Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 2. С. 45—59

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.854.2

Релаксации Лагранжа для нелинейной задачи о p-медиане

И. Л. Васильев
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

А. В. Ушаков
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. В статье рассматривается модификация хорошо известной задачи о p-медиане, в которой количество медиан является переменной величиной. Рассматривается постановка данной задачи, а также реализуется эвристический метод нахождения нижних оценок ее оптимального значения.

Ключевые слова: задача о p-медиане; релаксация Лагранжа; нижние оценки; субградиентный алгоритм.

1. Введение

Пусть задано множество возможных пунктов размещения предприятий $U = \{1, \ldots, m\}$, множество клиентов $V = \{1, \ldots, n\}$, величины d_{uv}, задающие транспортные затраты (расстояния) на обслуживание v-го клиента из пункта u. Задача о p-медиане заключается в выборе p пунктов размещения предприятий из множества U, так, чтобы суммарные затраты на обслуживание всех клиентов были минимальны, т.е.

$$\min_{S\subseteq U}\Big\{\sum_{v\in V}\min_{u\in S} d_{uv} : \ |S| = p\Big\}.$$

Часто на практике полагают, что множество возможных пунктов размещения предприятий и множество клиентов совпадают, т.е. предприятия размещаются среди клиентов. Тогда задача может быть представлена на графе $G(V, A)$ с множеством вершин V (где $V = U$) и множеством дуг $A = \{uv : u \in V, v \in V, u \neq v\}$. Каждой дуге $uv \in A$ приписывается вес d_{uv}, задающий расстояние между вершинами $u \in V$ и $v \in V$. Задача о p-медиане в этом случае состоит в отыскании p вершин, называемых медианами, таких, что сумма весов входящих дуг к немедианным вершинам от ближайшей медианы была минимальна. Обозначим через $\delta^-(v) = \{u \in V|\ uv \in A\}$ множество вершин, соединенных с v выходящей из них дугой, а через $\delta^+(u) = \{v \in V|\ uv \in A\}$ множество вершин соединенных с u выходящей из u дугой. Введем бинарные переменные $y_u (u \in V)$ и $x_{uv} (uv \in A)$, соответствующие вершинам и дугам графа $G(V, A)$. Переменная y_u равна 1, если вершина u является медианой, 0

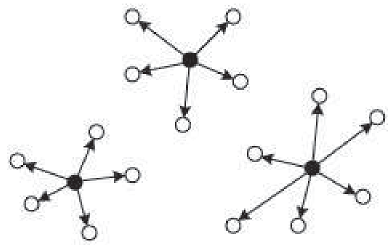

Рис. 1. Решение задачи о p-медиане

в противном случае. Переменная x_{uv} равна 1, если вершина u — это медиана, и v присоединена к u выходящей из u дугой, 0 в противном случае. Используя введенные переменные и обозначения, задача о p-медиане может быть сформулирована как задача целочисленного программирования:

$$\min_{(x,y)} \sum_{uv \in A} d_{uv} x_{uv} \tag{1.1}$$

$$\sum_{u \in \delta^-(v)} x_{uv} + y_v = 1 \qquad v \in V, \tag{1.2}$$

$$x_{uv} \le y_u \qquad u \in V, v \in \delta^+(u), \tag{1.3}$$

$$\sum_{u \in V} y_u = p \tag{1.4}$$

$$y_u \in \{0, 1\} \qquad u \in V, \tag{1.5}$$

$$x_{uv} \in \{0, 1\} \qquad uv \in A. \tag{1.6}$$

Целевая функция (1.1) минимизирует сумму весов дуг $uv \in A$. Ограничения (1.2) гарантируют, что каждая вершина v является либо медианой, либо имеет одну входящую дугу из медианной вершины. Неравенства (1.3) исключают существование выходящих дуг из немедианных вершин. Количество медиан определяется уравнением (1.4). Решение задачи состоит из p «звезд», в центре которых находятся медианы (см. рис. 1).

Задача о p-медиане является известной NP-трудной задачей, впервые сформулированной в [6]. Обширный литературный обзор известных подходов к решению этой задачи можно найти в [8], а также в [1, 9].

Отдельно отметим последние работы, касающиеся решения задачи о p-медиане большой размерности: эвристики VNS (Variable Neighborhood Search) [5], GRASP [9], метод ветвей, отсечений и оценок [1].

Одной из областей применения задачи о p-медиане является моделирование задач кластерного анализа. Суть задачи кластерного анализа заключается в разделении заданного множества объектов на подмножества, называемые кластерами, таким образом, чтобы в каждый кластер попали максимально схожие между собой объекты, а объекты разных кластеров значительно отличались. В случае задачи о p-медиане множество объектов будем представлять как множество вершин графа, а степень схожести объектов между собой как расстояние между соответствующими вершинами. Задача о p-медиане определяет решение задачи кластерного анализа известное как *minimum sum-of-star clustering* [4]. Обращаясь еще раз к рисунку 1, отметим, что в терминах задачи кластерного анализа каждая «звезда» представляет собой кластер.

