Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 1. С. 97—108

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.968, 517.965

Метод монотонных мажорант в теории нелинейных уравнений Вольтерра *

Д. Н. Сидоров
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН
Иркутский государственный университет

Н. А. Сидоров
Иркутский государственный университет

Аннотация. Строятся главные по Канторовичу решения нелинейных операторно-интегральных уравнений Вольтерра. Сходимость последовательных приближений устанавливается с помощью исследования мажорантных интегральных и алгебраических уравнений. Даны оценки решений и интервалов, на правых концах которых решения могут иметь blow-up пределы.

Ключевые слова: монотонные мажоранты, уравнения Вольтерра, последовательные приближения, blow-up.

1. Введение

Введем нелинейный непрерывный оператор

$$\Phi(\omega_1, \dots, \omega_n, u, t) : E_1 \times \dots \times E_1 \times \mathbb{R}^1 \to E_2$$

от $n+1$ переменных $\omega_1, \dots, \omega_n, u$, являющихся абстрактными непрерывными функциями вещественного переменного t со значениями в E_1. Здесь E_1, E_2 – банаховы пространства, $\Phi(0, \dots, 0, u_0, 0) = 0$. Пусть $K_i : \underbrace{\mathbb{R}^1 \times \dots \mathbb{R}^1}_{i+1} \times \underbrace{E_1 \times \dots \times E_1}_{i} \to E_2$ – нелинейные непрерывные операторы, зависящие от вектор-функции $u(s) = (u(s_1), \dots, u(s_n))$ и вещественных переменных $t, s_1, \dots s_n$. Положим

$$\omega_i(t) = \int_0^t \cdots \int_0^t K_i(t, s_1, \dots, s_i, u(s_1), \dots, u(s_i)) ds_1 \dots ds_i, \; i = \overline{1, n}$$

* Работа выполнена в рамках ФЦПК «Кадры» П696 от 30 мая 2010 г., также частично поддержана РФФИ, грант№ 09–01–00377.

и рассмотрим при $t \in [0,T)$ операторно-интегральное уравнение

$$F(u,t) \equiv \Phi\Big(\int_0^t K_1(t,s,u(s))ds, \int_0^t\int_0^t K_2(t,s,s_1,s_2,u(s_1),u(s_2))ds_1 ds_2, \dots$$

$$\dots \int_0^t \cdots \int_0^t K_n(t,s_1,\dots s_n,u(s_1),\dots u(s_n))ds_1\dots ds_n, u(t), t\Big) = 0. \qquad (1)$$

Искомая абстрактная непрерывная функция $u(t)$ принимает значения в E_1. Требуется найти непрерывные решения $u(t) \to u_0$ при $t \to 0$. При $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^1$ уравнение (1) в ряде случаев рассматривалось многими авторами (см., например, [1, 9]). В общем случае банаховых пространств E_1, E_2 уравнение (1), по-видимому, ранее не изучалось.

Популярным конструктивным методом в теоретических и прикладных исследованиях является метод мажорант. Л.В. Канторович в работе [6] при исследовании функциональных уравнений в B_K-пространствах придал классическому методу мажорант абстрактную форму, что сделало едиными и прозрачными основные этапы его методологии. В своей монографии ([5], с. 467) он особо выделил роль главных решений нелинейных уравнений и соответствующих им мажорант. Главные решения единственны согласно их определению и могут быть построены последовательными приближениями из эквивалентного уравнения (4), начиная с нулевого приближения. Главное непрерывное решение $u^+(t)$ в точках интервала $[0,T)$ удовлетворяет оценке $||u^+(t)|| \leq z(t)$, где $z(t)$ – суть непрерывное положительное решение мажорантного интегрального уравнения Вольтерра вида

$$z(t) = f\left(\int_0^t \gamma(z(s))ds\right),\ z(t) \in C^+_{[0,T)}. \qquad (2)$$

Здесь и далее f и γ монотонно возрастающие непрерывные функции. Если уравнению (1) при $t \in [0,T)$ удовлетворяет элемент u_0, то u_0 и будет главным решением. Далее этот тривиальный случай исключается. При продолжении нетривиального главного решения $u^+(t)$ правее границы T интервала $[0,T)$, на котором последовательные приближения сходятся, решение $u^+(t)$ может уйти в ∞ или *разветвиться* (см. [7], п. 37). Возможен конечно случай, когда оператор F удовлетворяет условию Липшица при любых u и главное решение продолжаемо на весь интервал $[0,\infty)$. Если условие Липшица не выполнено, то кроме главного решения уравнение типа (1) может иметь сколь угодно много других непрерывных решений, пересекающих главное решение.

