Серия «Математика»
2014. Т. 9. С. 61—74

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.95

О краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой поверхности *

П. А. Кузнецов
Иркутский государственный университет

Аннотация. В статье рассматривается начально-краевая задача специального вида для нелинейного уравнения теплопроводности в пространстве $\mathbb{R}^3$ в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. В англоязычной литературе это уравнение обычно именуется "the porous medium equation". Помимо описания процессов распространения тепла, нелинейное уравнение теплопроводности используется при математическом моделировании фильтрации политропного газа в пористом грунте, движения крови в мелких кровеносных сосудах, процессов распространения выбросов отрицательной плавучести в экологии, процессов роста и миграции биологических популяций и ряда других. В рассматриваемой начально-краевой задаче предполагается, что искомая функция обращается в нуль в начальный момент времени и режим нагрева задан на некоторой замкнутой достаточно гладкой поверхности. При этом выполнен переход в сферическую систему координат. Для указанной задачи в классе аналитических функций доказана теорема существования и единственности решения, имеющего вид тепловой волны, распространяющейся по холодному фону с конечной скоростью (если задано направление движения тепловой волны). Предложена конструктивная процедура построения решения в виде кратного степенного ряда, коэффициенты которого определяются рекуррентно из систем линейных алгебраических уравнений, не обладающих свойством строгого диагонального преобладания, при этом размерность систем неограниченно растёт вместе с увеличением порядка коэффициентов. Поскольку указанная процедура позволяет строить коэффициенты ряда в явном виде, построенное решение может быть использовано для верификации численных расчетов.

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности, краевая задача, теорема существования и единственности, степенной ряд.

* Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31175 мол_а.

1. Введение

Нелинейное уравнение теплопроводности является одним из классических в математической физике. Оно имеет широкую область применения, в частности, используется при расчётах ограждающих конструкций при теплоизоляции зданий, температурных напряжений в мостах, нагревания машин, а также при описании процессов горения и детонации [4]. Помимо моделирования распространения тепла это уравнение применяется при описании различных процессов в биологии, экологии, химии, медицине, а также механике сплошных сред при описании фильтрации газа в пористом грунте [1]. Отметим, что в англоязычной литературе обычно используется термин «the porous medium equation» («уравнение пористой среды») [16].

При степенной зависимости коэффициента теплопроводности $k(T) = \alpha T^\sigma$ от температуры T нелинейное уравнение теплопроводности имеет вид

$$T_t = \alpha div(T^\sigma \nabla T). \tag{1.1}$$

Здесь T зависит от времени t и пространственных переменных x, y, z; α и σ — положительные константы; div и ∇ — операторы дивергенции и градиента по пространственным переменным. Уравнение (1.1) также описывает фильтрацию политропного газа в пористом грунте. В таком случае T — плотность, а σ — показатель политропы (адиабаты) этого газа.

С помощью несложной замены переменных $u = T^\sigma$, $t' = \alpha t$ (далее штрих у t' опускается) (1.1) можно привести к виду

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2. \tag{1.2}$$

Существует множество публикаций, посвящённых изучению уравнения (1.2). По понятным причинам полная библиография в настоящей статье не может быть приведена, тем не менее, отметим работы [12; 13], в которых исследуется возможность построения для нелинейного уравнения теплопроводности точных решений особого вида.

Один из наиболее интересных (в том числе, с точки зрения приложений) классов задач для уравнения (1.2) составляют краевые задачи, предполагающие обращение в нуль неизвестной функции u в начальный момент времени. При этом происходит вырождение параболического типа уравнения, так как обращается в нуль множитель при старших производных, и свойства решений уравнения (1.2) качественно отличаются от свойств решений соответствующего линейного уравнения. В частности, становится возможным появление тепловой волны, распространяющейся по холодному фону с конечной скоростью.

Впервые решения подобного типа были рассмотрены в статье [4]. С тех пор вышеописанные задачи с вырождением неоднократно исследовались представителями различных научных школ. Например, в [11] такие задачи рассматриваются в абстрактных функциональных пространствах. В классе аналитических функций первым их, по-видимому, рассмотрел А. Ф. Сидоров. Им и представителями его научной школы исследовалась так называемая «задача А. Д. Сахарова об инициировании тепловой волны» [2; 14] для уравнения (1.2) с краевым условием вида

$$\begin{gathered} u(t,x,y,z)|_\Gamma = f(t,x,y,z), \\ f(0,x,y,z)=0, \quad f_t(0,x,y,z)|_\Gamma > 0, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где Γ — достаточно гладкая поверхность, разделяющая пространство на две части. Для случая, когда уравнение поверхности Γ может быть разрешено относительно одной из переменных, в [2; 14] доказаны теоремы существования и единственности локально-аналитических решений. Также задачи вида (1.2), (1.3) в одномерных и квазиодномерных постановках рассматривались в [6; 7].