Рассмотренная постановка является классической для задачи о p-медиане. Представим теперь, что необходимо минимизировать не только суммарные затраты на обслуживание всех клиентов, но и количество открытых для этого предприятий, или — в терминах задачи кластерного анализа — необходимо минимизировать количество кластеров на которые разделяется заданное множество. В этом случае рассмотрим следующую модификацию задачи, в которой, в отличие от классической постановки, количество медиан это переменная величина и в целевой функции присутствует дополнительное слагаемое, задающее штраф на количество медиан.

$$\min_{(x,y,p)} \sum_{uv\in A} d_{uv}x_{uv} + \phi(p) \tag{1.7}$$

$$\sum_{u\in\delta^-(v)} x_{uv} + y_v = 1 \qquad v\in V, \tag{1.8}$$

$$x_{uv} \le y_u \qquad u\in V, v\in\delta^+(u), \tag{1.9}$$

$$\sum_{u\in V} y_u = p, \tag{1.10}$$

$$y_u \in \{0,1\} \qquad u\in V, \tag{1.11}$$

$$x_{uv} \in \{0,1\} \qquad uv\in A, \tag{1.12}$$

$$p\in P \triangleq \{p\in Z:\ 1\le p\le n\}. \tag{1.13}$$

Множество P выбирается из логических соображений о том, что медиан должно быть не меньше одной и не больше, чем общее количество вершин, иначе множество решений будет пустым. Если $\phi(\cdot)$ линейная функция, то мы получаем известную задачу размещения, поэтому нас интересует случай нелинейной функции $\phi(\cdot)$. Ограничения в данной постановке имеют тот же смысл что и в классической задаче о p-медиане. Эта постановка задачи была рассмотрена в [7], где к тому же были предложены некоторые подходы к решению задачи, а также приведены результаты численных экспериментов на модельных примерах малой размерности.

В данной работе исследуется задача поиска нижних оценок для оптимального значения нелинейной задачи о p-медиане с использованием релаксации Лагранжа. Строятся релаксации Лагранжа двух видов, доказывается ряд предложений, касающихся улучшения эффективности подсчета значения двойственной функции Лагранжа. Для нахождения наилучших нижних оценок осуществляется макимизация двойственной функции Лагранжа при помощи субградиентного метода. Проводится реализация полученного алгоритма и его тестирование на примерах различной размерности.

Статья организована следующим образом. В разделах 2,3 описывается техника построения релаксаций Лагранжа для нелиненой задачи о p-медиане. Раздел 4 посвящен описанию субградиентного алгоритма и особенностям его реализации для исследуемой задачи. В заключении раздела представлены результаты вычислительных экспериментов.

2. Первая релаксация Лагранжа

Методы на основе релаксации Лагранжа широко применяются к решению задачи о p-медиане (см., например, [2]). В данном разделе исследуется релаксация Лагранжа для нелинейной задачи.

Построим два вида релаксации, получающиеся за счет ослабления ограничений (1.8) и (1.8),(1.10). Вначале рассмотрим первый тип, в котором ослабляются оба ограничения. Для этого добавим (1.8) и (1.10) в целевую функцию (1.7) с множителями Лагранжа (λ, π), где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^n$ соответствуют ограничениям (1.8), а $\pi \in \mathbb{R}$ — ограничению (1.10):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\lambda, \pi) = \min_{(x,y,p)} \Big\{ \sum_{uv \in A} d_{uv} x_{uv} + \sum_{v \in V} \lambda_v \Big(1 - y_v - \sum_{u \in \delta^-(v)} x_{uv}\Big) + \\ + \pi(p - \sum_{u \in V} y_u) + \phi(p) : x_{uv} \le y_u, \forall u \in V, v \in \delta^+(u) \Big\}. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

Для краткости записи здесь и далее будем считать переменные x_{uv}, y_u бинарными, а переменную p — положительной целой величиной из множества P и будем полагать, что функция $\phi(\cdot)$ определена и принимает конечные значения на этом множестве. В дальнейшем также будем пользоваться определением срезки, обозначенной $a^- \triangleq \min\{0, a\}$.