Пример 1.

$$u(t) = p\int_0^t u^{\frac{p}{p-1}}(s),\ 1 < p < \infty$$

Здесь $u_1(t) = 0$ – главное решение. Другие непрерывные решения: $u_2(t) = t^p$,

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq t \leq c \\ (t-c)^p, & c \leq t < \infty. \end{cases}$$

Главное решение $u^+(t) = 0$ этого примера является особым решением соответствующей задачи Коши $\dot{u} = pu^{\frac{p}{p-1}}$, $u(0) = 0$.

Цель этой заметки – построение главных решений уравнения (1) на максимальном интервале $[0, T)$. Статья состоит из двух частей, иллюстративных примеров и заключения.

В п. 2 для уравнения (1) получена теорема существования главного решения $u(t) \to u_0$ при $t \to 0$ с оценкой нормы $||u(t)||_{E_1}$ при $t \in [0, T)$. Указан способ построения приближений $u_n(t)$ и интервал $[0, T)$ их точечной сходимости при $\forall u_0(t)$, если $||u_0(t)||_{E_1} \leq z^+(t)$, где $z^+(t)$ – главное неотрицательное решение соответствующего мажорантного интегрального уравнения (2). Приведены достаточные условия, когда $\lim\limits_{t \to T} z^+(t) = \infty$ (или $\lim\limits_{t \to T} \frac{dz^+(t)}{dt} = +\infty$), т.е. главное решение мажорантного уравнения (или его производная) имеет blow-up предел (уходит в ∞ за конечное время T). При выполнении этих условий искомое решение $u(t)$ уравнения (1), вообще говоря, может за конечное время $T' \geq T$ тоже уйти в ∞ (или разветвиться).

В п. 3 показано, как при построении главного решения уравнения (1) надо строить и использовать мажорантные алгебраические системы вида

$$\begin{cases} r = R(r, t), \\ 1 = R'_r(r, t), \end{cases} \tag{3}$$

в которых $R(0, 0) = 0$, $R'_r(0, 0) = 0$, $R(r, t)$ – выпуклая функция относительно r. Алгебраические мажорантные системы (3) в монографии ([3], гл. 5) названы мажорантами А. М. Ляпунова. Они и более общие алгебраические мажоранты использовались в [3] в задачах механики и в ([10], с.198–216) при построении неявных функций в B_K –пространствах. Отметим, что алгебраические мажорантные системы имеют единственное положительное решение r^*, T^*. Это позволяет определить гарантированный интервал $[0, T^*]$, на котором уравнение (1) имеет главное решение $u(t) \to 0$ при $t \to 0$ и радиус шара $S(0, r^*)$ в пространстве $C^{E_1}_{[0, T^*]}$, в котором строится главное решение равномерно сходящимися последовательными приближениями.

2. Интегральные мажоранты в построении решения уравнения (1)

Введем эквивалентное (1) уравнение

$$u = \mathcal{L}(u), \tag{4}$$

где $\mathcal{L}(u) = A^{-1}(Au - F(u,t))$, A – непрерывно обратимый оператор, действующий из E_1 в E_2. Если оператор F имеет производную Фреше $F_u(0,0)$ и она обратима, то можно положить $A = F_u(0,0)$.

Определение 1. *Если приближения $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$, $u_0 = 0$ при $t \in [0,T^*)$ сходятся к решению $u^+(t)$ уравнения (4), то функцию $u^+(t)$ назовем главным по Канторовичу решением уравнения (1).*

Напомним, что в монографии Л.В.Канторовича ([5], с. 467) именно таким образом введен термин *«главное решение функционального уравнения»*. Далее под решением будем понимать главное.

