}^k, k = 0, ..., 4m\}| = 2^{4m}$.

Далее для фиксированных k и j построим расширение решетки R_{2m+7+k}^j до решетки порядка $6m+7$. А именно, подрешетку $\tilde{R}_7$ решетки R_{2m+7+k}^j с помощью процедур вида 1 и 1^* расширим $4m-k$ элементами до решетки $\tilde{R}_{7+4m-k}$. Обозначим полученное расширение решетки R_{2m+7+k}^j через $R_{6m+7}^{k,j}$. Число всех таких расширений $R_{6m+7}^{k,j}$

равно 2^{4m}. Отсюда при $n = 6m + 7$ (т.е. $m = \frac{n-7}{6}$) будем иметь $2^{\frac{2}{3}(n-7)}$ n-элементных решеток.

Обозначим через r остаток от деления числа $n - 7$ на 6.

Пусть теперь $r \neq 0$ и $n = 6m + 7 + r$, т. е. $m = \frac{n-7-r}{6}$ $(m \geq 4)$.

Решетки $R^{k,j}_{6m+7+r}$ порядка n для фиксированных m, k и j мы будем строить аналогично решеткам $R^{k,j}_{6m+7}$. А именно,

1. заменим интервал $[x_m, y_m]$ решетки R_{2m+2} решеткой $\tilde{R}_{7+r}$;

2. расширим полученную решетку R_{2m+7+r} k-элементным подмножеством множества Ex, $k = 0, ..., 4m$ до решетки $R^{j}_{2m+7+r+k}$, $j = 1, ..., C^{k}_{4m}$;

3. подрешетку $\tilde{R}_{7+r}$ решетки $R^{j}_{2m+7+r+k}$ с помощью процедур вида 1 и 1* расширим $4m - k$ элементами до решетки $\tilde{R}_{7+r+4m-k}$.

Нетрудно понять, что решетки $R^{k,j}_{6m+7+r}$ порядка n для $k = 0, ..., 4m$, $j = 1, ..., C^{k}_{4m}$, попарно неизоморфны и являются подрешетками решетки общего вида $R_{10m+7+r}$ (см. рис. 4). На рис. 4 через $\tilde{R}_l$ обозначена подрешетка $\tilde{R}_{7+r+4m}$.

Итак, для каждого фиксированного n мы получим $2^{\frac{2}{3}(n-7-r)}$ n - элементных решеток.

2. Доказательство жесткости решеток $R^{k,j}_{6m+7+r}$

Для решеток будем придерживаться системы понятий и обозначений, принятых в книге [7]. В частности, нам потребуются отношение $\sim$, транзитивное замыкание $\approx$ отношения $\sim$. Интервалы, связанные отношением $\approx$, называются проективными. Кроме того, будем использовать определения простой решетки [8] и склеивающего эндоморфизма [5].

Отметим, что если все простые интервалы конечной решетки проективны, то отсюда на основании леммы 1 работы [5] следует, что решетка является простой и поэтому любой её склеивающий эндоморфизм является постоянным.

При доказательстве жесткости решеток будем использовать следующие свойства произвольного автоморфизма φ решетки.

1. $x \prec y$ тогда и только тогда, когда $\varphi x \prec \varphi y$, где $\prec$ — отношение покрываемости [7].

2. Элемент, покрывающий t попарно несравнимых элементов (покрываемый t попарно несравнимыми элементами), отображается в элемент с таким же свойством.

3. Сохраняется длина наибольшей по числу элементов цепи между сравнимыми элементами.

Отметим, что произвольный автоморфизм конечной решетки действует тождественно на её наименьшем и наибольшем элементах 0 и 1.