Теорема 1.

$$\mathcal{L}_1(\lambda,\pi)=\sum_{u\in V}\Big[\sum_{v\in\delta^+(u)}(d_{uv}-\lambda_v)^- -\lambda_u-\pi\Big]^- +\min_{p\in P}\Big\{\pi p+\phi(p)\Big\}+ \\ +\sum_{v\in V}\lambda_v. \tag{2.2}$$

Доказательство. Перепишем (2.1) следующим образом:

$$\mathcal{L}_1(\lambda,\pi)=\min_{(y,p)}\Big\{\min_x\Big\{\sum_{u\in V}\sum_{v\in\delta^+(u)}(d_{uv}-\lambda_v)x_{uv}:\ x_{uv}\le y_u\Big\}- \\ -\sum_{u\in V}\lambda_u y_u+\pi(p-\sum_{u\in V}y_u)+\phi(p)\Big\}+\sum_{v\in V}\lambda_v. \tag{2.3}$$

Зафиксируем переменную y и предположим, что переменная x_{uv} является непрерывной величиной, принимающей значения на отрезке $[0,1]$. Рассмотрим внутреннюю задачу минимизации по x отдельно:

$$\min_x\Big\{\sum_{u\in V}\sum_{v\in\delta^+(u)}(d_{uv}-\lambda_v)x_{uv}:\ 0\le x_{uv}\le y_u\Big\}.$$

Как нетрудно видеть, в данной задаче необходимо найти минимум линейной при каждом фиксированном y_v функции при параллелепипедных ограничениях. Решение данной задачи выглядит следующим образом:

$$x_{uv}(\lambda)=\begin{cases}y_u, & d_{uv}-\lambda_v<0\\ 0, & d_{uv}-\lambda_v\ge 0.\end{cases}$$

Переменные $x_{uv}(\lambda)$ принимают только целочисленные значения, поэтому они являются решением и в задаче (2.1) с условием целочисленности на x. Теперь подставим полученное решение $x_{uv}(\lambda)$ в (2.3). Так как нас интересуют только значения $d_{uv}-\lambda_v<0$, уместно воспользоваться определением срезки. В связи с этим получаем следующее:

$$\mathcal{L}_1(\lambda,\pi)= \\ =\min_{(y,p)}\Big\{\sum_{u\in V}\sum_{v\in\delta^+(u)}(d_{uv}-\lambda_v)^- y_u-\sum_{u\in V}\lambda_u y_u+\pi(p-\sum_{u\in V}y_u)+\phi(p)\Big\}+ \\ +\sum_{v\in V}\lambda_u=\min_y\Big\{\sum_{u\in V}\Big[\sum_{v\in\delta^+(u)}(d_{uv}-\lambda_v)^- -\lambda_u-\pi\Big]y_u\Big\}+ \\ +\min_p\Big\{\pi p+\phi(p)\Big\}+\sum_{u\in V}\lambda_u.$$

Рассмотрим отдельно задачу минимизации по y, предполагая, что переменные y_u являются непрерывными величинами на отрезке $[0,1]$:

$$\min_y \Big\{ \sum_{u\in V} \Big[\sum_{v\in\delta^+(u)} (d_{uv}-\lambda_v)^- - \lambda_u - \pi \Big] y_u : \ 0 \le y_u \le 1 \Big\}$$

В данной задаче необходимо минимизировать линейную функцию при параллелепипедных ограничениях. Решение задачи может быть записано как

$$y_u(\lambda) = \begin{cases} 1, & (d_{uv}-\lambda_v)^- - \lambda_u - \pi < 0 \\ 0, & (d_{uv}-\lambda_v)^- - \lambda_u - \pi \ge 0. \end{cases}$$

Аналогично, подставим значения $y_u(\lambda)$ в нашу формулу для вычисления значения функции Лагранжа $\mathcal{L}_1(\lambda,\pi)$, используя определение срезки, получим необходимое (2.2) □

Из полученной формулы можно сделать вывод, что сложность вычисления значения функции Лагранжа $\mathcal{L}_1(\lambda,\pi)$ составляет $O(n^2)$, если сложность вычисления функции $\phi(\cdot)$ является константой.

3. Вторая релаксация Лагранжа

Теперь построим релаксацию исходной задачи (1.7) – (1.13) ослабляя только ограничения (1.8):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\lambda) = \min_{(x,y,p)} \Big\{ \sum_{uv\in A} d_{uv}x_{uv} + \sum_{v\in V} \lambda_v \Big(1 - y_v - \sum_{u\in\delta^-(v)} x_{uv}\Big) + \phi(p) : \\ x_{uv} \le y_u, \forall u,v\in V; \ \sum_{v\in V} y_v = p \Big\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Теорема 2.

$$\mathcal{L}_2(\lambda) = \min_p \Big\{ \sum_{k=1}^{p} \rho_{u_k}(\lambda) + \phi(p) \Big\} + \sum_{v\in V} \lambda_v, \tag{3.2}$$

где $\rho_u(\lambda) = \sum_{v\in\delta^+(u)} (d_{uv}-\lambda_v)^- - \lambda_u$, *и* $\rho_{u_1}(\lambda) \le \rho_{u_2}(\lambda) \le \cdots \le \rho_{u_n}(\lambda)$.