Рассмотрим оператор $F(u,t) - Au$, как действующий из полного пространства $C^{E_1}_{[0,T]}$ в полное пространство $C^{E_2}_{[0,T]}$. Получим в нормах пространств E_1, E_2 оценку:
A) $||F(u,t) - Au||_{E_2} \leq f(\int_0^t \gamma(||u(s)||_{E_1}))ds)$, $t \in [0,T)$.
Пусть в неравенстве **A)** и далее выполнено предположение:
B) γ, f – непрерывно-монотонные возрастающие выпуклые функции соответственно на отрезках $[0,z']$ и $[\gamma(0), \gamma(z')]$, $z \leq \infty$;
C) при $t \in [0,T)$ существует в конусе $C^+_{[0,T)}$ функция $z'(t)$, такая, что

$$z'(t) \geq f\biggl(\int_0^t \gamma(z'(s))ds\biggr). \tag{5}$$

Замечание 1. В леммах 2 и 3 будет дан способ определения границы T такой, что при $t \in [0,T)$ условие **C)** выполняется.

В силу условия **A)** $f(\gamma(0)t) \geq 0$. Поэтому нуль является нижним решением мажорантного интегрального уравнения (2), а $z'(t)$ – верхним решением в конусе $C^+_{[0,T)}$. Предполагая выполненными условия **C)** и **B)** введем последовательность $z_n(t) = f\biggl(\int_0^t \gamma(z_{n-1}(s))ds\biggr)$, $z_0 = 0$. Тогда, на основании теоремы 2.11 Канторовича ([5], с. 464) при $\forall n$, $t \in [0,T)$ справедливы неравенства

$$0 = z_0(t) \leq z_1(t) \leq \cdots \leq z_n(t) \leq z'(t).$$

Поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(t) = z^+(t)$. В силу непрерывности функций γ, f и теоремы Лебега (см., например, [8], с.39) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} f\biggl(\int_0^t \gamma(z_n(s))ds\biggr) = f\biggl(\int_0^t \gamma(z^+(s))ds\biggr).$$

Таким образом, функция $z^+(t)$ оказывается на интервале $[0,T)$ непрерывной и является главным решением мажорантного интегрального уравнения (2). Приближение $z_n(t)$ в точках интервала $[0,T)$ сходятся к $z^+(t)$, $z^+(t) \in C^+_{[0,T)}$.

Перейдем к построению решения $u^+(t)$ уравнения (1) последовательными приближениями. Пусть наряду с условиями **A)**, **B)** и **C)** выполнено неравенство

D) $||F(u+\Delta u,t)-F(u,t)-Au||_{E_2} \le f\left(\int_0^t \gamma(||u(s)||_{E_1}+||\Delta u(s)||_{E_1})ds\right) - f(\int_0^t \gamma(||u(s)||_{E_1})ds)$.

При условии дифференцируемости по Фреше операторов

$$F(u,t),\ f\left(\int_0^t \gamma(z(s))ds\right)$$

проверку неравенства **D)** можно заменить на проверку условия **E)** (см. ниже). Действительно, пусть указанные производные Фреше существуют и непрерывны при $t \in [0,T)$ по норме линейных ограниченных операторов, соответственно в пространствах $\mathcal{L}(E_1 \to E_2)$ и $\mathcal{L}(C^+_{[0,T)} \to C^+_{[0,T)})$. При этом мы предположим, что функции f, γ имеют непрерывные монотонно возрастающие производные и дифференциал Фреше оператора f определяется формулой

$$f'_z\left(\int_0^t \gamma(z(s)ds\right)h \equiv f'_\gamma\left(\int_0^t \gamma(z(s)ds\right)\int_0^t \gamma'_z(z(s))h(s)ds$$

при $\forall h(s) \in C^+_{[0,T]}$.

Пусть в дополнение к условиям **A)** и **B)** при любых $V(t) \in C^{E_1}_{[0,T)}$ выполнено неравенство

E) $||(F_u(u,t)-A)V||_{E_2} \le f'_z\left(\int_0^t \gamma(||u(s)||_{E_1}ds\right)||V||_{E_1},\ ||V||_{E_1} \in C^+_{[0,T)}$.