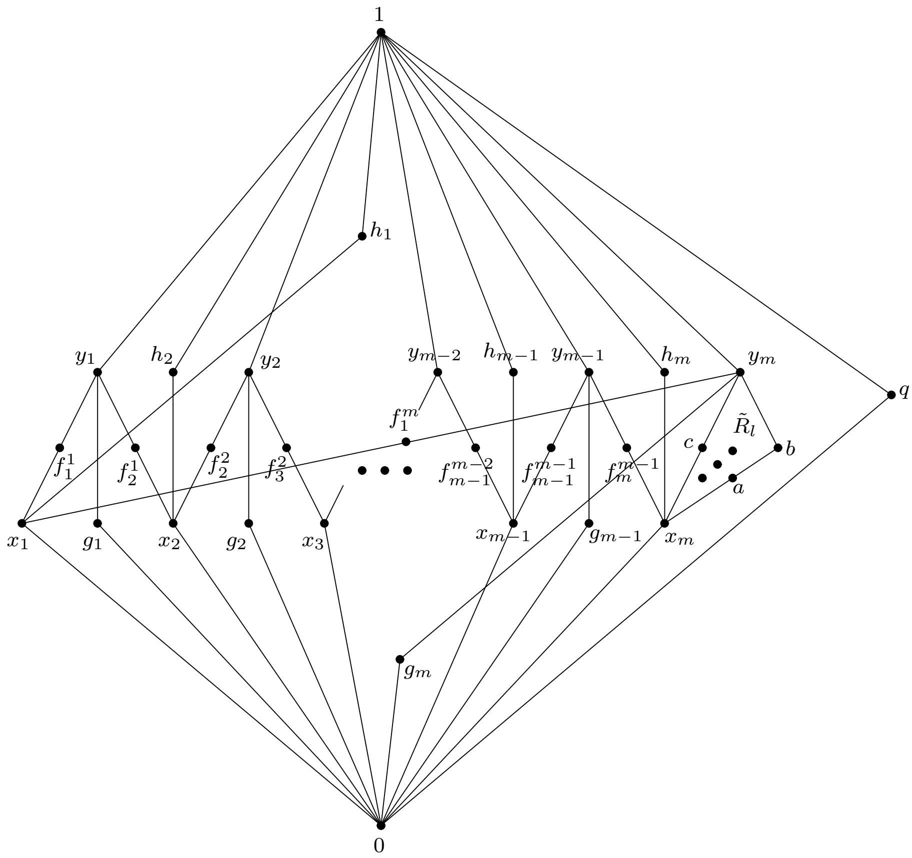

Рис. 4. Решетка $R_{10m+7+r}$.

Далее нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть p – натуральное число, $p \geq 1$. Решетки $\tilde{R}_{5+2p}$ и $\tilde{R}_{5+2p+1}$ являются простыми жесткими решетками.*

Доказательство. Покажем сначала, что решетки $\tilde{R}_{5+2p}$ и $\tilde{R}_{5+2p+1}$ являются простыми. Из

$$[0,a] \sim [z_i^*, z_i],\ [0,a] \sim [c,1],\ [c,1] \sim [0,z_i^*] (i = 1, ..., p),\ [0,z_i^*] \sim [z_{i+1}, z_i]$$
$$(i = 1, ..., p-1),\ [0, z_p^*] \sim [b,1] \sim [0,c] \sim [z_1, 1] \sim [a,b] \tag{2.1}$$

и $[0, z_p^*] \sim [a, z_p]$ в решетке $\tilde{R}_{5+2p}$ следует, что все простые интервалы решетки $\tilde{R}_{5+2p}$ проективны. Из (2.1) и $[z_{p+1}, z_p] \sim [0, z_p^*] \sim [b, 1] \sim [a, z_{p+1}]$ в решетке $\tilde{R}_{5+2p+1}$ следует, что все ее простые интервалы проективны.

Докажем теперь, что решетки $\tilde{R}_{5+2p}$ и $\tilde{R}_{5+2p+1}$ не имеют автоморфизмов, отличных от тождественного.

Рассмотрим произвольный автоморфизм φ решетки $\tilde{R}_{5+2p}$. Заметим, что атом a покрывается двумя элементами, атомы c, $z_1^*, \dots, z_p^*$ имеют по одному покрывающему элементу. Длины наибольших по числу элементов цепей между c, $z_1^*, \dots, z_p^*$ и 1 равны $1, 2, \dots, p+1$, соответственно. Отсюда в силу свойств 2 и 3, автоморфизм φ действует тождественно на всех атомах решетки. Поскольку коатомы b и z_1 покрывают различное число элементов, в силу свойства 2 автоморфизма $\varphi(b) = b$ и $\varphi(z_1) = z_1$. Из $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$ на основании свойства 1 следует, что автоморфизм φ действует тождественно на элементах цепи $a \prec z_p \prec z_{p-1} \prec \dots \prec z_1$ в решетке $\tilde{R}_{5+2p}$. Следовательно, φ - тождественный автоморфизм на $\tilde{R}_{5+2p}$. Те же рассуждения справедливы для решетки $\tilde{R}_{5+2p+1}$ с одним уточнением, что в решетке $\tilde{R}_{5+2p+1}$ рассматриваем цепь $a \prec z_{p+1} \prec z_p \prec z_{p-1} \prec \dots \prec z_1$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $m = 4, 5, \dots$, $k = 0, \dots, 4m$, $j = 1, \dots, C_{4m}^k$, $n = 6m + 7 + r$. *Решетки* $R_{6m+7+r}^{k,j}$ *являются простыми жесткими решетками.*

Доказательство. Покажем, что для фиксированных k и j все простые интервалы решетки $R_{6m+7+r}^{k,j}$ проективны.