Доказательство. Перепишем (3.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(\lambda) = \min_{(y,p)} \Big\{ \min_x \Big\{ \sum_{u\in V} \sum_{v\in\delta^+(u)} (d_{uv}-\lambda_v)x_{uv} : \ x_{uv} \le y_u \Big\} - \\ - \sum_{u\in V} \lambda_u y_u + \phi(p) : \ \sum_{u\in V} y_u = p \Big\} + \sum_{v\in V} \lambda_v. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Далее проведем рассуждения аналогичные рассуждениям в теореме 1, т.е. выпишем следующую задачу на минимум:

$$\min_x \Big\{ \sum_{u\in V} \sum_{v\in\delta^+(u)} (d_{uv} - \lambda_v) x_{uv} :\ 0 \le x_{uv} \le y_u \Big\}.$$

Получим ее решение

$$x_{uv}(\lambda) = \begin{cases} y_u, & d_{uv} - \lambda_v < 0 \\ 0, & d_{uv} - \lambda_v \ge 0. \end{cases}$$

Подставим в (3.3), получим:

$$\mathcal{L}_2(\lambda) = \min_{(y,p)} \Big\{ \sum_{u\in V} \Big[\sum_{v\in\delta^+(u)} (d_{uv} - \lambda_v)^- - \lambda_u \Big] y_u + \phi(p) :\ \sum_{u\in V} y_u = p \Big\} + \sum_{v\in V} \lambda_v.$$

Используя определение $\rho_u(\lambda)$, запишем

$$\mathcal{L}_2(\lambda) = \min_p \Big\{ \min_y \Big\{ \sum_{u\in V} \rho_u(\lambda) y_u :\ \sum_{u\in V} y_u = p \Big\} + \phi(p) \Big\} + \sum_{v\in V} \lambda_v.$$

Зафиксируем переменную p и рассмотрим отдельно задачу минимизации по y

$$\min_y \Big\{ \sum_{u\in V} \rho_u(\lambda) y_u :\ \sum_{u\in V} y_u = p \Big\}.$$

В данной задаче необходимо найти минимум линейной функции при одном линейном ограничении. Учитывая тот факт, что вершины $u_1, \dots, u_n$ упорядочены, нетрудно видеть, что решением такой задачи будет вектор $y(\lambda)$, в котором отличными от 0 будут ровно p координат, соответсвующих наименьшим значениям величин $\rho_u(\lambda)$, т.е. мы получаем необходимое (3.2). $\square$

Заметим, что величины $\rho_u(\lambda)$, введенные в формулировке теоремы, часто называют в литературе оценками Лагранжа соответствующими переменным y_u.

Сложность вычисления значения функции Лагранжа $\mathcal{L}_2(\lambda)$, как и в первом случае, составляет $O(n^2)$, поскольку выражение под минимумом по p вычисляется рекурсивно. Действительно, обозначим через $\psi(p,\lambda) \triangleq \sum\limits_{k=1}^{p} \rho_{u_k}(\lambda)$. Тогда

$$\mathcal{L}_2(\lambda) = \min_{p\in P} \{ \psi(p,\lambda) + \phi(p) \} + \sum_{\in V} \lambda_v$$

и минимизируемая функция вычисляется по формулам:

$$\psi(1,\lambda) + \phi(1) = \rho_{u_1}(\lambda) + \phi(1),$$

$$\psi(p,\lambda)+\phi(p)=\psi(p-1,\lambda)+\rho_{u_p}(\lambda)+\phi(p)\ \forall p=\overline{2,n}.$$

Таким образом, величину $\mathcal{L}_2(\lambda)$ можно легко вычислить перебором по p от 1 до n. В зависимости от вида функции $\phi(\cdot)$ процедура перебора может быть упрощена. В случае, если функция $\phi(\cdot)$ строго возрастающая на P, то минимум достигается при $p=1$, если $\rho_{u_1}\geq 0$. В противном же случае необходимо выполнить перебор только на отрицательных оценках Лагранжа, что доказывается в следующем предложении.

Предложение 1. *Пусть $\phi(\cdot)$ строго возрастающая функция на P, тогда,*

1. если $\rho_{u_1}(\lambda)\geq 0$, то

$$\mathcal{L}_2(\lambda)=\rho_{u_1}(\lambda)+\phi(1)+\sum_{v\in V}\lambda_v,$$

2. если $P_0(\lambda)=\{k\in P:\rho_{u_k}(\lambda)<0\}\neq\varnothing$, то

$$\mathcal{L}_2(\lambda)=\min_{p\in P_0}\{\psi(p,\lambda)+\phi(p)\}+\sum_{v\in V}\lambda_v.$$

Доказательство. 1. Если $\rho_{u_1}(\lambda)\geq 0$, то $\psi(p,\lambda)\leq\psi(p+1,\lambda), p\in P$. Учитывая, что функция $\phi(p)$ возрастающая на P получаем необходимое.