Тогда имеет место

Лемма 1. *Пусть выполнено неравенство* **E)** *и производные* f'_γ, γ'_z *монотонно возрастают. Тогда неравенство* **D)** *выполняется.*

Доказательство. Используя формулу Лагранжа конечных приращений ([7], с. 367) и условия леммы 1, получим неравенство

$$||F(u+\Delta u,t)-F(u,t)-A\Delta u||_{E_2} =$$

$$= ||\int_0^1 (F_u(u+\Theta\Delta u,t)-A)d\Theta\Delta u||_{E_2} \le \int_0^1 f'_\gamma\left(\int_0^t \gamma\left(||u(s)||_{E_1}+\right.\right.$$

$$+\Theta||\Delta u(s)||_{E_1}\Big)ds\Big)\int_0^t \gamma'\Big(||\Delta u(s)||_{E_1}+\Theta||\Delta u(s)||_{E_1}\Big)||u(s)||_{E_1}dsd\Theta =$$

$$= f(\int_0^t \gamma(||u(s)||_{E_1}+||\Delta u(s)||_{E_1})ds) - f(\int_0^t \gamma(||u(s)||_{E_1})ds).$$

□

Построим приближения $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$, $u_0 = 0$ к решению $u^+(t)$. Повторяя этапы доказательства теоремы 2.22 ([5], с. 466) установим оценки $||u_{n+p}(t) - u_n(t)||_{E_1} \leq z_{n+p}(t) - z_n(t)$ при $t \in [0,T)$, где $z_n(t) = f(\int_0^t \gamma(z_{n-1}(s))ds)$, $z_n(t) \in C^+_{[0,T)}$, $u_n(t) \in C^{E_1}_{[0,T)}$, $u_0 = 0, z_0 = 0$.

Подобные оценки в другой ситуации проводились нами при исследовании неявных отображений методом выпуклых мажорант (см. [10], гл. 4, п. 3).

В силу **A)**, **B)**, **C)** по выше доказанному существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n(t) = z^+(t)$ при $\forall t \in [0,T)$, т. е. $z_n(t)$ – фундаментальная последовательность в каждой точке $t \in [0,T)$. Поэтому последовательность абстрактных функций $u_n(t)$ со значениями в банаховом пространстве E_1 при каждом $t \in [0,T)$ сходится по норме пространства E_1 к функции $u^+(t)$. В силу непрерывности оператора $\mathcal{L}(u)$ справедливо тождество $u^+(t) = \mathcal{L}(u^+)$, то есть $u^+(t)$ удовлетворяет уравнению (1) и является элементом пространства $C^{E_1}_{[0,T)}$.

Из изложенного вытекает

Теорема 1. *Пусть при $t \in [0,T)$ выполнены условия A), B), C), D). Тогда уравнение (1) в пространстве $C^{E_1}_{[0,T)}$ имеет главное решение $u^+(t)$. Более того, $||u^+(t)||_{E_1} \leq z^+(t)$, где $z^+(t)$ – главное решение мажорантного уравнения (2), приближения $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$, $u_0 = 0$ сходятся к $u^+(t)$ по норме пространства E_1 при $\forall t \in [0,T^+)$, приближения $z_n(t) = f(\int_0^t \gamma(z_{n-1}(s))ds), z_0 = 0$ сходятся к $z^+(t)$.*

В теореме 1 не указана величина интервала $[0,T^+)$. Для определения T^+ сведем мажорантное интегральное уравнение (2) к задаче Коши для ДУ с разделяющимися переменными. С этой целью введем дифференцируемую функцию $\omega(t) = \int\limits_0^t \gamma(z(s))ds$. Тогда $\frac{d\omega(t)}{dt} = \gamma(z(t))$, $\omega(0) = 0$, где $z(t) = f(\omega(t))$. Поэтому эквивалентная уравнению (2) задача Коши имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \gamma(f(\omega(t))), \\ \omega(0) = 0. \end{cases} \tag{2$'$}$$

Леммы 2 и 3 дают оценку интервала $[0,T^+)$, на котором задача Коши (2$'$) в пространстве $C^+_{[0,T^+)}$ имеет единственное решение $\omega^+(t)$ и приближения $\omega_n(t) = \int\limits_0^t \gamma(f(\omega_{n-1}(s)))ds$, $\omega_0 = 0$ к нему сходятся.