В случае же, когда поверхность Γ является замкнутой, и возникает необходимость исследовать вопрос существования и единственности решения, аналитического в полной окрестности поверхности, указанные теоремы неприменимы. В статье [9] для уравнения (1.2) в сферических координатах доказана теорема существования и единственности решения, аналитического в полной окрестности сферы радиуса R. В работе [8] рассмотрена задача меньшей размерности в случае, когда $R = R(\varphi)$.

Настоящее исследование продолжает работы [8; 9], а полученный результат может рассматриваться, одновременно, как обобщение результата из [9] на случай $R = R(\varphi, \theta)$, и как обобщение результата из [8] на случай трёх пространственных переменных.

2. Формулировка основной теоремы

В уравнении (1.2) делается замена

$$t=\tau;\ x=\rho\cos\varphi\sin\theta;\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta;\ z=\rho\cos\theta.$$

Предполагается, что новые переменные удовлетворяют неравенствам

$$\rho>0;\ 0\le\varphi\le 2\pi;\ 0<\theta_1\le\theta\le\pi-\theta_2;$$

здесь θ_1 и θ_2 — малые константы. Уравнение (1.2) принимает вид

$$\begin{gathered} u_\tau = u\Big(\tfrac{2}{\rho}u_\rho + \tfrac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}u_\theta + u_{\rho\rho} + \tfrac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} + \tfrac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}\Big) + \\ + \tfrac{1}{\sigma}\Big({u_\rho}^2 + \tfrac{1}{\rho^2\sin^2\theta}{u_\varphi}^2 + \tfrac{1}{\rho^2}{u_\theta}^2\Big). \end{gathered} \tag{2.1}$$

Для уравнения (2.1) рассмотрим начально-краевые условия

$$u|_{t=0}=0,\ u(\tau,\rho,\varphi,\theta)|_{\rho=R(\varphi,\theta)} = f(\tau,\varphi,\theta), \tag{2.2}$$

где $R(\varphi,\theta)$, $f(\tau,\varphi,\theta)$ — периодические по φ с периодом 2π функции, кроме того $R(\varphi,\theta)$ — функция строго положительная и аналитическая на всей области определения, а для f справедливы соотношения

$$f(0,\varphi,\theta)=0, \quad f_\tau(\tau,\varphi,\theta)|_{\tau=0}>0.$$

Для задачи (2.1), (2.2) справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $f=f(\tau,\varphi,\theta)$ — аналитическая в некоторой окрестности $\tau=0$ и при всех допустимых φ и θ. Тогда задача* (2.1), (2.2) *имеет единственное аналитическое в некоторой окрестности $\tau=0$, $\rho=R(\varphi,\theta)$ решение, если выбрано направление движения фронта тепловой волны.*

3. Доказательство существования и единственности решения

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, приведём задачу (2.1), (2.2) к более удобному виду, домножив уравнение (2.1) на ρ^2 и сделав замену

$$t=\tau;\ r=\rho-R(\varphi,\theta);\ x_1=\varphi;\ x_2=\theta.$$

Задача принимает вид

$$(r+R)^2u_t=u\Big[2(r+R)u_r+\sum_{i=1}^{2}c_i(u_{x_ix_i}-2R_{x_i}u_{rx_i}-R_{x_ix_i}u_r+R_{x_i}^2u_{rr})+$$

$$+(r+R)^2u_{rr}+\operatorname{ctg}x_2(u_{x_2}-R_{x_2}u_r)\Big]+\frac{1}{\sigma}\Big[(r+R)^2u_r^2+\sum_{i=1}^{2}c_i(u_{x_i}-R_{x_i}u_r)^2\Big]; \tag{3.1}$$

$$u(t,r,x_1,x_2)|_{r=0}=f(t,x_1,x_2). \tag{3.2}$$

Коэффициенты c_1 и c_2 определяются по формулам

$$c_1=\frac{1}{\sin^2 x_2},\ c_2=1.$$

Доказательство. Доказательство существования и единственности аналитического решения задачи (3.1), (3.2) проводится методом мажорант. Перед построением мажорантной задачи мы проведём ряд замен с использованием методики, предложенной в [2]. Существенные отличия от [2] будут обусловлены тем, что решение задачи (3.1), (3.2) исследуется в окрестности замкнутой поверхности, уравнение которой невозможно разрешить относительно одной из пространственных переменных в декартовых координатах, а не в окрестности некоторой точки, как в [2].