2. Если $P_0=P$, то предложение очевидно. Рассмотрим случай $P_0\neq P$. Следовательно $\exists\bar{p}\in P:$

$$\begin{aligned}&\rho_{u_k}(\lambda)<0 &&\forall k=1,\ldots,\bar{p};\\ &\rho_{u_k}(\lambda)\geq 0 &&\forall k=\bar{p}+1,\ldots,n.\end{aligned}$$

Покажем, что

$$\psi(\bar{p},\lambda)+\phi(\bar{p})\leq\psi(p,\lambda)+\phi(p),\forall p\in P\backslash P_0.$$

Запишем

$$\psi(p,\lambda)=\sum_{k=1}^{\bar{p}}\rho_{u_k}(\lambda)+\sum_{k=\bar{p}+1}^{p}\rho_{u_k}(\lambda)=\psi(\bar{p},\lambda)+\sum_{k=\bar{p}+1}^{p}\rho_{u_k}(\lambda)\geq\psi(\bar{p},\lambda).$$

Учитывая, что фунуция $\phi(\cdot)$ возрастающая, получим необходимое. □

В случае, если функция $\phi(\cdot)$ не только строго возрастающая, но и выпуклая, существует единственный локальный минимум функции $\psi(p,\lambda)+\phi(p)$ при $p\in P$, являющийся также глобальным, что доказывается в следующем предложении.

Предложение 2. *Пусть $\phi(\cdot)$ выпуклая, строго возрастающая функция на P, тогда,* *1. если*

$$\psi(1,\lambda)+\phi(1)\le\psi(2,\lambda)+\phi(2), \tag{3.4}$$

то

$$\mathcal{L}_2(\lambda)=\psi(1,\lambda)+\phi(1)+\sum_{v\in V}\lambda_v;$$

2. если $\exists\bar p\in\{2,\dots,n-1\}$:

$$\psi(\bar p-1,\lambda)+\phi(\bar p-1)\ge\psi(\bar p,\lambda)+\phi(\bar p), \tag{3.5}$$

$$\psi(\bar p,\lambda)+\phi(\bar p)\le\psi(\bar p+1,\lambda)+\phi(\bar p+1), \tag{3.6}$$

тогда

$$\mathcal{L}_2(\lambda)=\psi(\bar p,\lambda)+\phi(\bar p)+\sum_{v\in V}\lambda_v. \tag{3.7}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим приращения функций

$$\Delta\phi(p)=\phi(p+1)-\phi(p),$$

$$\Delta_p\psi(p,\lambda)=\psi(p+1,\lambda)-\psi(p,\lambda).$$

Тогда из формулы (3.4) следует, что

$$\psi(2,\lambda)-\psi(1,\lambda)+\phi(2)-\phi(1)\ge 0,$$

то есть

$$\Delta_p\psi(1,\lambda)+\Delta\phi(1)\ge 0.$$

По определению функции $\psi(\cdot)$ и в силу выпуклости $\phi(\cdot)$ получаем

$$\Delta_p\psi(2,\lambda)\ge\Delta_p\psi(1,\lambda),$$

$$\Delta\phi(2)\ge\Delta\phi(1).$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\Delta_p\psi(2,\lambda)+\Delta\phi(2)\ge\Delta_p\psi(1,\lambda)+\Delta\phi(1)\ge 0.$$

Распишем левую часть неравенств

$$\psi(3,\lambda)-\psi(2,\lambda)+\phi(3)-\phi(2)\ge 0,$$

$$\psi(3,\lambda)+\phi(3)\ge\psi(2,\lambda)+\phi(2).$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим

$$\psi(1,\lambda)+\phi(1)\le\psi(2,\lambda)+\phi(2)\le\ldots\le\psi(n,\lambda)+\phi(n).$$

2. Аналогично первой части доказательства можно показать, что

$$\psi(\bar p+1,\lambda)+\phi(\bar p+1)\le\psi(\bar p+2,\lambda)+\phi(\bar p+2)\le\ldots\le\psi(n,\lambda)+\phi(n). \tag{3.8}$$

Далее рассмотрим неравенства (3.5)

$$\psi(\bar{p},\lambda) - \psi(\bar{p}-1,\lambda) + \phi(\bar{p}) - \phi(\bar{p}-1) \leq 0,$$