Лемма 2. *Пусть $\gamma(f(\omega))$ – непрерывная, строго положительная и монотонно возрастающая функция. Пусть существует $\lim\limits_{\omega\to\infty}\int\limits_0^\omega \frac{d\omega}{\gamma(f(\omega))} = T^+$. Тогда задача ($2'$) в конусе $C^+_{[0,T^+]}$ имеет монотонно возрастающее решение $\omega^+(t)$. При этом приближения $\omega_n(t) = \int\limits_0^t \omega(f(\omega_{n-1}(s)))ds$, $\omega_0 = 0$ сходятся к $\omega^+(t)$, $\lim\limits_{t\to T^+}\omega^+(t) = \infty$.*

Доказательство. Разделяя переменные в ($2'$) задачу Коши сведем к поиску положительной монотонно возрастающей ветви неявной функции $\omega = \omega(t)$, $\omega(0) = 0$ из уравнения $\Phi(\omega) = t$, где $\Phi(\omega) = \int\limits_0^\omega \frac{d\omega}{\gamma(f(\omega))}$. Если $\gamma(f(\omega))$ – рациональная дробь, то первообразная $\Phi(\omega)$ строится в явном виде через логарифмы, арктангенсы и рациональные функции (см. [4], с. 344). Отметим, что в условиях леммы 1 функция $\Phi(\omega)$ непрерывна и монотонно возрастает на полуоси $[0,\infty)$, т.к. $\Phi' = \frac{1}{\gamma(f(\omega))} > 0$, $\lim\limits_{\omega\to 0}\Phi(\omega) = 0$, $\lim\limits_{\omega\to\infty}\Phi(\omega) = T^+$. Поэтому отображение $\Phi : [0,\infty) \to [0,T^+)$ является биективным, уравнение $\Phi(\omega) = t$ при $0 \le t < T^+$ определяет однозначно функцию $\omega^+(t)$, удовлетворяющую, очевидно, и интегральному уравнению

$$\omega(t) = \int\limits_0^t \gamma(f(\omega(s)))ds.$$

В силу монотонного возрастания функций f и γ приближения $\omega_n(t) = \int_0^t \gamma(f(\omega_{n-1}(s)))ds$, $\omega_0 = 0$ при $t \in [0,T^+)$ сходятся к $\omega^+(t)$. □

Если $\gamma(f(\omega))$ – рациональная дробь, то в ряде случаев решение $\omega^+(t)$ можно построить в явном виде, в сложных случаях привлекая средства компьютерной алгебры (см. [1]).

Замечание 2. Зная $\omega^+(t)$ по формуле $z^+(t) = f(\omega^+(t))$ найдем решение мажорантного интегрального уравнения (2). Отметим, что в условиях леммы 2 приближения $z_n = f(\int\limits_0^t \gamma(z_{n-1}(s)ds))$, $z_0 = 0$ сходятся при $t \in [0,T^+)$ к решению $z^+(t)$.

Замечание 3. Если в условиях леммы 2 $\lim\limits_{\omega\to\infty}\int\limits_0^\omega \frac{d\omega}{\gamma(f(\omega))} = \infty$, то решение $z^+(t)$ продолжается на всю полуось $[0,\infty)$.

Этот результат вытекает и из теоремы 2.7 ([2], с.148).

Например, пусть выполнено неравенство

$$||F(u,t) - Au||_{E_2} \le a\int\limits_0^t ||u(s)||ds + b,\ a > 0,\ b > 0,$$

при $\forall u$, $0 \leq t < \infty$. Тогда мажорантное интегральное уравнение (2) будет линейным вида $z(t) = a\int\limits_0^t z(s)ds + b$ и имеет единственное решение $z(t) = be^{at}$, $0 \leq t < \infty$. Заметим, что в этом случае $\gamma(f(\omega)) = a\omega + b$ $\lim\limits_{\omega\to\infty}\int\limits_0^\omega \frac{d\omega}{a\omega+b} = \infty$. Если при этом

$$||F(u+\Delta u, t) - F(u,t) - A\Delta u||_{E_2} \leq a\int\limits_a^t ||\Delta u(s)||_{E_1} ds,$$

то условия теоремы 1 выполняются на полуоси $0 \leq t < \infty$ и уравнение (1) будет иметь решение $u^+(t)$ в пространстве $C^{E_1}_{[0,\infty)}$. При этом $||u^+(t)||_{E_1} \leq be^{at}$. Из этого результата, разумеется, не следует, что в области $||u(t)||_{E_1} \geq be^{at}$ уравнение (1) не имеет других решений.