В задаче (3.1), (3.2) сделаем замену

$$\tau = t, s = r - b(t, x_1, x_2), y_1 = x_1, y_2 = x_2,$$

в которой b — пока ещё неизвестная функция, периодическая по x_1 с периодом 2π и удовлетворяющая условиям

$$b(t, x_1, x_2)|_{t=0} = 0, \quad b_t(t, x_1, x_2)|_{t=0} > 0$$

в некоторой окрестности $t = 0$ и при всех допустимых x_1, x_2, а не в окрестности некоторой фиксированной точки, как предполагается в работе [2]. Функция b будет определять фронт тепловой волны, т. е. выполнится равенство

$$u(t, r, x_1, x_2)|_{r=b(t,x_1,x_2)} = 0. \tag{3.3}$$

Задача (3.1), (3.2) после такого преобразования приобретает вид

$$(s+b+R)^2(u_\tau - b_\tau u_s) = u\Big[2(s+b+R)u_s + \operatorname{ctg} y_2(u_{y_2} - b_{y_2}u_s - R_{y_2}u_s) +$$

$$+(s+b+R)^2 u_{ss} + \sum_{i=1}^{2} c_i\Big(u_{y_iy_i} - b_{y_iy_i}u_s - 2b_{y_i}u_{y_is} + b_{y_i}^2 u_{ss} -$$

$$-2R_{y_i}(u_{sy_i} - b_{y_i}u_{ss}) - R_{y_iy_i}u_s + R_{y_i}^2 u_{ss}\Big)\Big] +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\Big[(s+b+R)^2 u_s^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i(u_{y_i} - b_{y_i}u_s - R_{y_i}u_s)^2\Big]; \tag{3.4}$$

$$u(\tau, s, y_1, y_2)|_{s=-b(\tau,y_1,y_2)} = f(\tau, y_1, y_2); \tag{3.5}$$

$$u(\tau, s, y_1, y_2)|_{s=0} = 0. \tag{3.6}$$

Теперь мы имеем в задаче одно уравнение, две неизвестные функции u и b и два краевых условия (равенство (3.6) получается после преобразования условия (3.3)).

Теперь с помощью замены

$$t = \tau, s = s(\tau, u, y_1, y_2), x_1 = y_1, x_2 = y_2$$

мы поменяем ролями u и s так, чтобы s стала неизвестной функцией, а u независимой переменной. Такая замена позволит нам исключить из задачи неизвестную функцию b. Уравнение (3.4) после проведения замены и домножения на $-s_u^3$ принимает вид

$$(s+b+R)^2(s_t + b_t)s_u^2 = u\Big[-2(s+b+R)s_u^2 + \operatorname{ctg} x_2(s_{x_2} + b_{x_2} + R_{x_2})s_u^2 +$$

$$+(s+b+R)^2 s_{uu} + \sum_{i=1}^{2} c_i \Big(s_{x_i x_i} s_u^2 + s_{x_i}^2 s_{uu} - 2 s_u s_{x_i} s_{u x_i} + b_{x_i x_i} s_u^2 +$$

$$+2 b_{x_i} (s_{x_i} s_{uu} - s_{u x_i} s_u) + b_{x_i}^2 s_{uu} + 2 R_{x_i} (s_{x_i} s_{uu} - s_{u x_i} s_u + b_{x_i} s_{uu}) +$$

$$+R_{x_i x_i} s_u^2 + R_{x_i}^2 s_{uu} \Big) \Big] - \frac{s_u}{\sigma} \Big[(s+b+R)^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i (s_{x_i} + b_{x_i} + R_{x_i})^2 \Big]. \quad (3.7)$$

Краевое условие (3.5) запишется в виде

$$s(t,u,x_1,x_2)|_{u=f(t,x_1,x_2)} = -b(t,x_1,x_2). \quad (3.8)$$

Теперь из (3.8) можно выразить функцию $b(t,x_1,x_2)$ и все её производные, участвующие в уравнении (3.7):

$$b = -s|_{u=f}; \quad b_t = -s_t|_{u=f} - s_u|_{u=f} f_t; \quad b_{x_i} = -s_{x_i}|_{u=f} - s_u|_{u=f} f_{x_i};$$

$$b_{x_i x_i} = -s_{x_i x_i}|_{u=f} - 2 s_{u x_i}|_{u=f} f_{x_i} - s_u|_{u=f} f_{x_i x_i} - s_{uu}|_{u=f} f_{x_i}^2; \quad i = 1, 2.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.7), мы получаем уравнение