то есть

$$\Delta_p\psi(\bar{p}-1,\lambda) + \Delta\phi(\bar{p}-1) \leq 0.$$

По определению функций $\psi(\cdot)$ и $\phi(\cdot)$

$$\Delta_p\psi(\bar{p}-2,\lambda) \leq \Delta_p\psi(\bar{p}-1,\lambda),$$

$$\Delta\phi(\bar{p}-2) \leq \Delta\phi(\bar{p}-1).$$

Тогда

$$\Delta\psi(\bar{p}-2,\lambda) + \Delta\phi(\bar{p}-2) \leq \Delta\psi(\bar{p}-1,\lambda) + \Delta\phi(\bar{p}-1) \leq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\psi(\bar{p}-1,\lambda) - \psi(\bar{p}-2,\lambda) + \phi(\bar{p}-1) - \phi(\bar{p}-2) \leq 0,$$

$$\psi(\bar{p}-1,\lambda) + \phi(\bar{p}-1) \leq \psi(\bar{p}-2,\lambda) + \phi(\bar{p}-2).$$

Проведя аналогичные рассуждения, можно получить

$$\psi(\bar{p},\lambda) + \phi(\bar{p}) \leq \psi(\bar{p}-1,\lambda) + \phi(\bar{p}-1) \leq \ldots \leq \psi(1,\lambda) + \phi(1). \tag{3.9}$$

Из (3.8),(3.9) можно сделать вывод, что точка $\bar{p} \in P$ является точкой минимума функции $\psi(p,\lambda) + \phi(p)$ при $p \in P$, откуда следует справедливость (3.7). □

4. Численный эксперимент

Как известно, решение релаксированной задачи дает оценку для оптимального решения в исходной задаче. Дальнейшие рассуждения, для краткости изложения, будем проводить для функции Лагранжа, получающейся за счет ослабления только одного ограничени (1.8). Для нахождения наилучшей нижней оценки для оптимального значения в нелинейной задаче о p-медиане необходимо найти $\max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^n}\{\mathcal{L}_2(\lambda)\}$. В нашем случае функция Лагранжа негладкая, поэтому для максимизации $\mathcal{L}_2(\lambda)$ воспользуемся субградиентным алгоритмом, который находит максимум посредством итерационной формулы:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha_k g(\lambda^k),$$

где $g(\lambda^k)$ — субградиент, подсчитанный на k-ой итерации по следующей формуле:

$$g_v(\lambda^k) = 1 - \sum_{u \in \delta^-(v)} x_{uv}(\lambda^k) - y_v(\lambda^k) \qquad \forall v \in V,$$

в которой $x_{uv}(\lambda^k)$, $y_v(\lambda^k)$ — решения подзадач, полученные в ходе доказательства теорем 1, 2. Шаг α_k подсчитывается по следующему эвристическому правилу, которое не гарантирует сходимости метода, но хорошо зарекомендовало себя на практике (см. [1, 2, 3])

$$\alpha_k = \frac{\beta_k(1.05 \cdot BUB - \mathcal{L}_2(\lambda^k))}{\|g(\lambda^k)\|_2^2},$$

где BUB – верхняя оценка, $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма, $\mathcal{L}_2(\lambda^k)$ — значение функции Лагранжа на наборе множителей λ^k, β_k – параметр, в начале полагаемый равным 2 и уменьшаемый в два раза, если на протяжении 30-ти итераций не присходит улучшения нижней оценки [3].

В качестве критерия останова использовались следующие условия: малость разницы между верхней и нижней оценками, получаемыми на каждой итерации, т.е. малость величины $BUB - \mathcal{L}_2(\lambda^k)$, малость квадрата нормы субградиента $\|g(\lambda^k)\|_2^2$, а также малость параметра β_k.

Не вдаваясь в детали реализации субградиентного алгоритма, отметим только, что она схожа с реализацией для классической задачи о p-медиане (см. [1, 2]).

При проведении вычислительного эксперимента использовались два набора тестовых примеров размерности от 10000 до 20000 вершин, взятых из статьи [3]. Численный эксперимент проводился на компьютере с процессором Intel Core 2 Duo CPU 2.20GHz и 3Gb оперативной памяти.

Отметим, что данные наборы примеров сгенерированы для решения задачи о p-медиане с фиксированным числом медиан p_0, это же касается верхних и нижних оценок полученных в статье [3]. Поэтому при тестировании разработанного алгоритма использовалась верхняя оценка, вычисленная по формуле $BUB = UB + \phi(p_0)$, где UB — верхняя оценка подсчитанная в статье [3] для рассматриваемых наборов примеров с условием фиксированого числа медиан. Очевидно, что в некоторых случаях такая оценка может быть достаточно грубой. Заметим, что, как было показано в [3], второй набор примеров является более сложным для решения в случае фиксированного количества медиан p_0.