Лемма 3. *Пусть суперпозиция $\gamma(f(\omega))$ непрерывна и строго положительна при $0 \leq \omega \leq \omega^*$. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{\omega\to\omega^*}\gamma(f(\omega)) = \infty$, $\lim\limits_{\omega\to\omega^*}\int\limits_0^\omega \frac{d\omega}{\gamma(f(\omega))} = T^+$. Тогда задача Коши (2′) при $t \in [0, T^+]$ имеет в конусе $C^+_{[0,T^+)}$ непрерывное монотонно возрастающее решение $\omega^+(t)$, причем $\lim\limits_{t\to T^+}\frac{d\omega^+}{dt} = \infty$, приближения $\omega_n(t) = \int_0^t \gamma(f\omega_{n-1}(s))ds$, $\omega_0 = 0$ сходятся при $0 \leq t \leq T^+$ к решению $\omega^+(t)$.*

Доказательство леммы 3 вытекает из биективности отображения $\Phi : [0,\omega^*] \to [0, \Phi(\omega^*)]$ при $\Phi(\omega) = \int_0^\omega \frac{d\omega}{\gamma(f(\omega))}$, $\Phi(\omega^*) = T^+$.

Замечание 4. В условиях леммы 3 точка T^+ является blow-up пределом производной решения $z^+(t)$ мажорантного уравнения (2).

3. Алгебраические мажоранты в построении главного решения уравнения (1)

Пусть теперь в уравнении (1) $u_0 = 0$, т.е. $\Phi(0,\ldots,0) = 0$. Требуется построить непрерывное решение $u^+(t)$ последовательными приближениями $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$ на замкнутом интервале $[0,T^+]$. В пространстве $C^{E_1}_{[0,T^+]}$ введем норму $||u|| = \max\limits_{0\leq t\leq T^+}||u(t)||_{E_1}$. Будем предполагать, что оператор F дифференцируем по u в смысле Фреше. Пусть при $0 \leq t \leq T$, где $T \geq T^+$ и $u \in S(0,r) \subset E_1$, выполнены неравенства:
A′) $||F(u,t) - Au||_{E_2} \leq f(r,t)$,
E′) $||F'_u(u,t) - A||_{E_2} \leq f'_r(r,t)$.
G) Пусть функции $f(r,t)$, $f'_r(r,t)$ положительны при $r > 0$, $t > 0$ и

монотонно возрастают, $f(0,0) = 0$, $f'_r(0,0) \in [0,1)$, функция $f(r,t)$ выпуклая по r.

Тогда алгебраическое уравнение $r = ||A^{-1}||f(r,t)$ согласно определению 5.1 из монографии [3], стр. 205. будет мажорантой Ляпунова для оператора $\mathcal{L}(u)$.

В силу монотонного возрастания функций $f(r,t)$, $f_r(r,t)$ и выпуклости $f(r,t)$ система

$$\begin{cases} r = ||A^{-1}||f(r,t), \\ 1 = ||A^{-1}||f'_r(r,t) \end{cases}$$

имеет единственное положительное решение r^+, T^+ (см. [3], с. 218). Более того, уравнение $r = ||A^{-1}||f(r,t)$ при $0 \le t \le T^+$ определяет единственным образом монотонно возрастающее решение $r^* = r(t)$, приближения $r_n(t) = ||A^{-1}||f(r_{n-1}(t),t)$, $r_0 = 0$, при $0 \le t \le T^+$ сходятся к функции $r(t)$. Соответственные приближения $r_n = ||A^{-1}||f(r_{n-1}, T^+)$, $r_0 = 0$, сходятся к r^+. Функция $r(t)$ является главным решением мажорантного уравнения А.М.Ляпунова. На основании леммы 5.1 ([3], стр. 206), если $||u_i(t)||_{E_1} \le r_i$, $i = 1,2$, $||u_2(t) - u_1(t)|| \le r_2 - r_1$, то при $0 \le t \le T^+$

$$||\mathcal{L}(u_2) - \mathcal{L}(u_1)||_{E_1} \le ||A^{-1}||(f(r_2,t) - f(r_1,t)).$$