$$(s - s|_{u=f} + R)^2 (s_t - s_t|_{u=f} - s_u|_{u=f} f_t) s_u^2 = u \Big[-2(s - s|_{u=f} + R) s_u^2 +$$

$$+(s - s|_{u=f} + R)^2 s_{uu} + \operatorname{ctg} x_2 (s_{x_2} - s_{x_2}|_{u=f} - s_u|_{u=f} f_{x_2} + R_{x_2}) s_u^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} c_i \Big(s_{x_i x_i} s_u^2 + s_{x_i}^2 s_{uu} - 2 s_u s_{x_i} s_{u x_i} - (s_{x_i x_i}|_{u=f} + 2 s_{u x_i}|_{u=f} f_{x_i} +$$

$$+s_u|_{u=f} f_{x_i x_i} + s_{uu}|_{u=f} f_{x_i}^2) s_u^2 - 2(s_{x_i}|_{u=f} + s_u|_{u=f} f_{x_i})(s_{x_i} s_{uu} - s_{u x_i} s_u) +$$

$$+(s_{x_i}|_{u=f} + s_u|_{u=f} f_{x_i})^2 s_{uu} + 2 R_{x_i} (s_{x_i} s_{uu} - s_{u x_i} s_u - (s_{x_i}|_{u=f} + s_u|_{u=f} f_{x_i}) s_{uu}) +$$

$$+R_{x_i x_i} s_u^2 + R_{x_i}^2 s_{uu} \Big) \Big] - \frac{s_u}{\sigma} \Big[(s - s|_{u=f} + R)^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} c_i (s_{x_i} - s_{x_i}|_{u=f} - s_u|_{u=f} f_{x_i} + R_{x_i})^2 \Big]. \quad (3.9)$$

Теперь задача вновь состоит из одного уравнения (3.9), одной неизвестной функции s и одного краевого условия (3.6), которое запишется в виде

$$s(t,u,x_1,x_2)|_{u=0} = 0. \quad (3.10)$$

Далее, чтобы сделать $u = f(t,x_1,x_2)$ новой координатной плоскостью, проведём замену

$$v = u, w = u - f(t,x_1,x_2), y_1 = x_1, y_2 = x_2.$$

Из второго соотношения замены, которое запишем в виде

$$\Psi(v-w,t,y_1,y_2) \equiv v-w-f(t,y_1,y_2)=0, \tag{3.11}$$

можно получить новое представление для переменной t. Действительно, продифференцировав Ψ по t, получим $\Psi_t = -f_t$. Так как f — аналитическая функция, такая, что $f_t|_{t=0} > 0$, то можно утверждать, что $\Psi_t < 0$ в некоторой окрестности $t = 0$. Следовательно, по теореме о неявной функции, соотношение (3.11) определяет аналитическую функцию $t=\psi(v-w,y_1,y_2)$ такую, что $\psi(v-w,y_1,y_2)|_{v=w}=0$.

Чтобы записать получившиеся после последнего преобразования формулы в менее громоздком виде, введём обозначения

$$F(v-w,y_1,y_2) = -f_t(t,y_1,y_2)|_{t=\psi(v-w,y_1,y_2)};$$
$$G_i(v-w,y_1,y_2) = -f_{y_i}(t,y_1,y_2)|_{t=\psi(v-w,y_1,y_2)}, \quad i=1,2.$$

Отметим также, что, так как F, G_1, G_2 — аналитические функции, то справедливы представления

$$F(v-w,y_1,y_2) = F_0(w,y_1,y_2) + vF_1(v,w,y_1,y_2);$$

$$G_i(v-w,y_1,y_2) = G_{i,0}(w,y_1,y_2) + vG_{i,1}(v,w,y_1,y_2), \quad i=1,2.$$

При этом

$$F_0 = F|_{v=0}, \quad F_0|_{w=0} = -f_t|_{t=0},$$

$$G_{i,0} = G_i|_{v=0}, \quad G_{i,0}|_{w=0} = -f_{y_i}|_{t=0} = 0.$$

Задача (3.9), (3.10) приобретает вид

$$(s-s|_{w=0}+R)^2\Big(Fs_w-(Fs_w)|_{w=0}+(s_v+s_w)|_{w=0}F\Big)(s_v+s_w)^2 =$$

$$= v\Big[(s-s|_{w=0}+R)^2 s_{vv} - (s_{vv})|_{w=0}\sum_{i=1}^{2} c_i G_i^2 (s_v+s_w)^2 + s_{vv}\sum_{i=1}^{2} c_i q_i + q_0\Big] -$$

$$-\frac{s_v+s_w}{\sigma}\Big[(s-s|_{w=0}+R)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{2} c_i\Big(G_i s_w + s_{y_i} - (G_i s_w + s_{y_i})|_{w=0} + (s_v+s_w)|_{w=0}G_i + R_{y_i}\Big)^2\Big]; \tag{3.12}$$

$$s(v,w,y_1,y_2)|_{v=0} = 0. \tag{3.13}$$

Формулы для q_i, $i=0,1,2$ здесь не приводится в силу крайней громоздкости, отметим только, что q_i не зависят от s_{vv} и $s_{vv}|_{w=0}$.