Обозначим через $[0, X] = \{[0, x_1], [0, x_2], \dots, [0, x_m]\}$, $[Y, 1] = \{[y_1, 1], [y_2, 1], \dots, [y_m, 1]\}$, $[0, X_{i,l}] = [0, X] \setminus \{[0, x_i], [0, x_l]\}$, $[Y_{i,l}, 1] = [Y, 1] \setminus \{[0, y_i], [0, y_l]\}$, $i \neq l$, $i, l = 1, \dots, m$.

Для $m = 4$ из $[y_1, 1] \sim [0, x_3] \sim [y_4, 1] \sim [0, x_2] \sim [y_3, 1] \sim [0, x_1] \sim [y_2, 1] \sim [0, x_4]$ следует, что все интервалы множеств $[0, X]$, $[Y, 1]$ проективны.

Пусть $m \geq 5$. Тогда интервал $[y_1, 1]$ находится в отношении $\sim$ с каждым интервалом из множества $[0, X_{1,2}]$ (кратко $[y_1, 1] \sim [0, X_{1,2}]$). Аналогично, $[0, x_3] \sim [Y_{2,3}, 1]$, $[y_4, 1] \sim [0, X_{4,5}]$, $[0, x_5] \sim [Y_{4,5}, 1]$. Поскольку $[0, X_{1,2}] \cup [0, X_{4,5}] = [0, X]$, $[Y_{2,3}, 1] \cup [Y_{4,5}, 1] = [Y, 1]$, все интервалы множеств $[0, X]$, $[Y, 1]$ проективны.

Покажем, что каждый простой интервал решетки $R_{6m+7+r}^{k,j}$ проективен некоторому интервалу множества $[0, X] \cup [Y, 1]$.

1) Поскольку на основании леммы 1 подрешетка $\tilde{R}_{7+r+4m-k}$ рассматриваемой решетки является простой, все ее простые интервалы проективны интервалу $[c, y_m]$. Тогда из $[c, y_m] \sim [0, x_1]$ следует их проективность интервалу $[0, x_1] \in [0, X]$.

2) Обозначим через $[X, Y] = \{[x_i, y_i] | i = 1, \dots, m]\} \cup \{[x_i, y_{i-1}] | i = 2, \dots, m]\} \cup [x_1, y_m]$ - множество всех простых интервалов короны. Для

$m \geq 4$ имеем $[x_1, y_m] \sim [y_1, 1] \sim [x_2, y_2]$, $[x_i, y_{i-1}] \sim [y_i, 1] \sim [x_{i+1}, y_{i+1}]$ $(i = 2, ..., m-1)$, $[x_m, y_{m-1}] \sim [y_m, 1] \sim [x_1, y_1]$. Следовательно, каждый интервал короны при $m \geq 4$ проективен некоторому интервалу множества $[Y, 1]$.

3) Рассмотрим случай, когда решетка $R^{k,j}_{6m+7+r}$ содержит некоторые элементы множества $G \cup H$. Решетки $G_l = \{0, x_l, x_{l+1}, g_l, y_l\}$ $(l = 1, ..., m-1)$ содержат интервалы $[0, x_l]$, $[0, x_{l+1}] \in [0, X]$, решетка $G_m = \{0, x_1, x_m, g_m, y_m\}$ содержит интервалы $[0, x_1]$, $[0, x_m] \in [0, X]$. Обозначим через $[0, G] = \{[0, g_l] | l = 1, \ldots, m\}$, $[G, Y] = \{[g_l, y_l] | l = 1, \ldots, m\}$. Поскольку решетка G_l $(l = 1, ..., m)$ является бриллиантом, следовательно, простой решеткой, все ее простые интервалы, в том числе и принадлежащие ей интервалы из множества $[0, G] \cup [G, Y]$, проективны содержащимся в ней интервалам множества $[0, X]$.

Обозначим через $[X, H] = \{[x_l, h_l] | l = 1, \ldots, m\}$, $[H, 1] = \{[h_l, 1] | l = 1, \ldots, m\}$. Аналогичные рассуждения справедливы для решеток $H_1 = \{x_1, y_1, y_m, h_1, 1\}$, $H_l = \{x_l, y_{l-1}, y_l, h_l, 1\}$ $(l = 2, ..., m)$, принадлежащих им интервалов из множества $[X, H] \cup [H, 1]$, и интервалов множества $[Y, 1]$.

4) Рассмотрим теперь случай, когда решетка $R^{k,j}_{6m+7+r}$ содержит некоторые элементы множества F.

Обозначим через $[X, F] = \{[x_i, f_i^i], [x_{i+1}, f_{i+1}^i] | i = 1, \ldots, m-1\} \cup [x_1, f_1^m]$. Из

$$[x_1, f_1^1] \sim [y_m, 1],\ [x_1, f_1^m] \sim [y_1, 1],\ [x_i, f_i^i] \sim [y_{i-1}, 1] (i = 2, ..., m-1),$$
$$[x_i, f_i^{i-1}] \sim [y_i, 1]\ (i = 2, ..., m),$$

следует, что каждый интервал множества $[X, F]$ проективен некоторому интервалу множества $[Y, 1]$.