Наряду с приближениями $r_n(t)$ решения мажоранты Ляпунова, введем приближения $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$, $u_0 = 0$ главного решения уравнения (1). При произвольных k и $l \ge k$ в силу условий $\mathbf{A}'$), $\mathbf{E}'$) и верхнего неравенства, придем к оценке $||u_l(t) - u_k(t)||_{E_1} \le r_l(t) - r_k(t) \le r_l(T^+) - r_k(T^+)$. Т. к. $r_l(T^+)$ монотонно возрастающая последовательность и $\lim\limits_{l\to\infty} r_l(T^+) = r^+$, то $||u_l(t) - u_k(t)||_{E_1} \le \varepsilon$ при $l,k \ge N(\varepsilon)$ если $t \in [0,T^+]$. Следовательно, $||u_l(t) - u_k(t)||_{E_1} \le \varepsilon$ при $l,k \ge N(\varepsilon)$. Поэтому в силу полноты пространства $C^{E_1}_{[0,T^+]}$ существует предел $\lim\limits_{l\to\infty} u_l(t) = u^+(t)$. Более того, $u^+(t)$ непрерывна по t, а приближения $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$, $u_0 = 0$ сходятся на отрезке $[0,T^+]$ равномерно по t. Из изложенного вытекает

Теорема 2. *Пусть* $\Phi(0,\dots,0) = 0$, *выполнены неравенства* $\mathbf{A}'$), $\mathbf{E}'$) *при* $t \in [0,T^+]$, *пара* $r^+ > 0$, $T^+ > 0$ *удовлетворяет алгебраической системе*

$$\begin{cases} r = ||A^{-1}||f(r,t), \\ 1 = ||A^{-1}||f'_r(r,t), \end{cases}$$

где функция $f(r,t)$ *удовлетворяет условию* **G)**. *Тогда на отрезке* $[0,T^+]$ *уравнение (1) имеет непрерывное решение* $u^+(t)$ *в пространстве* $C^{E_1}_{[0,T^+]}$. *Более того, приближения* $u_n(t) = \mathcal{L}(u_{n-1})$ *сходятся равномерно по* t, $\max\limits_{0\le t\le T^+} ||u^+(t)|| \le r^+$.

Пример 2.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \int_0^t \sin(t-\tau+x)u^2(x,\tau)d\tau = t, \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, \quad 0 \le x \le 1,\, t \ge 0. \end{cases}$$

Требуется построить классическое решение $u \to 0$ при $t \to 0$. Здесь $E_1 = \overset{\circ}{C}{}^{(2)}_{[0,1]}$ – пространство дважды дифференцируемых по x функций, обращающихся в нуль на концах интервала $[0,1]$, $E_2 = C_{[0,1]}$. $Au = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2,}$ оператор $A \in \mathcal{L}(E_1 \to E_2)$ имеет ограниченный обратный $A^{-1} = \int\limits_0^1 G(x,s)[\cdot]ds$, где

$$G(x,s) = \begin{cases} x(s-1), & 0 \le x \le s \le 1, \\ s(x-1), & s \le x \le 1, \end{cases}$$

$||A^{-1}||_{\mathcal{L}(E_1 \to E_2)} \le 1$.

Согласно теореме 1 соответствующее мажорантное интегральное уравнение (2) имеет вид $z(t) = \int_0^t z^2(s)ds + t$, откуда функция $z^+(t) = tgt$ при $0 \le t < \frac{\pi}{2}$ будет главным решением мажорантного интегрального уравнения. $\frac{\pi}{2}$ является точкой, в которой имеет место blow-up предел решения $z^+(t)$. Краевая задача на основании Теоремы 1 имеет в пространстве $C^{E_1}_{[0,\frac{\pi}{2})}$ решение $u^+(x,t)$, причем при $0 \le t < \frac{\pi}{2}$

$$\max_{0 \le x \le 1}\left(\left|\frac{\partial^i u^+(x,t)}{\partial x^i}\right|, i = 0,1,2\right) \le tg\, t.$$