Для того чтобы сделать последнее преобразование задачи, определим $s_1 = s_v|_{v=0}$. Положим в уравнении (3.12) $v = 0$. Учитывая равенство (3.13), получаем

$$R^2 s_1^2|_{w=0} F_0 s_1 = -\frac{s_1}{\sigma}\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i (s_1|_{w=0} G_{i,0} + R_{y_i})^2\Big].$$

Предполагая, что $s_1 \neq 0$, поделим обе части последнего соотношения на s_1. Получаем равенство

$$R^2 s_1|_{w=0} F_0 s_1 = -\frac{1}{\sigma}\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i (s_1|_{w=0} G_{i,0} + R_{y_i})^2\Big]. \tag{3.14}$$

Функцию $s_{1,0} = s_1|_{w=0}$ можно определить, полагая в (3.14) $w = 0$. С учётом равенства $G_{i,0}|_{w=0} = 0$ имеем

$$s_{1,0} = \pm\frac{1}{R\sqrt{\sigma f_1}}\sqrt{R^2 + c_1 R_{y_1}^2 + c_2 R_{y_2}^2}.$$

Выбор знака перед корнем эквивалентен выбору направления движения фронта тепловой волны: при $s_{1,0} > 0$ — во внутреннюю область многообразия, на котором заданы краевые условия, при $s_{1,0} < 0$ — во внешнюю. Для определённости будем рассматривать случай, когда $s_{1,0} < 0$. Второй случай рассматривается аналогично.

Подставляя $s_{1,0}$ в формулу (3.14), находим s_1:

$$s_1 = -\frac{1}{\sigma R^2 s_{1,0} F_0}\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i (s_{1,0} G_{i,0} + R_{y_i})^2\Big]. \tag{3.15}$$

Теперь в задаче (3.12), (3.13) мы делаем замену

$$s(v, w, y_1, y_2) = v s_1(w, y_1, y_2) + v^2 S(v, w, y_1, y_2),$$

которая представляет собой частичное разложение в ряд искомой функции s по степеням v с учётом условия (3.13). Задача (3.12), (3.13) преобразуется в виде

$$\Big(v(s_1 - s_{1,0}) + v^2(S - S|_{w=0}) + R\Big)^2 \Big(F(v s_{1w} + v^2 S_w) - F|_{w=0}(v s_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0}$$

$$+ (s_1 + 2vS + v^2 S_v + v s_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0} F\Big)(s_1 + 2vS + v^2 S_v + v s_{1w} + v^2 S_w)^2 =$$

$$= v\Big[(2S + 4vS_v + v^2 S_{vv})\Big(v(s_1 - s_{1,0}) + v^2(S - S|_{w=0}) + R\Big)^2 -$$

$$-(2S + 4vS_v + v^2 S_{vv})|_{w=0} \sum_{i=1}^{2} c_i G_i^2 (S_1 + 2vS + v^2 S_v + v s_{1w} + v^2 S_w)^2 +$$

$$+(2S+4vS_v+v^2S_{vv})\sum_{i=1}^{2}c_iq_i+q_0\Big]-$$

$$-\frac{s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w}{\sigma}\Big[\Big(v(s_1-s_{1,0})+v^2(S-S|_{w=0})+R\Big)^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}c_i\Big(G_i(vs_{1w}+v^2S_w)-(G_i(vs_{1w}+v^2S_w)+vs_{1y_i}+v^2S_{y_i})|_{w=0}+$$

$$+vs_{1y_i}+v^2S_{y_i}+(s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)|_{w=0}G_i+R_{y_i}\Big)^2\Big]. \quad (3.16)$$

После приведения подобных (с учётом (3.15)) уравнение (3.16) можно записать в виде

$$2\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big)S+\Big(4+\frac{1}{\sigma}\Big)vS_v+v^2S_{vv}+\frac{2}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}(S|_{w=0})+\frac{1}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}v(S_v|_{w=0})=$$

$$=B_1(w,y_1,y_2)(S|_{w=0})+B_2(w,y_1,y_2)v(S_v|_{w=0})+$$

$$+B_3(w,y_1,y_2)v^2(S_{vv}|_{w=0})+h_0(v,w,y_1,y_2)+vh_1+v^2h_2+v^3h_3, \quad (3.17)$$

в котором функция h_1 зависит от S и не зависит от её производных по v любого порядка, функция h_2 зависит от S и S_v, но не зависит от производных функции S по v второго и более порядков, функция h_3 зависит от S, S_v и S_{vv} и не зависит от производных функции S по v третьего и более порядков. Функции B_i, $i=1,2,3$, обращаются в нуль при $w=0$.