Для тестирования алгоритма нами использовались два вида функции $\phi(\cdot)$: $\phi(p) = p^2$ и $\phi(p) = 5p^2$.

Результаты работы метода представлены в таблицах 1 и 2 для $\phi(p) = p^2$ и $\phi(p) = 5p^2$ соответственно. В таблицах использовались следующие обозначения:

n — количество вершин;

p_0 — число медиан для которых найдены верхние оценки в [3];

it — количество итераций алгоритма для каждой из релаксаций;

$Err(\%)$ — относительная погрешность (в процентах), которую часто называют разрывом двойственности, вычисленная по формуле $Err = (BUB - \mathcal{L}_*)/BUB \cdot 100\%$, где $\mathcal{L}_*$ нижняя оценка, полученная в результате работы субградиентного алгоритма;

$Time$ — время работы алгоритма в секундах.

Таблица 1.

Результаты при $\phi(p) = p^2$

		it		Err(%)		Time	
n	p_0	$\mathcal{L}_1^*$	$\mathcal{L}_2^*$	$\mathcal{L}_1^*$	$\mathcal{L}_2^*$	$\mathcal{L}_1^*$	$\mathcal{L}_2^*$
Набор 1							
10000	100	757	697	0.026	0.015	75	77
15000	100	809	731	0.031	0.018	161	157
20000	100	1090	877	0.010	0.009	325	293
9600	64	791	723	0.009	0.007	82	71
12800	64	719	654	0.014	0.007	139	126
16000	64	819	732	0.007	0.010	208	203
19200	64	785	816	0.008	0.006	255	297
10000	25	877	816	5.504	5.449	90	96
12500	25	1124	857	8.276	8.232	156	137
15000	25	1133	948	10.885	10.617	216	199
17500	25	1264	1175	13.016	12.561	295	294
20000	25	1358	1119	15.181	14.537	396	422
Набор 2							
10000	100	915	810	12.161	12.085	85	89
15000	100	1004	735	7.733	7.715	182	177
20000	100	1067	959	3.741	3.653	322	340
9600	64	1007	809	4.652	4.562	86	88
12800	64	1656	879	1.536	1.348	210	156
16000	64	1699	973	0.468	0.255	308	250
19200	64	1582	996	1.066	0.119	414	325
10000	25	1227	986	6.649	5.092	125	128
12500	25	1478	952	7.784	6.819	209	179
15000	25	1383	985	9.636	8.080	279	249
17500	25	1413	956	14.833	12.439	338	275
20000	25	1463	1076	14.512	11.981	467	395

Как можно видеть из таблиц, время счета с использованием первой релаксации в большинстве случаев превосходит таковое с использованием второй. Так как сложность вычисления $\mathcal{L}_1(\lambda)$ и $\mathcal{L}_2(\lambda)$ составляет $O(n^2)$, то причиной этому служит большее количество итераций, совершаемое субградиентным алгоритмом при максимизации функции $\mathcal{L}_1(\lambda)$. Что касается качества получаемых оценок, то относительная погрешность в случаях, когда задача решалась с использованием второй релаксации, меньше во всех примерах.

Таблица 2.

Результаты при $\phi(p) = 5p^2$

		it		Err(%)		Time	
n	p_0	$\mathcal{L}_1^*$	$\mathcal{L}_2^*$	$\mathcal{L}_1^*$	$\mathcal{L}_2^*$	$\mathcal{L}_1^*$	$\mathcal{L}_2^*$
Набор 1							
10000	100	1286	982	35.880	34.086	122	107
15000	100	1513	1455	19.663	19.007	278	281
20000	100	1974	1201	9.573	9.137	561	415
9600	64	1523	1025	4.961	4.733	144	108
12800	64	2970	1083	0.407	0.300	437	186
16000	64	1538	1083	0.585	0.055	329	271
19200	64	1515	1212	0.252	0.020	446	408
10000	25	1006	801	0.186	0.004	118	117
12500	25	942	848	0.090	0.012	168	181
15000	25	1148	920	0.014	0.007	262	250
17500	25	1370	867	0.046	0.006	387	283
20000	25	2079	1131	2.210	0.007	622	480
Набор 2							
10000	100	1003	819	49.438	48.657	103	107
15000	100	1902	953	36.715	34.972	322	207
20000	100	1629	1135	33.259	31.203	488	420
9600	64	1345	800	34.886	31.999	127	105
12800	64	2672	983	22.727	21.346	400	198
16000	64	2122	1151	22.383	19.681	469	341
19200	64	1253	1155	21.365	16.653	425	453
10000	25	1338	1176	6.220	1.735	175	175
12500	25	6553	1164	4.870	1.157	975	245
15000	25	1337	1349	10.169	1.665	338	381
17500	25	1353	1266	8.016	0.494	437	425
20000	25	1572	1855	7.818	0.237	641	787

Как можно видеть из таблицы 1, относительная погрешность при $\phi(p) = p^2$ не превосходит двух сотых процента для примеров из первого набора с $p_0 = 100$ и $p_0 = 64$ в случае использования второй релаксации, и не превосходит четырех десятых процента в случае использования в алгоритме первой релаксации, что говорит о хорошем качестве полученных оценок.