С другой стороны, следуя теореме 2, составим мажорантное алгебраическое уравнение $r = tr^2 + t$. Функция $r^+ = \frac{1-\sqrt{1-4t^2}}{2t}$ при $t \in [0, 0.5]$ является главным решением мажорантного алгебраического уравнения. Согласно теореме 2 построим систему

$$\begin{cases} r = tr^2 + t \\ 1 = 2tr \end{cases}$$

имеющую одно положительное решение $T^+ = 0.5$, $r^+ = 1$. Поэтому согласно теореме 2 получим гарантированный интервал по t существования решения $u^+(x,t)$ краевой задачи с оценкой нормы решения u^+ вида

$$\max_{x \in [0,1],\; t \in [0,0.5]}\left\{\left|\frac{\partial^i u^+(x,t)}{\partial x^i}\right|, i = 0,1,2\right\} \le 1,\; ||u^+||_{E_1} \le r^+(t), t \in [0, 0.5]$$

Так как $0.5 < \pi/2$, то в этом примере интегральная мажоранта дала более тонкую оценку решения u^+, чем алгебраическая.

В заключение отметим, что рассматривая уравнение (1) в B_K пространствах и вводя абстрактные нормы в смысле Канторовича, можно получить более тонкие системы мажорантных интегральных и алгебраических уравнений. Такие мажоранты будут полнее характеризовать решение уравнения (1). С помощью мажорантных алгебраических уравнений можно исследовать решения n-мерных интегральных уравнений Вольтерра вида (1), т.е. при $t \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Мажорантные уравнения должны строиться в банаховых пространствах, допускающих частичную упорядоченность. Алгебраические мажоранты, вообще говоря, дают более грубые оценки, чем интегральные мажоранты, но их проще строить и исследовать. Так как решение мажорантного интегрального уравнения имеет blow-up предел, то при численном решении таких задач в окрестности точек, где имеет место blow-up предел, целесообразно использовать адаптивные сетки.

Список литературы

1. Апарцин А. С. Об эквивалентных нормах в теории полиномиальных интегральных уравнений Вольтерра I рода / А. С. Апарцин // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер.: Математика. – 2010. - Т. 3, №. 1. – С. 19–29.
2. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости / Е. А. Барбашин. - М. : Наука, 1967. – 223 с.
3. Гребеников Е. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов. – М : Наука, Физматлит, 1978.
4. Ильин В. А. Математический анализ / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – М : Наука, 1979. – 713 с.
5. Канторович Л. В. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах / Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г.Пинскер. – М. ; Л., 1950.
6. Канторович Л. В. О функциональных уравнениях / Л. В.Канторович // Учен. зап. ЛГУ. – 1937. – Т. 3, № 7.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1993. – 439 с.
8. Шилов Г. Е. Интеграл, мера и производная / Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич. – М : Наука, 1967. – 220 с.
9. Belbas S. A. Numerical solution of multiple nonlinear Volterra integral equations / S. A. Belbas, Yuriy Bulka // Applied Mathematics and Computation. - 2011. – Vol. 217, Issue 9. – P. 4791–4804.
10. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev // Kluwer Academic Publisher. – Dordrecht–Boston–London, 2002. – 568 p.

D. N. Sidorov, N. A. Sidorov

Method of monotone majorants of the theory of nonlinear Volterra equations

Abstract. The authors have constructed the main solutions of nonlinear operator-integral equations of Volterra in sense of Kantorovich. Convergence of the successive approximations is established through studies of majorants of integral and algebraic equations. Estimates are given for the solutions and for the intervals on which right margin the solution has the blow-up limit or start branching.

Keywords: majorants, Volterra operator-integral equations, blow-up limit, successive approximations.

Сидоров Денис Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт систем энергетики СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130, тел. (3952)429440; Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1
тел.: (3952)242210 (dsidorov@isem.se.irk.ru)

Сидоров Николай Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (petrov@math1.isu.ru)

Sidorov Denis, Energy Systems Institute SB RAS, 130 Lermontov Str., Irkutsk, 664003 Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 professor, Phone: (3952)428440 (dsidorov@isem.sei.irk.ru)

Sidorov Nikolay, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 professor, Phone: (3952)242210 (sidorovisu@gmail.com)