Описанные функции существенно отличаются от функций в похожем уравнении (7.23) из [2], к тому же h_i, $i=0,1,2,3$ содержат в качестве множителя

$$\Big[R^2+\sum_{i=1}^{2}c_i(s_{1,0}G_{i,0}+R_{y_i})^2\Big]^{-1}.$$

Можно показать, что уравнение вида

$$2\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big)Z+\Big(4+\frac{1}{\sigma}\Big)vZ_v+v^2Z_{vv}=[1+B(w,y_1,y_2)]H, \quad (3.18)$$

является мажорантным для уравнения (3.17), если

$$B(w,y_1,y_2)\gg B_1(w,y_1,y_2)+B_2(w,y_1,y_2)+B_3(w,y_1,y_2);$$

$$H=H_0+vH_1+v^2H_2+v^3H_3\gg h_0+vh_1+v^2h_2+v^3h_3.$$

При доказательстве существования аналитического мажорирующего нуль решения уравнения (3.18) используются рассуждения, аналогичные рассуждениям для уравнения (7.26) из книги [2]. □

4. Построение решения в виде ряда

Доказанная в предыдущем разделе теорема фактически обеспечивает лишь существование и единственность аналитического решения задачи (2.1), (2.2). Используя формулы, полученные при доказательстве, довольно сложно получить какое-то представление о самом решении и его свойствах. Ниже будет приведена конструктивная схема построения решения задачи (2.1), (2.2) в виде ряда по физическим переменным. В этом также заключается одно из существенных отличий настоящей работы от работы [2]. Полученные далее формулы, в частности, могут быть использованы для верификации численных расчётов, как это было сделано в [6; 9; 10; 14; 15].

Итак, построим для задачи (3.1), (3.2) решение в виде кратного степенного ряда

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(x_1,x_2)\frac{t^n}{n!}\frac{r^m}{m!} = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(\varphi,\theta)\frac{\tau^n}{n!}\frac{(\rho-R)^m}{m!}, \qquad (4.1)$$

в котором $u_{n,m}(x_1,x_2) = \frac{\partial^{n+m}u}{\partial t^n \partial r^m}|_{t=0;r=0}$. Отметим, что похожие кратные степенные ряды для построения решений краевых задач для нелинейных уравнений параболического и гиперболического типов применялись также в работах [3], [5]–[10], [14; 15].

По условию теоремы для функции $f(t,x_1,x_2)$ справедливо представление $f(t,x_1,x_2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x_1,x_2)\frac{t^n}{n!}$. Коэффициенты $u_{n,0}$ можно определить из краевого условия (3.2):

$$u(t,r,x_1,x_2)|_{r=0} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,0}(x_1,x_2)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_1,x_2)\frac{t^n}{n!}.$$

Видно, что $u_{n,0} = f_n, \quad n = 0,1,2,...$. В частности, $u_{0,0} = f_0 = 0$.

Положим теперь в уравнении (3.1) $t = r = 0$. Получаем уравнение

$$R^2 u_{1,0} = \frac{u_{0,1}^2}{\sigma}\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i R_{x_i}^2\Big],$$

преобразуя которое, получим

$$R^2\sigma f_1\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i R_{x_i}^2\Big]^{-1} = u_{0,1}^2.$$

Отсюда следует, что коэффициент $u_{0,1}$ определяется двояко по формуле

$$u_{0,1} = \pm R\sqrt{\sigma f_1\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i R_{x_i}^2\Big]^{-1}}.$$

Для определённости будем рассматривать случай

$$u_{0,1} = -R\sqrt{\sigma f_1\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i R_{x_i}^2\Big]^{-1}} < 0.$$

Случай, когда коэффициент $u_{0,1}$ положителен, рассматривается аналогично.