Обозначим через $[F, Y] = \{[f_i^i, y_i], [f_{i+1}^i, y_i] | i = 1, ..., m-1\} \cup [f_1^m, y_m]$. Из

$$[f_i^i, y_i] \sim [0, x_{i+1}],\ [f_{i+1}^i, y_i] \sim [0, x_i]\ (i = 1, ..., m-1), [f_1^m, y_m] \sim [0, x_m]$$

следует, что каждый интервал множества $[F, Y]$ проективен некоторому интервалу множества $[0, X]$.

5) Если решетка $R^{k,j}_{6m+7+r}$ содержит элемент q, то $[0, q] \sim [y_1, 1] \in [Y, 1]$ и $[q, 1] \sim [0, x_1] \in [0, X]$.

Из 2)-5) следует, что если решетка содержит в качестве простых интервалов некоторые интервалы множеств $[X, Y]$, $[0, G]$, $[G, Y]$, $[X, H]$, $[H, 1]$, $[X, F]$, $[F, Y]$, $\{[0, q], [q, 1]\}$, то существуют проективные им интервалы множества $[0, X] \cup [Y, 1]$. Поскольку справедливо 1)-5) и интервалы множества $[0, X] \cup [Y, 1]$ проективны, решетка $R^{k,j}_{6m+7+r}$ является простой.

Докажем теперь, что решетка $R^{k,j}_{6m+7+r}$ не имеет автоморфизмов, отличных от тождественного. Рассмотрим произвольный автоморфизм φ

решетки. Заметим, что среди всех элементов короны, являющихся атомами решетки, элемент короны x_m имеет наибольшее число покрывающих элементов, и среди всех элементов короны, являющихся коатомами решетки, элемент короны y_m покрывает наибольшее число элементов. В силу свойства 2 автоморфизма $\varphi(x_m) = x_m$ и $\varphi(y_m) = y_m$. Поскольку x_m, y_m являются наименьшим и наибольшим элементами подрешетки $\tilde{R}_{7+r+4m-k}$ рассматриваемой решетки и справедлива лемма 1, автоморфизм φ действует тождественно на элементах подрешетки. Тогда в силу свойств 1 и 2 автоморфизм φ действует тождественно на элементах короны, следовательно, и на остальных элементах решетки. Итак, φ — тождественный автоморфизм на $R^{k,j}_{6m+7+r}$.

Таким образом, утверждение леммы справедливо для решетки $R^{k,j}_{6m+7+r}$ при фиксированных k и j. □

Следствие 1. *Для любого натурального числа* $n \geq 31$ *существует* $2^{\frac{2}{3}(n-7-r)}$ *простых жестких* n*-элементных решеток.*

Из данного следствия вытекает справедливость нашей теоремы.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В. А. Баранскому за постоянное внимание к работе, ценные советы и замечания.

Список литературы

1. Харари Ф. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. – М. : Мир, 1977. – 324 с.
2. Трофимов В. И. Функции роста алгебраических систем : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук / В. И. Трофимов. – Новосибирск : НГУ, 1982. – 10 с.
3. Klotz W. Endliche Verbande / W. Klotz , L. Lucht // J. Reine Angew. Math. – 1971. – Vol. 247. – P. 58–68
4. Перминов Е. А. О жестких решетках / Е. А. Перминов // Урал. гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 27.01.84. – N 847–84. – 22 с.
5. Перминова О. Е. О конечных критических решетках / О. Е. Перминова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 2. – С. 185–193.
6. Важенин Ю. М. О жестких решетках и графах / Ю. М. Важенин, Е. А. Перминов // Исслед. по соврем. алгебре : межвуз. сб. ст. – Свердловск, 1979. – Т. 2, № 3. – С. 3–21.
7. Гретцер Г. Общая теория решеток / Г. Гретцер. – М. : Мир, 1982. – 456 с.
8. Crawley P. Algebraic theory of lattices / P. Crawley, R. P. Dilworth. – New Jersey : Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1973. – 193 p.

O. E. Perminova

On growth function of finite rigid lattices

Abstract. Rigid lattices, i.e., lattices, any its endomorphism is a constant endomorphism (mapping all elements to a some single element) or the identity endomorphism, are investigated. It is proved that the growth function of finite rigid lattices is exponential.
Keywords: lattice, endomorphism, rigid lattice, growth function.

Перминова Ольга Евгеньевна, аспирант, Уральский государственный университет им. А. М. Горького, 620000, Екатеринбург, пр. Ленина, 51 тел.: (343)3507579 (perminova_oe@mail.ru)

Perminova Olga, Ural State University, 51, Lenin Avenue, Ekaterinburg, 620000 Phone: (343)3507579 (perminova_oe@mail.ru)