Для примеров из второго набора при $\phi(p) = p^2$ можно говорить о получении хорошей нижней оценки для задач с 64 медианами, а именно для примеров с 16000 и 19200 вершин. Относительная погрешность в них не превосходит трех десятых процента с использованием второй релаксации и двух процентов с использованием первой. По таблице 2 можно сделать вывод, что при увеличении штрафа ситуация меняется. Можно говорить о хороших нижних оценках для всех примеров с 25 медианами. Относительная погрешность в случае применения первой релаксацией не превосходит двух сотых процента, а в случае применения второй — 1.75%. При этом можно заметить, что, используя первую релаксацию, удалось улучшить оценки не только для примеров с 25 медианами, но и с 64 (см. табл. 2). Но их точность значительно уступает результатам, полученым с помощью релаксации $\mathcal{L}_2(\lambda)$.

На основании проведенного эксперимента можно сделать вывод, что при выборе различных функций штрафа $\phi(\cdot)$ можно получить приемлемые нижние оценки с малым разрывом двойственности для всех примеров из первого набора. Что касается примеров второго набора, то здесь присутствуют задачи разрыв двойственности для которых очень велик даже при варировании штрафа. Можно предположить, что выбранная функция штрафа не соответствует структуре примеров, поэтому возникает вопрос о поиске верхних оценок в данных задачах, что может быть направлением дальнейших исследований.

Список литературы

1. Avella P. Computational study of large-scale p-median problems / P. Avella, A. Sassano, I. Vasil'ev // Mathematical Programming. – 2007. – Vol. 109, N 1. – P. 89–114.
2. Beasley J. E. Lagrangean heuristics for location problems / J. E. Beasley // EJOR. – 1993. – Vol. 65, N 3. – P. 383–399.
3. Data clustering using large p-median models and primal-dual variable neighborhood search / P. Hansen, J. Brunberg, D. Urosevic, and N. Mladenovic // Technical Report. – Les Cahiers du GERAD, 2007. – ISSN: 07112440,
4. Hansen P. Cluster analysis and mathematical programming / P. Hansen, B. Jaumard. // Mathematical Programming. – 1997. – Vol. 79, N 1–3. – P. 191–215.
5. Hansen P. Variable neighbourhood decomposition search / P. Hansen, N. Mladenovic, D. Perez-Brito // Journal of Heuristics. – 2001. – Vol. 7, N 4. – P. 335–350.
6. Kariv O. An algorithmic approach to network location problems. II: the p-medians / O. Kariv, L. Hakimi. // Operations Research. – 1979. – Vol. 37, N 3. – P. 539–560.
7. Mirchandani P. Discrete facility location with nonlinear diseconomies in fixed costs / P. Mirchandani, R. Jagannathan. // Annals of Operations Research. – 1989. – Vol. 18, N 1. – P. 213–224.

8. The p-median problem: A survey of metaheuristic approaches / N. Mladenovic, J. Brimberg, P. Hansen, J. Moreno-Perez // EJOR. – 2007. – Vol. 179, N 3. – P. 927–939.
9. Resende M. G. C. A grasp with path-relinking for the p-median problem M.G.C. Resende, R.F. Werneck // Technical Report TD-5E53XL, AT&T Labs Research, 2002.

I. L. Vasilyev, A. V. Ushakov

Lagrangian relaxations for the nonlinear p-median problem

Abstract. In this paper we study a modification of well-known p-median problem, in which the number of facilities is a non-fixed value. We consider the problem statement and propose a heuristic method to get lower bounds of the optimal values.

Keywords: the p-median problem, Lagrangian relaxation, lower bounds; subgradient algorithm.

Васильев Игорь Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134 тел.: +7-9148752836 (vil@icc.ru)

Ушаков Антон Владимирович, аспирант, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134 тел.: +7-9834198591 (anton.v.ushakov@gmail.com)

Vasilyev Igor, Institute of System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 134, Lermontov St., Irkutsk, 664033 Ph.D., docent, Phone: +7-9148752836 (vil@icc.ru)

Ushakov Anton, Institute of System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 134, Lermontov St., Irkutsk, 664033 post-graduate student, Phone: +7-9834198591 (anton.v.ushakov@gmail.com)