Определим теперь остальные коэффициенты ряда (4.1). Для этого продифференцируем уравнение (3.1) k раз по t и $n-k$ раз по r, полагая $t = 0$ и $r = 0$ (предполагается, конечно, что n, k — натуральные числа, причём $k \le n$). Получаем уравнение

$$u_{k+1,n-k} + a_k u_{k,n-k+1} + b_k u_{k-1,n-k+2} = L_{k,n-k}. \tag{4.2}$$

Здесь

$$a_k = -(n-k+\tfrac{2}{\sigma})\tfrac{1}{R^2}\Big[R^2 + \textstyle\sum\limits_{i=1}^{2} c_i R_{x_i}^2\Big]u_{0,1} > 0;$$

$$b_k = -k\tfrac{1}{R^2}\Big[R^2 + \textstyle\sum\limits_{i=1}^{2} c_i R_{x_i}^2\Big]f_1 < 0.$$

Формулы для функции $L_{k,n-k}$ здесь не приводятся в силу их громоздкости, отметим только, что $L_{k,n-k}$ зависит лишь от тех коэффициентов, сумма индексов которых не превышает числа n.

Предположим теперь, что мы определили все коэффициенты, сумма индексов которых не превышает числа n. Используя формулу (4.2), можно получить систему из $n+1$ уравнений

$$A\begin{pmatrix} u_{n,1} \\ u_{n-1,2} \\ \vdots \\ u_{0,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n,0} - f_{n+1} \\ L_{n-1,1} \\ \vdots \\ L_{0,n} \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

в которой A — квадратная трёхдиагональная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_n & b_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_{n-1} & b_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Полученная система уравнений может быть решена, например, с помощью метода прогонки.

Отметим, что все элементы наддиагонали матрицы A отрицательны, а элементы поддиагонали и главной диагонали положительны. Индукцией по n можно легко показать, что определитель такой матрицы строго больше нуля. Следовательно, система (4.3) однозначно разрешима, и на основании принципа математической индукции можно сделать вывод, что все коэффициенты ряда (4.1) определяются однозначно.

Подводя итог, отметим, что в данной статье исследована краевая задача с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой поверхности, доказана теорема существования и единственности решения в классе аналитических функций. Также, в отличии от близких теорем из [2], предложена конструктивная процедура построения решения в виде кратного степенного ряда по физическим переменным. Это позволяет исследовать свойства этого решения и использовать полученные формулы для проверки численных расчётов, выполненных, например, методом граничных элементов [9; 10; 15].

Список литературы

1. Баренблатт Г. И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. – М. : Недра, 1972. – 288 с.
2. Баутин С. П. Аналитическая тепловая волна / С. П. Баутин. – М. : Физматлит, 2003. – 88 с.
3. Баутин С. П. Обобщенная задача Коши и ее приложения / С. П. Баутин, А. Л. Казаков. – Новосибирск : Наука, 2006. – 397 с.
4. Зельдович Я. Б. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры / Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец // Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. – 1950. – С. 61–71.
5. Казаков А. Л. Применение характеристических рядов для построения решений нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением / А. Л. Казаков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, № 2. – С. 114–122.
6. Казаков А. Л. Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт // Вычисл. технологии. – 2012. – Т. 17, № 1. – С. 57–68.
7. Казаков А. Л. О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт // Приклад. механика и техн. физика. – 2013. – Т. 54, № 2(318). – С. 97–105.
8. Казаков А. Л. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных / А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов // Сиб. журн. индустриал. математики. – 2014. – Т. 17, № 1. – С. 46–54.
9. Казаков А. Л. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах / А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов, Л. Ф. Спевак // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 119–129.
10. Казаков А. Л. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации / А. Л. Казаков, Л. Ф. Спевак // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 2–17.
11. Олейник О. А. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации / О. А. Олейник, А. С. Калашников, Юй-линь Чжоу // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – Т. 22, вып. 5. – С. 667–704.

12. Рудых Г. А. Неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии / Г. А. Рудых, Э. И. Семёнов // Мат. заметки. – 2000. – Т. 67, № 2. – С. 250–256.
13. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. – М. : Наука, 1987. – 480 с.
14. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика / А. Ф. Сидоров. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
15. Kazakov A. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form / A. Kazakov, L. Spevak // Applied Mathematical Modelling. – 2013. Vol. 37, N 10-11. – P. 6918–6928.
16. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory / J. L. Vazquez. – Oxford : Clarendon Press, 2007. – 624 p.

Кузнецов Павел Александрович, аспирант, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1
тел.: (3952)242214 (e-mail: pav_ku@mail.ru)

P. A. Kuznetsov

On Boundary Value Problem with Degeneration for Nonlinear Porous Medium Equation with Boundary Conditions on the Closed Surface

Abstract. The paper deals with the special initial boundary value problem for nonlinear heat equation in $\mathbb{R}^3$ in case of power dependence of heat-conduction coefficient on temperature. In English scientific publications this equation is usually called the porous medium equation. Nonlinear heat equation is used for mathematical modeling of filtration of polytropic gas in the porous medium, blood flow in small blood vessels, processes of the propagation of emissions of negative buoyancy in ecology, processes of growth and migration of biological populations and other. The unknown function is equal to zero in initial time and heating mode is given on the closed sufficiently smooth surface in considered problem. The transition to the spherical coordinate system is performed. The theorem of existence and uniqueness of analytic solution of the problem is proved. The solution has type of heat wave which has finite velocity of propagation. The procedure of construction of the solution in form of the power series is proposed. The coefficients of the series are founded from systems of linear algebraic equations. Since the power series coefficients is constructed explicitly, this makes it possible to use the solution for verification of numerical calculations.

Keywords: porous medium equation, boundary value problem, theorem of existence and uniqueness, power series.

References

1. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhyk V.M. The Theory of Unsteady Filtration of Liquid and Gas. Fort Belvoir, Defense Technical Information Center, 1977. 476 p.
2. Bautin S.P. *Analiticheskaya teplovaya volna* [Analytic Heat Wave]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 88 p.

3. Bautin S.P., Kazakov A.L. *Obobshchennaya zadacha Koshi i ee prilozheniya* [Generalized Cauchy Problem with Applications]. Novosibirsk, Nauka, 2006. 399 p.
4. Zel'dovich Ya.B., Kompaneets A.S. Towards a Theory of Heat Propagation with Heat Conductivity Depending on the Temperature [K teorii rasprostraneniya tepla pri teploprovodnosti, zavisyashchey ot temperatury]. *Sbornik, posv. 70-letiyu Ioffe*, 1950, pp. 61–71.
5. Kazakov A.L. Application of Characteristic Series for Constructing Solutions of Nonlinear Parabolic Equations and Systems with Degeneracy [Primenenie kharakteristicheskikh ryadov dlya postroeniya resheniy nelineynykh parabolicheskikh uravneniy i sistem s vyrozhdeniem]. *Trudy IMM UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 114–122.
6. Kazakov A.L., Lempert A.A. Analytical and Numerical Studies of the Boundary Value Problem of a Nonlinear Filtration with Degeneration [Analiticheskoe i chislennoe issledovanie odnoy kraevoy zadachi nelineynoy fil'tratsii s vyrozhdeniem]. *Vych. tehnologii*, 2012, vol. 17, no. 1, pp. 57–68.
7. Kazakov A.L., Lempert A.A. Existence and Uniqueness of the Solution of the Boundary-Value Problem for a Parabolic Equation of Unsteady Filtration. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 251—258.
8. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On One Boundary Value Problem for a Nonlinear Heat Equation in the Case of Two Space Variables. *J. Appl. Ind. Math.*, 2014, vol. 8, no. 2, pp. 227–236.
9. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. On a Degenerate Boundary Value Problem for the Porous Medium Equation in Spherical Coordinates [Ob odnoy kraevoy zadache s vyrozhdeniem dlya nelineynogo uravneniya teploprovodnosti v sfericheskikh koordinatakh]. *Trudy IMM UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 119–129.
10. Kazakov A.L., Spevak L.F. Boundary Elements Method and Power Series Method for One-dimensional Non-linear Filtration Problems [Metody granichnykh elementov i stepennykh ryadov v odnomernykh zadachakh nelineynoy fil'tratsii]. *Izvestiya IGU. Ser.: Mat.*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 2–17.
11. Oleynik O.A., Kalashnikov A.S., Chzhou Yu.-L. The Cauchy Problem and Boundary Value Problems for Equations of the Type of Unsteady Filtration [Zadacha Koshi i kraevye zadachi dlya uravneniy tipa nestatsyonarnoy fil'tratsii]. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Matem.*, 1958, vol. 22, no. 5, pp. 667–704.
12. Rudykh G.A., Semenov E.I. Non-self-similar Solutions of Multidimensional Nonlinear Diffusion Equations. *Math. Notes*, 2000, vol. 67, no. 2, pp. 200–206.
13. Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P. Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations. New York, Walter de Gruyter, 1995. 533 p.
14. Sidorov A.F. *Izbrannye trudy: Matematica. Mekhanika* [Selected Works: Mathematics. Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2001, 576 p.
15. Kazakov A.L., Spevak L.F. Numerical and Analytical Studies of a Nonlinear Parabolic Equation with Boundary Conditions of a Special Form. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, no. 10-11, pp. 6918–6928.
16. Vazquez J.L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford, Clarendon Press, 2007. 624 p.

Kuznetsov Pavel Alexandrovich, Postgraduate, Irkutsk State University, 1, K. Marks st., Irkutsk, 664003 tel.: (3952)242214
(e-mail: pav_ku@mail.ru)